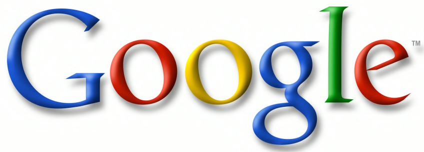




MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ DES

SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

MÉMOIRES

DE LA SOCIÉTÉ

DES SCIENCES

PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

2ᵉ SÉRIE

TOME IV

PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU
DES LONGITUDES, SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

A BORDEAUX

CHEZ DUTHU, LIBRAIRE

17, rue Sainte-Catherine, 17

1882

LISTE DES MEMBRES DE LA SOCIÉTÉ

au 1er Décembre 1881.

Composition du Bureau pour l'année 1881-1882.

MM. LAGRANDVAL (DE), ❋, *Président.*
RAYET, ❋, *Vice-Président.*
ABRIA, O. ❋, *Secrétaire général.*
COYNE, MONDIET, } *Secrétaires adjoints.*
HOÜEL, *Archiviste.*
POTOCKI, *Trésorier.*
GAYON, GLOTIN, ❋, HAUTREUX, ❋, KOWALSKI, LESPIAULT, ❋, LOQUIN, MERGET, ❋, MILLARDET, MICÉ, PÉREZ, } *Membres du Conseil.*

Membres titulaires.

MM. ABRIA, O. ❋, doyen de la Faculté des Sciences, membre correspondant de l'Insti ut.
ARIÈS, ❋, capitaine du Génie.
ARMAINGAUD, agrégé de la Faculté de Médecine.
AUGIS, ingénieur de la Compagnie des Chemins de fer du Midi.
AZAM, ❋, professeur à la Faculté de Médecine.
BADAL, ❋, professeur à la Faculté de Médecine.
BARCKHAUSEN, professeur à la Faculté de Droit, adjoint au maire de Bordeaux.
BAYRAC, pharmacien militaire.
BAYSSELLANCE, O. ❋, ingénieur des Constructions navales en retraite, adjoint au maire de Bordeaux.
BERGONIÉ, préparateur à la Faculté de Médecine.

MM. BLARÈS, chef des travaux chimiques à la Faculté de Médecine.
BONEL, ✻ ✻, ingénieur de la Compagnie des Téléphones.
BONNETAT, professeur de Mathématiques.
BREITTMAYER, ingénieur.
BROCHON (E.-H.), avocat à la Cour d'Appel.
CAGNIEUL, préparateur de Botanique à la Faculté des Sciences
CARON, professeur de Mathématiques au Lycée.
CASTET, chef d'institution.
CHADU, professeur de Mathématiques au Lycée.
CHAGNOLEAU, étudiant en médecine.
CHAMBRELENT, O. ✻, inspecteur général des Ponts et Chaussées.
CHASTEL, professeur.
CHASTELLIER, ingénieur des Ponts et Chaussées.
CHATARD, docteur en médecine.
CLAVERIE, professeur de Physique au Lycée.
COLOT, ancien élève de l'École Polytechnique, licencié ès sciences.
COŸNE, professeur à la Faculté de Médecine.
DALMEYDA, licencié ès sciences, professeur au Lycée.
DEBRUN, professeur de Physique au Lycée de Pau.
DELMAS, docteur en médecine, directeur de l'hydrothérapie des Hôpitaux.
DOUMERC, chef des travaux chimiques à la Faculté des Sciences.
DROGUET, ✻, inspecteur des Postes et Télégraphes, à Brest.
DUPETIT, préparateur de la Station agronomique.
DUPUY, professeur de Mathématiques au Lycée.
DU SOUCHET, négociant.
EGGER, maître de conférences de Philosophie à la Faculté des Lettres.
FIGUIER, ✻, agrégé de la Faculté de Médecine.
FORQUIGNON, maître de conférence de Chimie à la Faculté des Sciences.
FOUGEROUX, percepteur des Contributions directes.
FOURNET, ancien fabricant de produits chimiques.
FROIDEFOND, docteur en médecine.
GADEN, négociant, adjoint au maire de Bordeaux.
GAULNE (DE), propriétaire.
GAYON, professeur de Chimie à la Faculté des Sciences, chimiste en chef de la Douane.
GLOTIN, ✻, lieutenant de vaisseau en retraite.
GOUJON, vice-président du Conseil de préfecture de la Gironde.
GUESTIER (Daniel), négociant.
GUILLAUD, professeur à la Faculté de Médecine.
GYOUX, docteur en médecine et en chirurgie, médecin-adjoint des Hôpitaux.
HAILLECOURT, inspecteur d'Académie en retraite.
HAUTREUX, ✻, directeur des mouvements du port de Bordeaux.
HOÜEL, professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences.
HUMBLOT, ✻, professeur de Mathématiques au Lycée en retraite.
HUYARD, fabricant de produits chimiques.
JOLYET, professeur à la Faculté de Médecine.
KOWALSKI, professeur de Mécanique à l'École Saint-Sernin.

MM. LABAT, ingénieur maritime.

LACOLONGE (O. DE), ✱, chef d'escadron d'artillerie en retraite.

LACROIX, professeur de Mathématiques au Lycée.

LAGRANDVAL (DE), ✱, professeur de Mathématiques spéciales au Lycée.

LAGROLET, docteur en médecine.

LANDE, ✱, agrégé de la Faculté de Médecine, médecin adjoint des Hôpitaux.

LARNAUDIE, pharmacien.

LAVAL, professeur à l'École Saint-Sernin.

LAVERGNE (comte DE), ✱, propriétaire.

LAW, propriétaire de l'Hôtel de Nantes.

LEFOUR, agrégé de la Faculté de médecine,

LESPIAULT, ✱, professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences, membre à vie.

LOQUIN, secrétaire général de la Société musicale de Sainte-Cécile.

MERGET, ✱, professeur de Physique à la Faculté de Médecine.

MÉTADIER (Ad.), licencié ès sciences naturelles, docteur en médecine.

MICÉ, professeur à la Faculté de Médecine.

MILLARDET, professeur de Botanique à la Faculté des Sciences.

MONDIET, professeur de Mathématiques au Lycée.

MORISOT, professeur de Physique au Lycée.

PÉREZ, professeur de Zoologie à la Faculté des Sciences.

PÉRIER, pharmacien, agrégé de la Faculté de Médecine.

PERRENS, pharmacien, agrégé de la Faculté de Médecine.

PERRIN, ingénieur des Ponts et Chaussées.

PICARD, botaniste, ancien professeur en congé.

POTOCKI, licencié ès sciences, conducteur des Ponts et Chaussées.

PRAT, pharmacien-chimiste.

RAGAIN, licencié ès sciences, conducteur des Ponts et Chaussées.

RAULIN, ✱, chevalier de l'Ordre du Sauveur de Grèce, professeur de Géologie à la Faculté des Sciences.

RAVAYRE-RAVER, ancien capitaine au long cours.

RAYET (G.), ✱, professeur à la Faculté des Sciences, directeur de l'Observatoire.

REDON, secrétaire de la Société musicale de Sainte-Cécile.

ROYER, licencié ès sciences, chef d'institution.

ROZIER, professeur de Sciences.

SALTEL, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Lille.

SCHRADER (Ferd.), ancien négociant.

SCHRADER (Franz), géographe à Paris.

SERRÉ-GUINO, ✱, professeur de Physique à l'École normale supérieure de Sèvres.

SOUS, docteur en médecine.

TANNERY (P.), ingénieur des Manufactures de l'État, au Havre, membre à vie.

TESTUT, agrégé de la Faculté de Médecine.

TRENQUELLÉON (DE BATZ DE), professeur de Mathématiques au Lycée.

VERGELY, professeur à la Faculté de Médecine.

MM. VIAULT, professeur à la Faculté de Médecine.
VOLONTAT (DE), ingénieur des Ponts et Chaussées.

Membres honoraires.

BATTAGLINI (G.), professeur à l'Université de Rome, rédacteur du *Giornale di Matematiche*.

BERT (Paul), membre de l'Institut (Académie des Sciences), professeur à la Faculté des Sciences de Paris.

BONCOMPAGNI (le prince D. Balthazar), à Rome.

DARBOUX (G.), ✻, professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris.

DE TILLY, major d'Artillerie, directeur de l'arsenal d'Anvers.

FORTI (Angelo), ancien professeur de Mathématiques au Lycée de Pise.

FRENET, ✻, professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Lyon, à Périgueux.

KOWALSKI, directeur de l'Observatoire de Kazan.

LINDER, O. ✻, directeur des chemins de fer, à Vienne (Autriche).

RUBINI (R.), professeur de l'Université Royale de Naples, à Brindisi.

SCHMIDT (Fr.), architecte, à Budapest.

WEYR (Em.), professeur à l'Université Impériale de Vienne.

Membres correspondants.

MM. ARDISSONE, professeur de Botanique à l'École Royale supérieure d'Agriculture de Milan.

BOURGET, ✻, recteur de l'Académie d'Aix.

CURTZE (Max.), professeur au Gymnase de Thorn.

ERNST (A.), professeur d'Histoire naturelle à l'Université de Caracas.

GARBIGLIETTI, docteur en médecine, à Turin.

GAUTHIER-VILLARS, O. ✻, ancien élève de l'École Polytechnique, libraire éditeur, à Paris.

GOMES TEIXEIRA, professeur à l'Université de Coimbre.

GRAINDORGE, professeur à l'École des Mines, à Liège.

GÜNTHER (Dr. S.) professeur au Gymnase d'Ansbach.

HAYDEN, géologue du Gouvernement des États-Unis.

IMCHENETSKY, professeur à l'Université de Kharkof.

JEANNEL, O. ✻, ancien pharmacien en chef de l'Hôpital Saint-Martin.

LAISANT, ✻, ancien officier du Génie, député de la Loire-Inférieure.

PONSOT (Mme), propriétaire aux Annereaux, près Libourne.

ROIG Y TORRES (Rafael), directeur de la *Crónica Científica*, à Barcelone

ROUMEGUÈRE, naturaliste, à Toulouse.

TRÉVISAN DE SAINT-LÉON (comte DE), à Milan.

WEYR (Ed.), professeur à l'Université de Prague.

LISTE

Des Établissements scientifiques et des Recueils périodiques avec lesquels la Société des Sciences physiques et naturelles *est en relations d'échange.*

Adelaïde. — Philosophical Society of Adelaide, South Australia.
Alais. — Société scientifique et littéraire d'Alais.
Alger. — Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques.
Amiens. — Société industrielle d'Amiens.
— Société Linnéenne du Nord de la France.
— Société Médicale d'Amiens.
Amsterdam. — Koninklijke Akademie van Wetenschappen.
— Wiskundig Genootschap onder de Zinspreuk: « Een onvermoeide arbeid komt alles te boven. »
Angers. — Académie des Sciences et Belles-Lettres d'Angers.
— Société d'études scientifiques d'Angers.
— Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.
Arbois. — Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois.
Augsbourg. — Naturhistorischer Verein in Augsburg.
Bagnères-de-Bigorre. — Société Ramond.
Bâle. — Naturforschende Gesellschaft in Basel.
Barcelone. — Crónica científica.
Batavia. — Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indië.
— Observatorium te Batavia.
Belfast. — Natural History and Philosophical Society.
Berlin. — Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften.
— Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von *C. Ohrtmann, F. Müller* und *A. Wangerin.*
Berne. — Naturforschende Gesellschaft in Bern.
— Schweizerische Naturforschende Gesellschaft.
Besançon. — Société d'Émulation du département du Doubs.
Béziers. — Société d'étude des Sciences naturelles de Béziers.
Bologne. — Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.
Bonn. — Naturhistorischer Verein der Preussischen Rheinlande und Westfalens.
Bordeaux. — Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Bordeaux.
— Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux.
— Journal de Médecine de Bordeaux.
— Société de Géographie commerciale de Bordeaux.
— Société de Médecine de Bordeaux.
— Société de Pharmacie de Bordeaux.
— Société Linnéenne de Bordeaux.

Boston. — American Academy of Arts and Sciences.
— Boston Society of Natural History.
Brême. — Naturwissenschaftlicher Verein zu Bremen.
Breslau. — Schlesische Gesellschaft für vaterländische Cultur.
Brest. — Société académique.
Brünn. — Naturforschender Verein.
Brunswick. — Verein für Naturwissenschaft zu Braunschweig.
Bruxelles. — Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.
— Observatoire Royal de Bruxelles.
— Société Belge de Microscopie.
— Société Entomologique de Belgique.
— Société Malacologique de Belgique.
Budapest. — Magyar Tudományos Akadémia.
— Kir. Magyar természettudományi Társulat.
— Magyar Kiralyi Földtani Intézet.
Caen. — Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
— Société Linnéenne de Normandie.
Cambridge. (Angl.) — Philosophical Society of Cambridge.
Cambridge. (Mass.) — Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.
Cannes. — Société des Sciences naturelles et historiques, des Lettres et des Beaux-Arts de Cannes et de l'arrondissement de Grasse.
Cassel. — Verein für Naturkunde in Cassel.
Catane. — Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania.
Chemnitz. — Naturwissenschaftliche Gesellschaft zu Chemnitz.
Cherbourg. — Société des Sciences naturelles.
Christiania. — Det Kongelige Norske Universitet.
— Videnskabs-Selskabet i Christiania.
Coimbra. — Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas.
Colmar. — Société d'Histoire naturelle de Colmar.
Copenhague. — Det Kongelige Danske Videnskabernes-Selskab
Cracovie. — Akademia Umiejętnosci w Krakowie.
Danzig. — Naturforschende Gesellschaft.
Dax. — Société de Borda à Dax.
Dijon. — Académie des Sciences, Arts et Belles-Lettres.
Dresde. — Naturwissenschaftliche Gesellschaft Isis in Dresden.
Dublin. — Royal Irish Academy.
— Royal Dublin Society.
— Royal Geological Society of Ireland.
Edimbourg. — Royal Society of Edinburgh.
Elberfeld. — Naturwissenschaftlicher Verein in Elberfeld.
Erlangen. — Physikalisch-medicinische Societät zu Erlangen.
Florence. — Istituto di Studi superiori.
Francfort-sur-le-Mein. — Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft in Francfurt-am-Main.

Fribourg-en-Brisgau. — Naturforschende Gesellschaft zu Freiburg im Brisgau.
Genève. — Société de Physique et d'Histoire naturelle.
Giessen. — Oberhessische Gesellschaft für Natur- und Heilkunde.
Glasgow. — Institution of Engineers in Scotland.
— Philosophical Society of Glasgow.
Goettingue. — K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
Graz. — Akademischer naturwissenschaftlicher Verein in Graz.
Grenoble. — Académie Delphinale.
— Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère.
Halle. — Naturforschende Gesellschaft zu Halle.
— Verein für Erdkunde zu Halle a. S.
— Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle.
Harlem. — Société Hollandaise des Sciences.
— Musée Teyler.
Heidelberg. — Naturhistorisch-medicinischer Verein zu Heidelberg.
Helsingfors. — Finska Vetenskaps-Societeten.
Innsbruck. — Naturwissenschaftlich-medizinischer Verein in Innsbruck.
Kazan. — Université Impériale de Kazan.
Kharkof. — Société mathématique près l'Université Impériale de Kharkof.
Kiel. — Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein.
Königsberg. — Königliche physikalisch-ökonomische Gesellschaft.
Lausanne. — Société Vaudoise des Sciences naturelles.
Le Caire. — Institut Égyptien.
Leide. — Sterrenwacht te Leiden.
— Dierkundige Vereeniging.
Leipzig. — Astronomische Gesellschaft.
— Königlich Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften.
— Naturforschende Gesellschaft zu Leipzig.
Liége. — Fédération des Sociétés d'Horticulture de Belgique.
— Société Géologique de Belgique.
— Société Royale des Sciences de Liége.
Lille. — Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts.
Lisbonne. — Academia Real das Sciencias de Lisboa.
Liverpool. — Literary and Philosophical Society of Liverpool.
Londres. — Royal Society of London.
— Royal Astronomical Society.
— Linnean Society of London.
— London Mathematical Society.
— Royal Microscopical Society.
Lund. — Lunds Universitet.
Luxembourg. — Institut Royal Grand-Ducal.
Lyon. — Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts.
Manchester. — Literary and Philosophical Society of Manchester.

Marseille. — Société scientifique industrielle de Marseille.
Milan. — Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere.
— Società Italiana di Scienze naturali.
— Società Crittogamologica Italiana.
— Gazzetta degli Ospitali.
Modène. — Reale Accademia di Scienze, Littere ed Arti in Modena.
— Società dei Naturalisti in Modena.
Montpellier. — Académie des Sciences et Lettres.
Moscou. — Société Impériale des Naturalistes.
— Société Mathématique de Moscou.
Mulhouse. — Société industrielle de Mulhouse.
Munich. — Königliche Bayerische Akademie der Wissenschaften zu München.
Münster. — Westfalischer Provinzial-Verein für Wissenschaft und Kunst.
Nancy. — Académie de Stanislas.
— Société des Sciences (ancienne Société des Sciences naturelles de Strasbourg).
Naples. — Società Reale di Napoli : Accademia delle Scienze fisiche e matematiche.
— Accademia Pontaniana.
— Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli.
Neuchâtel. — Société des Sciences naturelles.
New Haven. — Connecticut Academy of Arts and Sciences.
New York. — Academy of Sciences of New York.
Nice. — Société des Lettres, Sciences et Arts des Alpes-Maritimes.
Odessa. — Société des Naturalistes de la Nouvelle Russie.
Offenbach. — Offenbacher Verein für Naturkunde.
Osnabrück. — Naturwissenschaftlicher Verein.
Paris. — Académie des Sciences.
— Association Française pour l'avancement des Sciences.
— Association scientifique de France.
— Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.
— Club Alpin Français.
— Conservatoire des Arts et Métiers.
— École Polytechnique.
— Journal de Physique théorique et appliquée, fondé par Ch. d'Almeida.
— Société Chimique de Paris.
— Société d'Anthropologie.
— Société de Biologie.
— Société Mathématique de France.
— Société Philomathique.
Philadelphie. — Academy of Natural Sciences.
— American Philosophical Society, held at Philadelphia for promoting of useful Knowledge.

Pise. — Reale Università di Pisa.
— R. Scuola Normale Superiore di Pisa.
— Società Toscana di Scienze naturali.
Porto. — Sociedade de Instrucção do Porto.
Prague. — Königl. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften.
— Jednota Českých mathematiků.
— K. k. Sternwarte zu Prag.
Presbourg. — Verein für Natur- und Heilkunde zu Presburg.
Privas. — Société des Sciences naturelles et historiques de l'Ardèche.
La Rochelle. — Académie de La Rochelle.
Rome. — Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.
— Reale Accademia dei Lincei.
— Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da *B. Boncompagni.*
Rotterdam. — Bataafsch Genootschap der proefondervindelijke Wijsbegeerte.
Rouen. — Société des Amis des Sciences naturelles.
Saint-Lô. — Société d'Agriculture, d'Archéologie et d'Histoire naturelle du département de la Manche.
Saint-Louis. — Academy of Science.
Saint-Pétersbourg. — Académie Imperiale des Sciences.
— Jardin Impérial de Botanique.
Semur. — Société des Sciences historiques et naturelles de Semur (Côte-d'Or).
Stockholm. — Kongliga Svenska Vetenskaps-Akademien.
— Entomologiska Föreningen i Stockholm.
Stuttgart. — Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg.
Thorn. — Coppernicus-Verein für Wissenschaft und Kunst in Thorn.
Toulouse. — Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres.
— Société d'Histoire naturelle.
— Société des Sciences physiques et naturelles.
— Revue mycologique.
Tours. — Société Médicale du département d'Indre-et-Loire.
Turin. — Reale Accademia delle Scienze di Torino.
Upsal. — Kongl. Vetenskaps-Societeten.
Valenciennes. — Société d'Agriculture, Sciences et Arts.
Venise. — Regio Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.
Vienne. — Kaiserliche Akademie der Wissenschaften.
— Verein zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse.
Washington. — Smithsonian Institution.
— Patent Office.
— Surgeon General Office.
— Department of Agriculture.
— U. S. Geological Survey of Territories.
Wurzbourg. — Physikalisch-medicinische Gesellschaft in Würzburg.
Zurich. — Naturforschende Gesellschaft in Zürich.

STATUTS

DE LA

SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

révisés dans la séance du 10 juin 1880

TITRE Ier. — *Société; son objet.*

ARTICLE PREMIER.

La Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux se propose de contribuer à l'avancement des sciences mathématiques, physiques et naturelles, par l'union des personnes qui s'intéressent au progrès de ces sciences.

Elle a son siège à Bordeaux.

Elle tient des séances consacrées à l'exposition et à la discussion des travaux relatifs aux sciences indiquées ci-dessus.

Elle publie un recueil non périodique des travaux de ses membres sous le titre de ***Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux;*** les livraisons en sont distribuées gratuitement à tous les membres titulaires et honoraires.

Elle s'interdit toute discussion étrangère aux sciences.

TITRE II. — *Des membres de la Société.*

ART. 2.

Le nombre des membres de la Société est illimité.

Elle se compose de membres titulaires, pouvant devenir membres à vie, de membres honoraires et de membres correspondants.

Pour être élu membre titulaire, il faut adresser au Président de la Société une demande par écrit contresignée par deux membres titulaires.

L'élection aura lieu selon les prescriptions du règlement intérieur.

Art. 3.

Les membres titulaires payent un droit d'entrée de *cinq francs* et une cotisation annuelle de *quinze francs*.

Les membres titulaires deviennent membres à vie et sont libérés de toute cotisation moyennant un versement unique de *deux cents francs*. Les sommes versées pour rachat des cotisations sont placées ainsi qu'il est dit en l'article 13, et leur revenu seul pourra être employé aux besoins de la Société.

Art. 4.

Le titre de membre honoraire est conféré comme un hommage de reconnaissance à des savants de la France et de l'étranger, qui se sont intéressés aux travaux de la Société.

Les membres honoraires ont le droit d'assister aux séances de la Société. Ils sont nommés par la Société à la majorité des voix, sur la présentation du Conseil.

Le titre de membre correspondant peut être accordé aux personnes qui présentent à la Société un travail scientifique, imprimé ou manuscrit. Les membres correspondants ont le droit d'assister aux séances de la Société.

Titre III. — *Bureau et Conseil.*

Art. 5.

La Société nomme un Bureau composé de : un président, un vice-président, un secrétaire général, deux secrétaires, un archiviste et un trésorier.

Art. 6.

Le Bureau ne comprend que des membres titulaires, et est nommé à la majorité absolue des voix des membres présents à la séance d'élection.

Le Président préside les séances de la Société et celles du Conseil.

Le Bureau est soumis à une réélection annuelle.

ART. 7.

Le Secrétaire général représente la Société en justice. Les dépenses sont mandatées par lui.

L'Archiviste est chargé de la bibliothèque et des meubles de la Société.

Le Trésorier garde le dépôt des valeurs mobilières.

ART. 8.

La Société est administrée par un Conseil. Le Conseil se compose du Bureau et de douze membres nommés à l'élection; ces derniers sont renouvelés par tiers chaque année.

TITRE IV. — *Assemblées générales.*

ART. 9.

Il y aura chaque année une Assemblée générale dont l'époque sera déterminée par le règlement intérieur.

ART. 10.

Les comptes des recettes et des dépenses sont présentés chaque année au Conseil par le Trésorier, puis communiqués à la Société.

La Société, avant d'en voter l'approbation, désigne au scrutin trois membres étrangers au Conseil, qui en font l'examen et présentent leur rapport à l'Assemblée générale.

TITRE V. — *Des fonds de la Société.*

ART. 11.

Les revenus de la Société se composent des revenus des biens et valeurs de toute nature lui appartenant, des cotisations payées par ses membres, des subventions, dons et legs qu'elle pourra recevoir.

ART. 12.

Les délibérations relatives à l'acceptation des dons et legs, aux acquisitions ou échanges d'immeubles, seront soumises à l'approbation du gouvernement.

Art. 13.

Les excédents de recettes qui ne sont pas indispensables aux besoins ou au développement de la Société, seront placés en fonds publics français, en actions de la Banque de France ou en obligations de chemins de fer français, émises par des Compagnies auxquelles un minimum d'intérêt est garanti par l'État.

Titre VI. — *Dispositions générales.*

Art. 14.

Les présents statuts ne peuvent être modifiés qu'en assemblée générale, sur la proposition du Conseil, à la majorité des deux tiers des membres présents et avec l'autorisation du gouvernement.

Les modifications proposées sont indiquées dans les convocations adressées à tous les membres titulaires de la Société.

Art. 15.

En cas de dissolution de la Société, la dévolution et l'emploi de son avoir, tant mobilier qu'immobilier, font l'objet d'une délibération de la Société. Le Conseil est chargé de la liquidation. L'actif net est appliqué dans l'intérêt du progrès des sciences.

La décision de la Société est soumise à l'approbation du gouvernement.

Art. 16.

Un règlement intérieur, arrêté par le Conseil et approuvé par la Société, déterminera les conditions de détail propres à assurer l'exécution des présents statuts.

Pour copie conforme :

Le Secrétaire général de la Société,

ABRIA.

RÈGLEMENT INTÉRIEUR

DE LA

SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

DE BORDEAUX

Adopté dans la séance du 9 mars 1882.

ARTICLE PREMIER.

Toute demande régulière d'admission comme membre titulaire de la Société devra être communiquée par le Président dans la plus prochaine séance, et il sera statué sur cette demande dans la séance suivante.

Le vote aura lieu au scrutin secret par *oui* ou par *non*.

L'admission sera prononcée si le candidat réunit un nombre de *oui* égal à la majorité absolue des suffrages exprimés.

Les billets blancs ne sont pas comptés comme suffrages exprimés.

ART. 2.

Aucun membre domicilié à Bordeaux ne peut être correspondant.

Les membres titulaires qui quitteront la ville, deviendront correspondants de plein droit, sur leur demande écrite.

ART. 3.

Tout membre titulaire nouveau reçoit un diplôme, signé par le Président, le Secrétaire général et le Trésorier, et portant le sceau de la Société. Ce diplôme lui est remis après acquittement de son droit d'entrée.

Les membres honoraires et correspondants reçoivent également un diplôme, qui leur est adressé avec l'avis de leur admission, mais qui ne donne lieu au paiement d'aucun droit.

ART. 4.

Les élections du Bureau et du Conseil ont lieu dans la première séance de l'année académique.

Les membres du Bureau sont nommés au scrutin individuel, et les membres du Conseil au scrutin de liste.

L'élection a lieu au scrutin secret.

S'il est besoin de trois tours, le dernier est de ballottage, et, dans ce cas, à égalité de voix, le plus âgé l'emporte.

ART. 5.

Le Vice-Président remplace le Président en cas d'empêchement de celui-ci.

En cas d'empêchement du Vice-Président lui-même, la présidence des séances est déférée au doyen d'âge des membres présents.

ART. 6.

Le Secrétaire général est chargé de la correspondance de la Société avec les autres corps savants; il notifie les décisions de la Société aux intéressés; il rédige les procès-verbaux des séances du Conseil, et veille, de concert avec le Président, aux détails d'administration de la Société.

ART. 7.

Les procès-verbaux des séances du Conseil sont transcrits, après leur adoption, sur un registre spécial, et signés par le Président et le Secrétaire général.

ART. 8.

Les Secrétaires adjoints convoquent les membres de la Société aux séances générales dont ils rédigent les procès-verbaux.

ART. 9.

L'Archiviste doit dresser un catalogue, révisé chaque année, des livres, collections et meubles appartenant à la Société.

L'Archiviste remet ses pouvoirs à son successeur dans l'Assemblée générale.

Il est tenu chaque année de présenter un rapport sur l'état des archives à une commission de trois membres nommée par la Société.

ART. 10.

Le Trésorier est chargé d'effectuer les recettes et les dépenses de la Société.

Chaque membre a droit de consulter le registre du Trésorier.

Le Trésorier présente ses comptes à la Société dans la deuxième séance du mois de janvier de chaque année.

Il remet ses pouvoirs à son successeur dans l'Assemblée générale.

ART. 11.

L'Assemblée générale aura lieu dans la première séance du mois de février.

ART. 12.

Le Conseil est convoqué par le Président, d'office ou sur la demande de trois de ses membres, pour examiner toutes les propositions qui sont de sa compétence.

ART. 13.

La Société se réunit tous les quinze jours, depuis le 1er novembre jusqu'au 31 juillet de l'année académique.

Les séances générales ont lieu chaque quinzaine, le jeudi, à quatre heures de l'après-midi, dans une des salles de la Faculté des Sciences.

En cas d'empêchement, la séance est renvoyée au plus prochain jeudi.

Les lettres de convocation sont distribuées aux frais de la Société.

ART. 14.

Les séances ne sont pas publiques. Les membres titulaires, honoraires et correspondants ont seuls le droit d'y assister, sauf l'exception prévue par l'article 15.

ART. 15.

Les personnes étrangères peuvent, par décision spéciale de la Société, être admises à faire des lectures en séance.

ART. 16.

Les procès-verbaux des séances générales de la Société, dans l'intervalle d'une séance à l'autre, sont transcrits, après leur adoption, sur un registre spécial, et signés par le Président et le Secrétaire de service.

ART. 17.

Après la lecture du procès-verbal et les communications du Bureau, les membres de la Société font, dans l'ordre d'inscription, les communications indiquées par l'ordre du jour.

ART. 18.

Les auteurs qui désirent faire insérer au procès-verbal un résumé de leur communication, doivent remettre au Secrétaire, avant la séance suivante, une Note qui sera transcrite sur le Registre.

ART. 19.

La publication des travaux de la Société est confiée à un Comité, nommé par la Société, et présidé par le Secrétaire général.

ART. 20.

Les *Mémoires de la Société* sont imprimés dans le format grand in-8°, et paraissent à époques indéterminées, par fascicules d'étendue variable, composant des volumes de 30 à 35 feuilles d'impression.

Le tirage se fait à trois cent cinquante exemplaires.

ART. 21.

Il est fait chaque année, par les soins des Secrétaires, un *Extrait des Procès-Verbaux* des séances, destiné à être publié, avec une pagination spéciale, en tête des volumes de *Mémoires*.

ART. 22.

La Société ne peut, en principe, prendre aucune délibération relative aux Statuts qu'en présence de la moitié au moins de ses membres résidents.

Si, après deux convocations successives et spéciales, le nombre réglementaire de membres ne pouvait être réuni, la délibération prise dans une troisième séance serait valable, quel que fût le nombre des présents.

ART. 23.

Les *Mémoires de la Société* peuvent être distribués gratuitement aux membres correspondants désignés par une décision spéciale de la Société. Les membres correspondants non désignés pourront acheter le recueil à la moitié du prix fort.

Les *Mémoires* peuvent être échangés contre d'autres publications scientifiques, ou vendus aux personnes étrangères.

Les échanges de publications avec les corps savants ou les rédacteurs de Recueils périodiques sont réglés par une décision du

Bureau, et soumis, dans la plus prochaine séance générale, à l'approbation de la Société.

ART. 24.

Les membres titulaires, honoraires ou correspondants n'ont droit qu'aux volumes publiés depuis leur entrée dans la Société, y compris le volume en cours de publication.

Les auteurs des mémoires publiés dans le Recueil ont droit à un tirage à part gratuit, sans remaniements, de vingt-cinq exemplaires de leurs travaux.

ART. 25.

Pour les Mémoires admis à l'impression, la Société, en règle générale, prend à sa charge les frais de composition et de tirage, déduction faite des frais de corrections d'auteur, des remaniements, des surcharges de composition, des figures dans le texte et hors du texte, ces frais accessoires étant laissés à la charge des auteurs.

Elle peut néanmoins, après délibération du Conseil, prendre à son compte soit une partie, soit la totalité desdits frais accessoires.

ART. 26.

L'Archiviste est chargé des envois. Il doit les effectuer par la voie la plus sûre et la moins coûteuse pour les destinataires.

ART. 27.

Les exemplaires tirés à part devront porter la mention : « Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux.* »

ART. 28.

Les manuscrits déposés au secrétariat de la Société et non publiés ne peuvent être communiqués ou remis qu'aux auteurs ou à leurs représentants autorisés.

Un mémoire en cours d'impression ne peut être retiré par l'auteur sans le consentement de la Société.

ART. 29.

La Société forme une bibliothèque avec les livres acquis par dons ou par échanges.

ART. 30.

Les seuls membres de la Société ont le droit d'emporter les livres hors du local de la Bibliothèque, à l'exception des périodiques en fascicules et des ouvrages en livraisons détachées.

Les prêts doivent être accompagnés d'une inscription sur un registre spécial, signé par l'emprunteur, sous la surveillance de l'Archiviste.

ART. 31.

Aucun prêt ne peut être fait pour une durée supérieure à deux mois.

Au bout de ce temps, le prêt pourra être renouvelé, si dans l'intervalle aucun membre ne demande communication du même ouvrage. L'ouvrage devra être représenté au moment du renouvellement du prêt.

Dans tous les cas, tout livre emprunté devra être rapporté à la Bibliothèque avant le 31 juillet de chaque année.

Aucun prêt ne pourra être fait ou renouvelé pendant les vacances académiques sans l'autorisation expresse du Président.

ART. 32.

Les livres pourront être communiqués sur place aux personnes étrangères à la Société, en présence de l'Archiviste.

ART. 33.

Tout membre qui désirera faire l'acquisition des volumes publiés avant son entrée dans la Société, les paiera à un prix réduit égal à la moitié du prix fort.

Sont exceptés les volumes dont il restera assez peu d'exemplaires disponibles pour qu'ils puissent être considérés comme épuisés.

ART. 34.

Le prix fort des volumes est fixé à raison de 30 centimes environ par feuille.

Pour chaque volume épuisé, le Bureau fixera un tarif spécial.

ART. 35.

Chaque membre titulaire devra payer sa cotisation annuelle avant le 1er avril.

Tout membre élu paie un droit fixe de *cinq francs*, plus les douzièmes de la cotisation annuelle à courir du jour de sa réception jusqu'au 31 décembre suivant.

ART. 36.

Les frais de quittance pour le paiement des cotisations sont à la charge des Sociétaires.

ART. 37.

Tout membre qui aura laissé passer deux années sans payer sa cotisation, après avoir reçu une mise en demeure du Trésorier, sera considéré comme démissionnaire.

Il en sera de même de tout membre résidant qui quittera la ville sans prévenir de son départ, et qui sera resté deux années sans communiquer avec la Société.

ART. 38.

Les dépenses ordinaires et courantes, prévues dans le Règlement sont votées chaque année par la Société, sur l'avis du Conseil. Elles sont effectuées sur les ordres du Président.

Les dépenses qui devront être faites en dehors des prévisions du Règlement seront l'objet d'un vote spécial de la Société, après examen préalable du Conseil.

ART. 39.

Le Règlement intérieur ne pourra être modifié qu'après délibération du Conseil.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1879-80.

Présidence de M. DUPUY.

Séance du 13 novembre 1879. — La Société procède au renouvellement de son Bureau; sont élus :

Président	M. DUPUY.
Vice-Président	M. MILLARDET.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. CAYON et GUILLAUD.
Archiviste	M. HOÜEL.
Trésorier	M. POTOCKI.
Membres du Conseil d'administration.	MM. BAUDRIMONT, GLOTIN, HAUTREUX, LESPIAULT, LOQUIN, MERGET, MICÉ, PÉREZ, RAYET et SERRÉ-GUINO.

— Sur la proposition de M. Lespiault, la Société adopte la modification suivante au Règlement : Au commencement de chaque année, un tiers des membres du Conseil sera renouvelé par voie de tirage au sort; les membres sortants ne seront pas immédiatement rééligibles.

— Sur la proposition de M. le Président, la Société vote la nomination d'un aide-archiviste, dont le choix sera fait ultérieurement.

— M. Saltel présente à la Société ses premières conférences de géométrie générale, faites à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Ces conférences reproduisent sous forme didactique des résultats publiés par l'auteur à des époques assez éloignées dans divers Recueils. La première série contient l'exposition de la méthode de correspondance analytique et deux applications : l'une ayant pour objet de déterminer le nombre des solutions communes à K équations à K inconnues; et l'autre apprenant à trouver le degré d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques. Le travail de M. Saltel est inséré dans le tome IV de la deuxième série des *Mémoires de la Société.*

— M. Hoüel présente une note de M. Darboux *sur deux intégrales elliptiques, qui se présentent sous forme indéterminée.* La note de M. Darboux est insérée dans le tome III de la deuxième série des *Mémoires de la Société.*

— M. Millardet présente à la Société un bouquet d'*agaricus melleus* recueilli au pied d'un abricotier d'une vingtaine d'années. Cet arbre, bien portant jusque vers la fin de l'année passée, a succombé il y a peu de temps par suite du développement de ce parasite. Ses racines sont pourries pour la plupart, et l'on constate facilement, dans leur épaisseur et à leur surface, la présence du *Rhizomorpha fragilis.* La connexion de ce dernier avec l'*agaricus melleus* est facile à établir.

M. Guillaud dit que les châtaigniers meurent dans les Cévennes, sous l'influence d'un champignon qui serait, d'après M. Planchon, le *Rhizomorpha.* On les soigne en mettant au pied de l'arbre un mélange de fumier et de suie.

M. de Lacolonge dit qu'une maladie analogue tue les châtaigniers en Limousin, et M. Baudrimont, en signalant la destruction de la canne à sucre par les champignons, demande quel mode de traitement il conviendrait d'adopter.

M. Millardet pense que M. Planchon n'a pas suffisamment établi la corrélation entre la mort des châtaigniers et le développement du *Rhizomorpha.* Quant au traitement, il rappelle que M. Hartig a réussi à arrêter les progrès du *Rhizomorpha fragilis,* qui exerçait des ravages considérables dans des forêts d'arbres verts, en creusant de larges fossés circulaires autour des points malades.

— M. Millardet rend compte ensuite des résultats que lui ont donnés, pendant la dernière campagne, ses recherches sur l'influence que les organismes parasitaires vivant dans le sol exercent sur la pourriture des nodosités phylloxeriques de la vigne européenne. Il a renoncé aux cultures dans du sable calciné, qui, l'année précédente, ne lui avaient pas donné de résultats suffisants. Cette année, il a eu recours à la terre de jardin préalablement chauffée à une température de 120 à 150°, dans des vases en verre clos de toutes parts, à l'exception d'un petit orifice destiné à l'arrosage et d'un autre par lequel les graines de vignes ont été semées, par où les jeunes plantes ont pu sortir du vase, après leur germination, et qui a servi en outre à introduire le phylloxera. Un de ces vases, scellé depuis le mois d'avril dernier et qui contient un jeune chasselas phylloxeré, de 65 centimètres de long, est ouvert devant la Société, qui peut s'assurer qu'un petit nombre des nombreuses nodosités qu'il porte est pourri ou commence à pourrir. Ainsi que M. Millardet le fait remarquer, cette observation n'est pas absolument concluante; elle ne le serait que s'il pouvait présenter en même temps la contre-épreuve

e cette expérience, c'est-à-dire d'autres plantes placées, du reste, dans des conditions identiques, mais pour lesquelles le sol n'aurait pas été purgé de ses organismes parasitaires. Malheureusement les chasselas qu'il cultivait dans ce but sont morts en septembre, faute d'arrosage.

Néanmoins, il fait remarquer que la différence que présentent les racines de sa plante avec celles des vignes phylloxerées du vignoble est considérable, et donne, sinon toute la certitude désirable, du moins beaucoup de vraisemblance à son opinion, d'après laquelle la pourriture des renflements phylloxeriques est due au parasitisme de divers champignons. En effet, tandis que dans le vignoble, au 1er septembre, on voit à peine un dixième de nodosités qui ne soient pas totalement pourries, ici, au contraire, après cinq mois d'infection, on n'en trouve guère qu'un dixième qui soient détruites ou seulement atteintes par la pourriture, quels que soient du reste leur âge, leur développement et leur grosseur.

Il continuera ses recherches à ce sujet et espère obtenir, l'année prochaine, des résultats décisifs, quelque difficiles et délicates que soient de pareilles observations.

— M. Gayon donne les résultats de ses recherches sur la transformation du sucre cristallisable en sucre interverti dans les fruits au jus. Le travail de M. Gayon est publié dans le tome III de la 2e série des *Mémoires de la Société.*

— M. Azam exprime le désir que la question de la submersion des vignes et celle des pompes nécessaires à cet usage soient traitées devant la Société. M. le Président invite M. de Lacolonge à répondre au désir de M. Azam.

Séance du 27 novembre 1879. — M. Lespiault fait remarquer, à l'occasion de la communication faite par M. Millardet dans la dernière séance, qu'il a vu de nombreuses nodosités intactes sur les vignes phylloxerées de l'Observatoire.

M. Millardet pense que ce fait est exceptionnel et qu'il peut s'expliquer par le peu d'abondance du phylloxera. Les petites radicelles, attaquées tardivement, n'ont pas eu le temps de pourrir.

— M. Sous décrit deux appareils d'optique, le *phakomètre* et l'*optomètre,* et en donne la théorie.

Le *phakomètre* se compose d'une lentille convexe F, de 5 centimètres de foyer ou 20 dioptries. A son foyer antérieur est placée la lentille N, dont on veut connaître la distance focale. En avant de cette lentille N, et à une distance égale au foyer de la lentille F, est fixé un objet O, dont l'image réelle est reçue sur une plaque mobile de verre dépoli, où est gravé le dessin de l'objet O. Quelle que soit la distance focale de la

lentille N, et la distance de la plaque de verre au foyer postérieur de la lentille F, l'image est constamment égale à l'objet.

L'instrument, long de 25 centimètres, est gradué de manière à obtenir une dioptrie de réfraction, de +20 à −20, en passant par ∞, par chaque $2^{mm}5$ de course de la plaque de verre, à partir du foyer postérieur de la lentille F. Pour connaître la distance focale de la lentille N, l'observateur approche ou éloigne la plaque de verre, jusqu'à ce qu'il obtienne la coïncidence de l'image réelle avec le dessin gravé sur la plaque. Le numéro de la lentille N se lit sur la graduation de l'instrument.

L'optomètre n'est autre chose que l'instrument ci-dessus, où le tube contenant l'objet O a été enlevé et où la plaque de verre portant le dessin de cet objet est remplacée soit par une lentille convexe, soit par une plaque de verre où sont gravés des caractères, afin de mesurer l'acuité de la vision. L'instrument n'a plus que 20 centimètres de long. L'œil observé est placé à 13 millimètres de l'extrémité du tube, l'extrémité où, dans le phakomètre, était mise la lentille dont on voulait connaître le foyer.

Si l'on place à l'extrémité du tube une lentille concave, on aura une lunette de Galilée. La lentille concave étant placée au foyer de la lentille F, et ces deux lentilles ayant leurs foyers égaux, la graduation du phakomètre donnera la réfraction de l'œil observé.

Si on ne laisse dans l'instrument que la lentille F, on aura, comme dans le phakomètre, une dioptrie par $2^{mm}5$ de course de la plaque de verre. Le zéro de la graduation sera au foyer de la lentille F.

Si on remplace la plaque de verre par une lentille convexe d'un foyer égal à F, et qu'on fasse fixer un objet éloigné, on aura pour déterminer la réfraction de l'œil observé la même graduation que celle du phakomètre.

— M. Debrun présente à la Société une nouvelle pile capillaire. Cet appareil est un perfectionnement de l'expérience de M. Lippmann, dite expérience de l'entonnoir. L'appareil consiste essentiellement en un tube capillaire conique de 30 centimètres de long, dans lequel on fait couler un chapelet de gouttes alternées d'eau acidulée et de mercure. La première goutte est reliée à un fil de platine, ainsi que la dernière. Lorsque le mercure entre en marche, on constate qu'un courant se produit dans le même sens que le mouvement des globules. Ce courant est, suivant le principe de M. Lippmann, occasionné par la diminution de superficie des globules. Un flacon de Mariotte rempli d'eau acidulée maintient le niveau constant dans l'entonnoir supérieur, et un récipient florentin permet en bas de séparer l'acide du mercure.

Cette pile présente une force électromotrice variable suivant le nombre des globules et allant de 1,4 volt à 1,7 volt, ce qui est environ

7 à 18 fois la force électromotrice produite dans l'expérience de l'entonnoir. Aussi peut-on décomposer l'eau, faire du cuivrage et de l'argenture sans aucune difficulté; il suffit pour cela d'avoir pris soin de remonter le mercure dans l'entonnoir.

Séance du 11 décembre 1879. — M. DE LACOLONGE, répondant au désir exprimé par M. Azam, dans l'avant-dernière séance, rappelle que les pompes et moteurs hydrauliques bien construits rendent aisément 0,60, souvent 0,65 et parfois un peu plus. Le moins fort de ces rendements est satisfaisant, d'autant plus que des machines ayant, à l'origine, fourni davantage, ont été, par la suite, reconnues se tenir dans ces limites. Il arrive même que des moteurs d'un rendement supérieur bien constaté ont aussi, par la nécessité de leur construction, des inconvénients qui font disparaître leur supériorité de rendement. Notre collègue cite plusieurs faits à l'appui de son opinion.

Il constate également par des exemples que le rendement de 0,60 est un énorme progrès réalisé sur ce qui se passait encore dans les premières années de ce siècle, bien que, dès 1777, un auteur trop oublié, le marquis Ducrest, colonel en second du régiment d'Auvergne, ait, dans son *Essai sur les machines hydrauliques*, indiqué un perfectionnement aujourd'hui en usage, et même parlé des pompes centrifuges.

L'idée de la question de M. AZAM lui a été suggérée par la lecture, dans le *Messager agricole du Midi*, 10 juillet 1879, d'un article très bien fait de M. Birouste. Cet ingénieur civil y traite fort nettement la question. C'est là où M. Azam a pris, sur le rouet de M. Delon, des renseignements un peu sommaires, que notre savant collègue a pu compléter depuis, et qu'il a mis gratuitement à la disposition de M. de Lacolonge. Ce dernier donne, à ce sujet, les explications nécessaires; ses appréciations personnelles cadrent avec celles de M. Birouste.

M. DE LACOLONGE rappelle que Redtenbacher, dès 1844, indique l'emploi des turbines comme machines à élever l'eau. Or, le rouet de M. Delon n'est pas autre chose, ou si l'on veut c'est un ventilateur aspirant l'eau.

La première pompe centrifuge, vraiment industrielle, est celle d'Appold, construite par Easton et Amos et exposée à Londres en 1851; elle rendait 0,68. Depuis, l'idée a été exploitée par de nombreux constructeurs, en Angleterre, France, Allemagne, Suède, etc. En France, MM. Newt et Dumont l'ont rendue moins délicate, plus accessible aux eaux troubles, plus rustique en un mot; ils en ont fait l'objet d'une importante industrie. Elle convient parfaitement à la submersion des vignes phylloxerées, près des rivières à marée, et rend de 0,58 à 0,60 dans ses bonnes conditions.

M. DE LACOLONGE cite, depuis 1851, sept auteurs à lui connus, allemands et français, qui ont donné la théorie de la pompe centrifuge; aucun n'est parvenu à faire suffisamment concorder la théorie avec les faits d'observation; cette théorie est donc difficile à établir.

Notre confrère se résume en disant que la meilleure économie à faire consiste à n'employer, pour actionner les pompes, que de très bonnes machines à vapeur, telles que les Compound, qui ne consomment que 1 kil. de houille par force de cheval et par heure.

Il ne croit pas que les loueurs de machines en aient encore fourni de pareilles à leurs clients.

Ceci est encore la preuve de la difficulté avec laquelle les bonnes inventions pénètrent dans l'industrie. Pour que le perfectionnement aux machines à vapeur y prît rang, il a fallu qu'il se couvrît d'un nom anglais. M. Hirn, le promoteur de l'équivalent mécanique de la chaleur, a, dès 1856, dans les *Bulletins de la Société industrielle de Mulhouse,* recommandé l'emploi de la détente, des enveloppes de vapeur, de la surchauffe, de quatre tiroirs, de l'échappement direct à l'air ou en condenseur, ce qui constitue précisément la Compound.

— M. BAYSSELLANCE a vu, à Tonnay-Charente, une machine à vent qui sert à faire monter l'eau, et dont les ailes se dérobent sous l'influence du vent.

M. DE LACOLONGE cite des exemples de moulins à vent de cette sorte qui n'ont pu marcher pendant longtemps.

M. BAYSSELLANCE demande comment varie le rendement de la pompe centrifuge avec la hauteur.

M. DE LACOLONGE répond que les rendements sont bons jusqu'à 15 mètres de hauteur, sans cependant atteindre 60 °/₀.

— M. DEBRUN présente à la Société une modification de l'électromètre à mercure; l'appareil se compose d'un tube capillaire incliné de 10 degrés environ sur l'horizontale et de 100 millimètres de long; ce tube est rempli de mercure et d'eau acidulée et peut être assimilé au tube capillaire droit de l'électromètre de Lipmann. L'avantage d'une pareille disposition est la suppression du microscope; en effet, on constate que, pour une force électromotrice d'un volt, la déviation est d'environ 75 millimètres, ce qui rend l'instrument aussi facile à lire qu'un thermomètre ordinaire. Pour graduer l'instrument, on se sert d'une petite pile formée de mercure, nitrate acide de mercure, charbon; cette pile a très sensiblement une force électromotrice d'un huitième de volt.

On introduit dans le circuit d'abord un élément, puis deux, puis trois et ainsi de suite, de telle façon que l'on peut construire une courbe représentant les déviations de l'électromètre pour une différence de potentiel donnée. L'examen de cette courbe permet de constater qu'elle

se confond sensiblement avec une ligne droite de — 2 éléments (mercure-charbon) à + 4 (MC), puis elle s'infléchit de plus en plus, au point de devenir asymptotique pour — 4 (MC) et pour + 9 (MC), ce qui montre que l'on devra toujours, quand ce sera possible, se servir de l'électromètre de — 2 MC à + 4 MC, d'autant plus que c'est dans ce cas que la sensibilité est maxima.

M. Debrun présente ensuite un *thermomètre électro-capillaire* composé d'un tube conique qui termine un réservoir de thermomètre rempli d'eau acidulée ; dans le tube est un chapelet capillaire de gouttes de mercure et eau acidulée. Le principe de l'appareil est le même que celui de la pile capillaire que M. Debrun a présentée à la Société dans la séance précédente ; comme dans la pile capillaire, un fil de platine prend la polarité du premier et du dernier globule. Lorsque l'eau acidulée se dilate, elle pousse les globules et occasionne un courant ; ce courant est recueilli avec un électromètre de Lipmann qui en mesure l'intensité. On comprend très bien qu'à une variation de température donnée correspond un courant d'une intensité donnée ; l'appareil est gradué empiriquement par comparaison ; il ne reste plus qu'à faire une table portant d'un côté la température, de l'autre la graduation correspondante de l'électromètre. Un point à remarquer, c'est que l'appareil devant être parfaitement isolé doit être entièrement immergé dans l'huile de pétrole rectifiée.

Les avantages de cet instrument sont les suivants : l'appareil peut être placé dans un lieu inaccessible ; il fonctionne sans pile ; sa sensibilité est très grande.

— M. Dannecy fait connaître une modification au générateur d'hydrogène, dans l'appareil de Marsch. (Voir le tome IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*)

— M. Merget a obtenu de très belles photographies en exposant à la lumière du papier très sec au chlorure de palladium et au perchlorure de fer. Sous l'influence de la lumière, il se forme du protochlorure de fer ; si l'on plonge ensuite le papier dans l'eau, le chlorure de palladium est réduit, et le papier noircit immédiatement en tous les points frappés par les rayons lumineux. Un lavage à l'eau acidulée fixe l'épreuve. M. Merget met à la disposition des membres de la Société un grand nombre des épreuves qu'il a ainsi obtenues.

Séance du 8 janvier 1880. — MM. Coyne et Perrin sont élus membres titulaires.

— M. de Lacolonge décrit le compteur à alcool de MM. Siemens et Halske.

— M. Merget expose ses recherches sur l'emploi des sels de

palladium et de fer en physiologie végétale. L'évaporation de l'eau par les feuilles des plantes a été l'objet d'une longue discussion, depuis Guettard au siècle dernier, jusqu'à M. Boussingault et aux physiologistes actuels. On a attribué alternativement à chaque face des feuilles un pouvoir évaporant plus considérable. M. Merget a trouvé que dans les feuilles vertes ordinaires, l'intensité de l'évaporation est en rapport avec la distribution des stomates. Il y a trois types de feuilles : 1° celles qui n'ont de stomates que sur leur face inférieure; 2° celles qui n'ont de stomates que sur leur face supérieure; 3° celles qui en ont sur leurs deux faces. Si on applique un papier lavé au chlorure de cobalt, et qui est bleu, lorsqu'il est bien sec, sur les deux faces d'une feuille tenant à sa tige, ce papier est rapidement ramené au rose par l'humidité de la face munie de stomates. Le papier reste assez longtemps bleu du côté qui en est dépourvu. Cette expérience, très sensible et très facile à faire, n'a qu'un inconvénient, celui de ne pouvoir en conserver les résultats, tout le papier passant du bleu au rose et du rose au bleu, suivant l'humidité ambiante. L'emploi des sels de palladium, tel qu'il a été indiqué dans la dernière séance, permet de fixer l'empreinte de la surface évaporante. Un papier au chlorure de palladium et protochlorure de fer est comme précédemment appliqué sur les deux faces d'une feuille en état d'évaporation. L'humidité réduit le mélange et donne une empreinte du côté où elle se produit; on fixe cette empreinte en trempant le papier dans une solution d'eau acidulée. M. Merget a reconnu que les feuilles panachées de blanc ne donnent pas d'empreinte vis-à-vis des panachures, et que par conséquent elles n'évaporent pas dans ces places, malgré la présence de stomates normaux. La cause de ce fait est encore à chercher.

— M. Meyer présente à la Société le *vasomètre* construit par M. Bouquet de La Grye.

— M. Huyard expose le modèle d'un nouveau four de son invention, destiné à fabriquer le noir animal et à condenser tous les produits utiles qui se dégagent pendant la calcination.

Après avoir donné quelques détails sur la préparation des os, la fabrication du suif, du noir, du goudron, du sulfate d'ammoniaque et l'utilisation des gaz combustibles, M. Huyard fait passer sous les yeux des membres de la Société divers échantillons des matières fabriquées par lui dans son usine.

Le mémoire de M. Huyard est inséré dans le tome IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.

Séance du 22 janvier 1880. — M. Goujon est élu membre titulaire.

— M. Hoüel dépose un mémoire de M. Gomez Teixeira sur les principes du calcul infinitésimal. Ce travail est inséré dans le tome IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*

— M. Lespiault donne lecture d'un mémoire de M. Imchenetsky, qui sera publié dans le tome IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*

— MM. Gomez Teixeira et Imchenetsky sont élus membres correspondants.

— M. Lespiault appelle l'attention de la Société sur le temps tout à fait exceptionnel qui caractérise si nettement l'hiver de 1879-1880, non seulement à Bordeaux, mais encore en France et en Europe.

Les traits généraux sont connus de tous: sècheresse à peu près absolue se prolongeant pendant deux ou trois mois; ciel habituellement sans nuages; brouillards fréquents; température très basse; froids dépassant sur quelques points tous les degrés connus; plusieurs dégels sans pluie suivis d'une reprise du froid.

Si en présence de cet état exceptionnel de l'atmosphère, on examine les cartes publiées quotidiennement par le bureau météorologique, on reconnaît, dans la disposition générale des courbes de pression et des courbes de température, un caractère général et remarquable qui mérite au plus haut degré d'attirer l'attention des météorologistes.

En ce qui concerne d'abord les courbes isobares, elles forment, pendant plus de deux mois, sur l'Europe entière, un puissant anticyclone d'une hauteur et d'une stabilité prodigieuse.

Que faut-il entendre d'abord par anticyclone? Le nom est relativement récent et c'est seulement depuis quelques années qu'il prend droit de cité dans la science. Le phénomène cependant a une grande netteté et c'est justement sur les caractères très bien dessinés de ce phénomène que M. Lespiault attire particulièrement l'attention de ses collègues.

On sait qu'un cyclone est formé sur les cartes d'une série de courbes isobares, fermées, concentriques, marquant des pressions décroissantes de la circonférence au centre. Quelques météorologistes distinguent différentes classes de cyclones suivant la profondeur de l'entonnoir qu'ils forment dans l'atmosphère. Un cyclone tourne invariablement de droite à gauche dans notre hémisphère; à l'inspection seule de la carte qui le représente, on sait quel est l'état atmosphérique en chacun de ses points et l'examen attentif des cyclones est jusqu'ici à peu près la seule base des prédictions quotidiennes des Observatoires.

Un anticyclone est au contraire formé de courbes sur lesquelles les pressions vont en s'élevant de la circonférence au centre. C'est une *montagne* d'air, au lieu d'un *entonnoir*. On pourrait les diviser en plusieurs classes d'après leur hauteur. — Quelques météorologistes ont attribué aux anticyclones un mouvement de rotation de gauche à droite;

mais ce mouvement n'a lieu que sur les bords, il n'est qu'apparent et dû aux cyclones qui roulent habituellement sur le pourtour extérieur des anticyclones.

Ce qui résulte avec évidence de l'inspection des cartes de cet hiver, ce qui donnera probablement une grande importance, pour les progrès de la météorologie, aux phénomènes qui se sont produits pendant cette période, c'est qu'ils ont mis en évidence le caractère de stabilité extraordinaire des anticyclones, la difficulté avec laquelle ils arrivent à la longue à se déformer et à disparaître, la tendance étonnante qu'ils ont à revenir sur les mêmes lieux, non seulement durant des semaines, mais durant des mois entiers. On peut espérer, d'après ces caractères, qu'une étude suivie de ces phénomènes permettra un jour de les faire servir aux prédictions à long terme, comme les cyclones servent aujourd'hui aux prédictions à courte échéance.

Déjà, à plusieurs reprises, dans les années précédentes, l'examen attentif des cartes du temps a permis de reconnaître des périodes de trois à six semaines pendant lesquelles l'Europe s'est trouvée soumise à un régime très stable de hautes pressions, constituant des anticyclones nettement dessinés. Il est facile de s'assurer que ces périodes ont été caractérisées par un beau temps persistant et par des températures relativement basses; mais jamais peut-être les traits remarquables qui les distinguent n'avaient été aussi nets que pendant l'hiver 1879-80. Dès le milieu du mois de novembre, les hautes pressions tendent à s'établir sur l'ouest et le centre de l'Europe. Elles sont refoulées de temps à autre par des bourrasques, mais jamais hors de vue, et elles reviennent invariablement, au bout de deux ou trois jours, plus marquées chaque fois, dessinées par des courbes isobares de plus en plus régulières et se formant toujours plus nettement en anticyclone.

Dès le 9 décembre, cet anticyclone est parfaitement formé. Il se maintient presque invariable jusqu'au 26, avec des pressions qui montent, de 760 à la base jusqu'à 785 au sommet.

Pendant cette période, il oscille légèrement du sud au nord, de l'est à l'ouest, mais conservant assez bien sa forme et sa position générale pour qu'en chaque lieu la pression reste à peu près constante.

Le 28 décembre, à un moment où il vient de s'allonger vers le nord plus qu'il ne l'avait fait jusqu'alors, il se trouve tout d'un coup exposé aux assauts d'une puissante bourrasque arrivant de l'ouest. Il semble alors qu'il va être coupé en deux ; mais point. Il se replie sur lui-même, sa frontière nord s'aplatit et s'étend de l'ouest à l'est en longues isobares parallèles, tandis que le corps tout entier est refoulé vers le sud. — C'est à ce moment qu'a lieu un premier dégel, bientôt suivi d'une vive reprise du froid. L'anticyclone reprend en effet sa position primitive

dès les premiers jours de janvier et persiste, avec quelques intermittences, jusqu'au 7 février. Ce jour-là, il est repoussé sur l'Asie par une bourrasque d'une extrême énergie, et ce que l'on appelle le courant équatorial s'établit pour quelques semaines sur nos régions.

Parmi les réformes heureuses introduites par le bureau météorologique dans les anciennes cartes synoptiques de l'Observatoire, la plus importante peut-être est la publication quotidienne d'une carte des températures, en regard de la carte des pressions. Pendant la période qui nous occupe, cette carte offre autant d'intérêt que la première. Elle en est en effet comme le décalque, en ce sens que sur toute l'étendue de l'Europe le froid est en raison de la hauteur du baromètre; il en résulte que les courbes des basses températures correspondent partout aux courbes des hautes pressions et forment, en face de l'anticyclone, comme une montagne d'air froid dont le sommet répond à peu près au maximum des pressions barométriques. Il faut signaler cependant cette différence qu'il n'y a en général qu'un maximum de pression, errant sur l'Europe centrale, tandis qu'on aperçoit le plus souvent deux centres distincts de froid, l'un vers le nord-est de la France ou le sud-ouest de l'Allemagne, l'autre du côté de la Pologne ou de la Transylvanie.

Au reste, l'étude de la marche des températures dans tout l'intérieur de cet anticyclone offre par elle-même un vif intérêt, et il est bon de s'y arrêter un instant.

Dès le 1er décembre, on signale à Wologda, à environ 100 lieues au nord-est de Moscou, un froid de 34°, excessif pour la saison : vers cette région, les lignes isothermes se serrent les unes contre les autres, et laissent deviner en dehors de la carte, des montagnes d'air glacial prêt à se précipiter sur l'Europe. En effet, presque immédiatement, le froid atteint 14° à Charleville, et le lendemain à Paris. Pendant tout le mois, la température se maintient très basse, du moins sur le continent; car l'influence du voisinage de la mer est, dans les circonstances présentes, extrêmement considérable, et le *gradient* est exceptionnellement rapide entre Paris et Cherbourg. Le 11 décembre, à une heure du matin, le thermomètre du parc de Saint-Maur descend au chiffre jusque-là inconnu de — 25°6. Il est vrai que ce froid excessif est de très courte durée. Dès dix heures du matin, on voit le thermomètre remonter à — 17°. On peut remarquer à ce propos que cette température de — 25°6, est la plus basse qui ait jamais été *mesurée* à Paris, mais cela tient peut-être à l'imperfection des thermomètres du dernier siècle, ainsi qu'à cette circonstance que ces froids exceptionnels ne durent guère que quelques heures et peuvent échapper à des physiciens qui n'observent que deux ou trois fois par jour à intervalles réguliers. La comparaison des chiffres constatés à Paris, dans des circonstances identiques, au mois de décembre 1870

d'une part, et de l'autre dans les hivers rigoureux de la fin du siècle dernier, tend à faire supposer que, pendant ces hivers, un froid pareil a pu se produire sans être régulièrement constaté.

Dans l'est de la France, le froid est encore plus excessif, et dépasse à plusieurs reprises 30° dans les Ardennes ou dans le Jura. L'ouest est plus favorisé. A Bordeaux, le minimum de nuit n'est jamais descendu au dessous de — 12°. Pendant la journée, le ciel est généralement découvert et le thermomètre remonte au-dessus de zéro. L'air est très calme et la marche de la température tellement régulière qu'il y a des périodes de jours pendant lesquelles le thermomètre pourrait presque servir d'horloge : 7 à 8 degrés de froid pendant la nuit, — 5° à 8 heures du matin, + 1° à midi, — 2° vers 6 heures du soir.

Il y a d'autres particularités remarquables à signaler. Tandis que dans l'intérieur de l'anticyclone le froid atteint un degré exceptionnel, sur le pourtour incessamment parcouru par des bourrasques venant de l'ouest, chargées d'humidité et de chaleur, la température se maintient à des hauteurs tout aussi exceptionnelles. Sur le nord de la Norvège, en particulier, c'est à peine si le thermomètre s'abaisse à deux ou trois reprises jusqu'à 0°. On le voit même, dès 8 heures du matin, s'élever jusqu'à 11°, tandis qu'il descend en même temps à Paris jusqu'à — 20° et au-dessous. La ligne de 0°, qui forme le contour extérieur de l'anticyclone des températures, comme la ligne de 760 millimètres forme le contour extérieur de l'anticyclone des pressions, subit des mouvements correspondants et presque parallèles. Pendant toute cette période, la partie boréale de cette ligne se maintient presque constamment sur le nord de l'Europe, allant des côtes ouest de Norvège à Saint-Pétersbourg, avec cette curieuse circonstance que le thermomètre est au-dessus de glace au nord de cette ligne, tandis qu'il s'abaisse rapidement à mesure qu'on descend vers le sud.

Autre singularité qu'on était loin de soupçonner avant la construction des observatoires de montagnes, tels que celui du Puy-de-Dôme ou du Pic-du-Midi : Pendant la période des grands froids, le thermomètre, au haut du Puy-de-Dôme, reste assez régulièrement à 12 ou 14 degrés *plus élevé* qu'à Clermont. A cette hauteur, le vent souffle assez régulièrement de l'Ouest, tandis que le vent de plaine vient de l'Est ou du Nord. On peut donc se représenter l'anticyclone comme formé d'une masse lenticulaire d'air très froid, occupant toute la partie inférieure de l'atmosphère, et se maintenant presque immobile, pendant les deux mois qui viennent de s'écouler, au-dessus de l'Europe ou du bassin méditerranéen.

Toutes les fois qu'un tel état atmosphérique s'établit nettement, on peut être assuré d'une longue période de temps très beau et très sec.

S'il devient possible un jour de suivre sur des cartes plus étendues que celles que nous avons aujourd'hui, les mouvements de ces anticyclones, on arrivera à en déduire des prédictions du temps à long terme.

La forme lenticulaire de l'anticyclone explique la rapidité des dégels; car il suffit, pour les produire, d'un renversement des courants opposés qui se partagent la hauteur de l'atmosphère.

M. Lespiault termine sa communication en la rapprochant des idées générales que M. de Tastes a développées dans une conférence très remarquée qu'il a faite, à l'époque de l'Exposition universelle, au Congrès international de météorologie. Dans cette conférence, M. de Tastes regarde les cyclones comme un phénomène relativement secondaire, comme des bouées qui servent à indiquer la route suivie par le courant chaud et humide qui circule constamment autour d'un immense anticyclone couvrant généralement le continent africain, de la Méditerranée aux tropiques, et les latitudes correspondantes de l'Océan Atlantique. La théoric de M. de Tastes approche probablement beaucoup de la vérité; mais elle n'en est pas l'expression absolue. Si l'on se reporte en particulier aux phénomènes qu'a présentés l'hiver actuel, on reconnaît que l'anticyclone dont ils dépendent est trop peu étendu et se tient beaucoup trop au nord pour former, comme le suppose M. de Tastes, la limite boréale des alisés.

Enfin, en ce qui concerne les prédictions envoyées d'Amérique, il est facile de reconnaître qu'elles se vérifient assez généralement pour les pays qui se trouvent sur la ligne de parcours des bourrasques, mais non pour les autres, ce qui fait que, pour un pays donné tel que la France, les annonces semblent périodiquement, tantôt justes, tantôt inexactes.

— M. Rayet montre à la Société des photographies solaires, obtenues par M. Jaussen, qui montrent des granulations disposées en réseaux, et cela d'une façon constante, si ces photographies sont obtenues rapidement et par un temps très clair.

Séance du 5 février 1880. — M. Gayon donne de nouvelles preuves que la transformation du sucre cristallisable en glucose dans les sucres bruts de canne est un véritable phénomène de fermentation :

1° Tous les sucres bruts de canne renferment des cellules organisées, rares dans les sucres blancs, abondants dans les sucres colorés et humides; leur nombre augmente, ainsi que la quantité de glucose formée par l'action de la chaleur et de l'humidité ;

2° On peut extraire des sucres très altérés du ferment inversif; il suffit pour cela de précipiter leur dissolution aqueuse par un volume double ou simple d'alcool ordinaire ;

3° Le glucose des sucres bruts est inactif sur la lumière polarisée,

tant que sa proportion ne dépasse pas 12 à 15 pour cent; au delà, il produit une rotation gauche, croissant avec la richesse du sucre en sucre réducteur;

4° Lorsqu'on intervertit du sucre soit par la chaleur, soit par les acides, soit par la levure de bière, on observe les mêmes faits, c'est-à-dire que la production du glucose inactif précède la formation du sucre interverti véritable;

5° On peut dès lors admettre que le sucre cristallisable des bruts se transforme en glucose sous l'action du ferment inversif sécrété par les organismes microscopiques qui existent dans tous les échantillons.

— M. Jolyet communique, au nom de M. Laffont et au sien, des résultats d'expériences sur les nerfs vaso-dilatateurs céphaliques. Jusqu'à leurs expériences, les seuls nerfs dilatateurs céphaliques connus étaient les nerfs contenus dans la corde du tympan (Cl. Bernard et Vulpian) et le nerf glosso-pharyngien (Vulpian). Ils montrent qu'il existe dans le nerf maxillaire supérieur des filets vaso-dilatateurs pour les muqueuses nasale, labiale et gingivale supérieures; et dans le nerf buccal, branche du nerf maxillaire inférieur, des filets dilatateurs pour la muqueuse labiale et gingivale inférieure et la joue. L'excitation du bout périphérique de ces nerfs amène la congestion et la rougeur des parties indiquées, en même temps que l'élévation de la température de ces parties. On constate de plus dans ces nerfs des filets sécréteurs pour les glandules nasales (maxillaire supérieur), pour la glande de Nuck, et les glandules disséminées le long de l'arcade alvéolaire inférieure (nerf buccal).

Séance du 19 février 1880. — M. Hayden est élu membre correspondant.

— M. Royer envoie les observations suivantes : M. Merget ayant entretenu la Société, dans une séance précédente, de la tension considérable des vapeurs de mercure et de leur facilité surprenante à se diffuser dans l'air, M. Royer a pensé que les vapeurs mercurielles pourraient aussi, avec moins de facilité sans doute que dans les gaz, se diffuser dans les liquides et les traverser. Il a cherché à vérifier expérimentalement cette hypothèse due à des considérations sur la constitution physique des liquides, sur la force d'adhérence des molécules hétérogènes, sur les phénomènes de capillarité et aussi sur la force d'expansion des vapeurs mercurielles. Il semble jusqu'à présent résulter d'expériences faites avec soin, que M. Royer a montrées à quelques-uns de ses collègues et qu'il soumettra bientôt à l'appréciation et à la discussion des membres de la Société, que les liquides sur lesquels il a expérimenté sont tous, sans exception, traversés avec plus

ou moins de facilité par les vapeurs mercurielles, sous des épaisseurs assez considérables et qui peuvent varier selon la durée de l'expérience.

— M. Hautreux communique des observations de températures de la mer, desquelles il résulte que pendant la période des grands froids de décembre 1879 et janvier 1880, on a trouvé la température de la mer :

au cap Finistère (Espagne)	de 13° à 12°,
au cap Breton (France)	de 12° à 10°,
à Cordouan	de 7°5 à 6°5,
à Royan	de 2° à 5°,
à Bordeaux	de 0°

Les considérations déduites des courants montrent que les eaux du fleuve, dans l'estuaire, ne se mêlent que très difficilement avec celles de l'Océan; ces eaux semblent tourbillonner en dedans de la limite des bancs et font leur évolution dans des lits de courants distincts.

Des faits analogues se sont produits à Arcachon où la température de la mer a oscillé entre 0° et + 3°; bien que les deux tiers de la masse des eaux du Bassin sortent de la rade et soient pendant six heures au moins en contact avec les eaux océaniques, le mélange des eaux ne se fait que difficilement s'il n'est favorisé par les vents du large. Ici encore les eaux du jusant paraissent tourbillonner sur les bancs et rentrer avec le flot.

Les marées, en renversant les courants, détruisent la force vive d'écoulement des fleuves, et ne permettent pas à leurs eaux de conserver une action qui s'étende loin du rivage.

— M. Badal communique à la Société un travail intitulé : *Influence du diamètre de la pupille et des cercles de diffusion sur l'acuité visuelle.*

Après avoir indiqué les différentes causes d'aberration de la lumière dans l'œil, M. Badal rappelle que les cercles de diffusion les plus nuisibles, au point de vue de la netteté de la vision, sont ceux résultant de ce que dans l'œil inexactement *accommodé* pour le point de fixation, le foyer des rayons lumineux tombe en avant ou en arrière de la rétine, en considérant ces rayons comme appartenant à la partie moyenne du spectre.

Les troubles visuels seront d'autant plus prononcés, — on peut le concevoir *a priori*, — que les images rétiniennes seront plus petites et la pupille plus large, partant les cercles de diffusion plus grands.

Afin d'apprécier rigoureusement le rôle de chacun de ces facteurs, l'auteur établit tout d'abord, par le calcul, les formules qui donnent la grandeur des images et celle des cercles de diffusion dans les yeux emmétropes, myopes et hypermétropes, étant connus : 1° le diamètre de l'objet dont l'image va se former sur la rétine; 2° la distance de cet objet à l'œil; 3° l'état de la réfraction exprimé en dioptries; 4° le diamètre de la pupille; puis, à l'aide de nouvelles formules, déduites des pre-

mières, il montre suivant quels rapports croissent ou décroissent les images rétiniennes et les cercles de diffusion, dans un même œil, alors que l'objet s'en rapproche ou au contraire s'en éloigne.

Dans la seconde partie de son travail, M. Badal étudie « quelles sont les limites à la faculté de distinguer l'une de l'autre des images rétiniennes ».

Cela fait, l'auteur aborde l'étude de la vision diffuse dans les différents yeux (emmétropie, myopie et hypermétropie axiles ou par anomalie du système réfringent, aphakie), suivant que le pouvoir d'accommodation fait entièrement défaut ou est seulement en déficit.

Le travail de M. Badal est inséré dans le tome IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*

Séance du 4 mars 1880. — M. Hautreux ajoute quelques détails à la communication qu'il a faite dans la dernière séance sur la température de la mer. A Cordouan, le minimum de température a été atteint le 25 octobre; dans le grand chenal du Sud, au contraire, ce minimum a été observé en janvier.

M. Gayon donne de nouvelles preuves que, dans certaines conditions, le glucose inactif des sucres bruts peut être dédoublé en glucose ordinaire et lévulose, de façon à constituer du sucre interverti proprement dit.

Un sucre brut de canne, turbiné à l'alcool, a produit un sirop composé de :

Sucre réducteur................	36,29 °/。
Sucre cristallisable............	28,76

Ce sirop a donné :

Rotation calculée	28,76
— observée..............	14,40
Différence......	14,36

Le même sucre, turbiné à l'eau, a produit un sirop composé de :

Sucre réducteur	11,10
Sucre cristallisable	38,13

et sur la lumière polarisée, on a obtenu :

Rotation calculée...............	38,13
— observée..............	38,70
Différence......	0,57

Ainsi, dans le premier cas, le sucre réducteur agit comme le sucre

interverti sur la lumière polarisée, tandis que dans le second cas, il se montre tout à fait inactif.

— M. Gayon annonce ensuite que les sucres de betterave, qui n'ont pas d'ordinaire de glucose, peuvent en acquérir s'ils servent de substratum à des moisissures. Ainsi, sur dix échantillons analysés en mai 1877, et dans lesquels on n'avait trouvé ni glucose ni organismes microscopiques, cinq ont présenté des moisissures en octobre 1879; les cinq autres sont restés purs. Ces derniers n'avaient pas de sucre réducteur, tandis que les premiers ont donné :

N° 1.............	4,97 °/₀ de glucose.
2.............	7,87
3.............	12,12
4.............	1,05
5.............	3,28

On peut conclure de ce fait que les sucres bruts de betterave ne renferment pas en général de sucre réducteur, parce qu'ils ne contiennent pas, comme les sucres bruts de canne, des organismes microscopiques capables d'intervertir le saccharose.

— M. Coÿne appelle l'attention sur une zone de la membrane du tympan qui présente un mode d'insertion différent du reste de la membrane et qui est moins tendue; elle a une forme triangulaire à base arrondie et pour sommet l'apophyse grosse et courte du manche du marteau. Cette formation est en rapport avec le mode de développement de la membrane du tympan, et est un vestige de l'état embryonnaire.

Séance du 18 mars 1880. — M. Egger est élu membre titulaire.

Séance du 15 avril 1880. — M. Gayon résume quelques-unes de ses observations sur l'endosmose :

1° Si l'on fait un endosmomètre avec la membrane de la coque d'un œuf de poule, et qu'on place de l'eau sucrée à l'intérieur, de l'eau distillée à l'extérieur, l'ascension est rapide dans le tube de l'appareil. En renversant la membrane, l'ascension est nulle;

2° Le phénomène est le même avec l'alcool et avec le carbonate de potasse;

3° Avec les tartrates droit et gauche d'ammoniaque, la membrane étant dans sa position normale, on observe que le sel droit s'élève toujours plus que le sel gauche;

4° La membrane de la coque qui, retournée, n'est pas endosmotique, le devient, si on la teint en la plongeant successivement dans des dissolutions de persel de fer et de cyanoferrure de potassium;

5° On modifie le pouvoir endosmotique d'une membrane (vessie

ou baudruche) en recouvrant l'une de ses faces d'une couche de plâtre, et enlevant celui-ci après solidification. Si l'on dispose deux endosmomètres, l'un avec la face plâtrée à l'extérieur, l'autre avec la face plâtrée à l'intérieur, le premier donne une ascension plus grande que le second, toutes choses égales d'ailleurs;

6° La pellicule d'un grain de raisin, la peau d'une pêche, donnent des résultats analogues à ceux de la membrane de la coque et à ceux des membranes plâtrées.

— M. Gayon signale ensuite quelques faits d'endosmose relatifs aux ferments solubles :

1° Pour un même ferment, le ferment glucosique par exemple, les membranes se divisent en deux catégories : les unes, membrane de la coque, parchemin, se laissent traverser par le ferment soluble; les autres, vessie, baudruche, papier parchemin et collodion, sont imperméables;

2° Pour une même membrane, les ferments solubles se divisent en deux catégories : ainsi, tandis que la vessie, la baudruche, le papier parchemin sont imperméables au ferment glucosique, ils se laissent traverser par l'émulsine; celle-ci traverse également la membrane de la coque et le parchemin, mais elle est arrêtée par le collodion.

Ces résultats peuvent avoir quelque importance en physiologie. M. Gayon en tire une objection possible à la théorie de l'influence exclusive des ferments organisés dans l'acte de la fermentation. Toutes les expériences faites jusqu'ici ont montré qu'on ne pouvait pas isoler de la levûre de bière un ferment alcoolique soluble, tandis qu'on en sépare aisément un ferment glucosique soluble. Ces deux ferments pourraient exister ensemble dans l'intérieur des cellules de levûre, mais le dernier seulement serait capable d'en traverser la membrane, le premier y restant emprisonné. Si cela était, on ne détruirait complètement la théorie des ferments solubles qu'en démontrant que l'intérieur même des globules de levûre, et non le liquide où ils vivent, est dépourvu de ferment alcoolique soluble.

— M. Royer continue l'exposé de ses recherches sur la diffusion des vapeurs de mercure dans les liquides.

Séance du 29 avril 1880. — M. Merget démontre que les vapeurs mercurielles agissent toxiquement sur les végétaux et sur les animaux.

Le végétal en expérience, recouvert par une cloche en verre bitubulée, où l'air peut librement circuler, est placé entre deux

plaques verticales de cuivre amalgamées, qui émettent assez de vapeurs pour maintenir l'atmosphère inférieure de la cloche à un état constant de saturation; comme on peut s'en assurer par l'emploi du papier réactif à l'azotate d'argent ammoniacal.

Dans ces conditions, après un intervalle de temps qui peut varier de quelques heures à plusieurs jours, les feuilles noircissent et tombent sans que les autres organes paraissent visiblement atteints, et les bourgeons en particulier continuent à suivre les phases de leur développement normal.

Les vapeurs mercurielles exercent donc sur les végétaux une action toute locale, limitée aux cellules du parenchyme foliaire, qu'elles tuent individuellement, en désorganisant leur protoplasma, dont l'altération se traduit par une coloration d'une teinte noire de plus en plus foncée.

C'est par voie de diffusion gazeuse qu'elles arrivent jusques aux cellules atteintes, et l'emploi de la méthode des réserves symétriques permet de constater que leur pénétration dans les méats du parenchyme foliaire s'opère par les orifices toujours ouverts des stomates.

Les expériences relatives aux animaux ont porté sur des oiseaux, des rats et des lapins.

Les oiseaux et les rats sont renfermés dans des cages, intérieures elles-mêmes à des caisses en bois largement ouvertes à la circulation de l'air, et dont un des côtés est fermé très incomplètement par une lame de verre formant fenêtre. Trois plaques de cuivre amalgamées, dont deux latérales et une supérieure, sont appliquées contre la cage.

Pour les lapins, la cage est remplacée par un treillage en fil de fer qui empêche l'animal d'être en contact avec les plaques amalgamées.

Les oiseaux et les rats meurent après une période de huit à dix jours d'exposition aux vapeurs mercurielles; ils présentent, dans les trois derniers jours de ces périodes, des phénomènes de paralysie et des tremblements convulsifs.

Les lapins prennent de quatre à six semaines pour mourir; on ne constate pas, avec eux, de phénomènes de paralysie, mais seulement quelques mouvements convulsifs qui précèdent la mort de très près.

Dans ces divers animaux, on ne découvre, à l'autopsie, ni lésion anatomique, ni altération d'élément histologique qui permette de se rendre compte de la façon dont la mort s'est produite. Le mercure cependant a pénétré dans l'organisme, puisqu'on le retrouve

à dose très faible dans le sang, où il est arrivé par les poumons; car l'expérience démontre que la double membrane épithéliale pulmonaire est facilement perméable aux vapeurs mercurielles, lorsqu'elle est humide, pendant que l'épiderme est absolument imperméable aux mêmes vapeurs.

Aux plaques amalgamées des expériences qui précèdent, on peut substituer des feuilles de carton enduites d'onguent mercuriel, et l'intoxication se produit de la même manière.

— M. Debrun présente à la Société un nouveau baromètre destiné à rendre plus sensibles les faibles variations de la pression atmosphérique. L'instrument se compose essentiellement d'un baromètre à siphon dans lequel on maintient la hauteur de mercure constante, en compensant, avec de l'eau ajoutée sur la cuvette, les variations de pression atmosphérique. Un contact électrique placé au sommet de la chambre vide sert à assurer l'exactitude de l'affleurement. Le liquide est contenu dans une poire en caoutchouc prise dans les mâchoires d'un compresseur. De cette façon, en serrant ou en desserrant, on maintient le niveau du mercure constant. La sensibilité d'un pareil baromètre est 13,6 fois plus grande que celle du baromètre Fortin ordinaire. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*)

Séance du 13 mai 1880. — M. P. Tannery adresse à la Société un mémoire *sur l'Arithmétique des Grecs, par Héron d'Alexandrie.* (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*)

— M. Merget montre des photographies qui font voir l'entrée et la sortie des vapeurs de mercure dans les feuilles bistomatées. Avec une feuille monostomatée, les détails n'apparaissent que sur la face qui porte des stomates, l'autre face ne donne qu'une silhouette en blanc. Mais si l'on a d'abord passé une brosse sur cette dernière face, de manière à produire de petites ouvertures, on obtient l'apparence d'une feuille bistomatée. Les vapeurs de mercure passent donc bien d'une face à l'autre à travers les méats du parenchyme.

M. Merget maintient que les vapeurs de mercure ne tuent que le protoplasma qu'elles atteignent directement par les voies aériennes; elles laissent intactes les parties du végétal que l'air ne peut atteindre.

— M. Luzun rappelle que les maçons tuent quelquefois les arbres en perforant le tronc jusqu'à la moelle avec une vrille, et versant ensuite du mercure dans le trou obtenu. Comment agit le mercure dans cette circonstance?

— M. MERGET pense que, s'il est vrai que l'arbre est tué dans ces conditions, on peut expliquer le fait par la blessure faite à l'aide de la vrille, sans avoir besoin d'invoquer l'action toxique des vapeurs de mercure, à moins que le mercure ne soit porté jusque dans la moelle, et que la moelle, en partie détruite, ne forme dans l'axe du tronc une large voie aérienne. La moelle, d'ailleurs, ne joue pas un rôle indispensable dans la vie du végétal.

— M. LUZUN, pour montrer que la blessure faite au tronc, jusqu'à la moelle, n'est pas à elle seule nécessairement mortelle, cite le fait d'un cep de vigne, exposé à la Société d'Horticulture, sur lequel on a fait pousser des cerisiers et des chênes, en introduisant les fruits de ces deux arbres dans l'épaisseur même de la moelle du cep de vigne.

— M. DELMAS expose ses recherches sur l'action physiologique du froid et de la chaleur sur l'organisme.

Tout le corps d'un sujet sain (la tête exceptée) a été soumis à l'action du froid produit par une douche d'eau ordinaire, à des températures variant de 10 à 25°, et pendant des temps variables de 15 secondes à 5 minutes. Dans un certain nombre d'expériences, le patient avait été soumis à l'application préalable de la chaleur, sous la forme d'air chaud ou de vapeurs humides

Le pouls et la température du corps ont été notés pendant les applications, d'abord toutes les 15 secondes, puis toutes les minutes, et dans les heures suivantes, toutes les 5 minutes. Les tracés sphygmographiques ont été relevés avant et après les expériences.

Dans des expériences rendues aussi semblables que possible, tantôt le sujet a été astreint à une immobilité complète pendan plusieurs heures après l'application du froid; d'autres fois, il s'est livré, aussitôt après l'opération, à un exercice des plus actifs.

Voici les faits observés dans ces diverses conditions :

1° *Marche de la courbe de la température. — Pendant l'application du froid,* alors que le sujet accuse tous les signes, douloureux ou non, d'une sensation des plus intenses, la température du corps ne varie pas ou varie à peine de 1 à 2 dixièmes de degré, en plus ou en moins. L'emploi préalable de la chaleur ne modifie pas ces résultats.

Aussitôt après l'application du froid, si le sujet garde une immobilité complète, après avoir été soigneusement essuyé et enveloppé de manière à lui éviter *tout mouvement musculaire actif,* la température du corps ne varie pas ou varie fort peu; elle reste sensiblement égale à sa valeur initiale.

Mais si le sujet se livre *à un mouvement actif* quelconque

(s'habiller, courir, marcher), soit aussitôt après une application froide, soit après un repos préalable, la température animale baisse brusquement. Cet abaissement persiste plusieurs heures, et il est d'autant plus accusé que le sujet éprouve une plus forte sensation de chaleur. Dans le cas où les frissons se manifestent à la suite d'une immobilité trop prolongée, ou lorsque le sujet suspend son exercice actif, la température animale ne baisse plus ou elle se relève aussitôt.

Le degré d'abaissement de la température animale, deux à trois heures après une application du froid, a été onze fois sur douze de 0°1 à 0°6, au-dessous du chiffre noté avant le commencement de l'application. Le maximum d'abaissement obtenu chez un sujet très vigoureux n'a jamais dépassé 1°3. Sous l'action du calorique à son maximum de tolérance, on n'a pu obtenir qu'une élévation de 1°3, tandis que le pouls allait de 84 à 180 pulsations.

2° *Marche de la courbe du pouls*. Au début de toute application réfrigérante, le pouls atteint *subitement* une grande vitesse; après 10 à 15 secondes, cette vitesse diminue rapidement, et, à la fin de l'expérience, elle est revenue au chiffre primitif, et descend même au-dessous.

Si le sujet, après avoir été soigneusement essuyé et enveloppé, reste immobile, le ralentissement du pouls s'arrête ou continue lentement. Si, au contraire, le sujet s'habille et se livre à un exercice actif, le ralentissement s'accentue et persiste d'autant plus que la réaction est plus énergique et la sensation de chaleur plus générale.

Onze fois sur douze, la vitesse du pouls, notée 2 à 3 heures après une application froide, était de 2 à 20 pulsations plus basse qu'au commencement de l'expérience.

3° *Marche des courbes de la tension artérielle*. Elles atteignent leur maximum au début d'une application froide, puis elles baissent quand le sujet accuse une sensation de chaleur, et elles se relèvent dès que les phénomènes de la réaction se ralentissent ou s'arrêtent.

— M. Gayon présente, au nom de M. Denigès, une note sur la préparation de l'éther bromhydrique. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.)

Séance du 27 mai 1880. — M. Froidefond est élu membre titulaire.

— M. Hautreux donne le relevé des observations qui ont été faites à bord des paquebots du Brésil, sur la température de l'air

et de la mer, sur la pression barométrique, sur la direction des vents, etc. De la comparaison des résultats obtenus, il conclut :

1° Que la régularité des vents est liée à celle des pressions barométriques ;

2° Que les hautes pressions coïncident avec les basses températures ;

3° Que les calmes et les basses pressions coïncident avec les hautes températures ;

4° Que l'élévation de température des terres dévie la direction des vents généraux près des côtes ;

5° Que les directions des vents et des courants ne coïncident pas des Canaries à l'équateur, ni près du cap Frio. Les températures de la mer montrent les causes de ces mouvements ;

6° Que des dépressions thermales existent près du banc d'Arguin, sur l'équateur, par 15° longitude Ouest, et près du cap Frio ;

7° Que le contre-courant équatorial est indiqué par le maximum thermal ;

8° Que les dépressions sont causées par le surgissement à la surface du courant sous-marin qui se meut du pôle vers l'équateur.

Séance du 10 juin 1880. — M. Royer annonce que les expériences qu'il poursuit confirment les résultats déjà communiqués à la Société, sur la diffusion des vapeurs de mercure à travers les liquides.

— M. Merget a obtenu de son côté des résultats qui paraissent d'accord avec les observations de M. Royer.

— M. Debrun présente à la Société et fait fonctionner une nouvelle lampe électrique à incandescence. Le but que l'on s'est proposé est de simplifier, autant que possible, le mécanisme. Cette lampe se compose d'un bloc de charbon taillé en biseau, sur lequel repose une fine baguette de charbon de 2 millimètres de diamètre guidée par deux anneaux argentés ; un poids de plomb pèse sur la baguette et la fait descendre au fur et à mesure de son usure. Ce qui distingue cette lampe de celles faites auparavant, c'est l'absence de tout dispositif destiné à assurer le contact latéral, le glissement sur le charbon inférieur suffisant à cela. Le charbon brûle d'environ un centimètre et demi à l'heure, l'éclat lumineux est de 3 Carcels, et la résistance d'environ un kilomètre et demi de fil télégraphique. Le biseau inférieur est en graphite de Sibérie qui est incombustible.

— L'ordre du jour appelle la discussion des nouveaux Statuts de la Société. Le Secrétaire donne lecture des articles proposés par

le Conseil d'administration; ces articles sont successivement adoptés.

Sur la proposition de M. Luzun, la Société décide qu'elle restera soumise aux anciens Statuts jusqu'au jour où elle sera reconnue comme établissement d'utilité publique.

Séance du 24 juin 1880. — M. Royer dépose un Mémoire *Sur la diffusion des vapeurs de mercure à travers les liquides*. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.)

— M. Millardet présente un travail comparatif sur le *Pourridié* et sur le *Phylloxera*. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.)

— M. Gayon cite quelques expériences confirmant les résultats qu'il a déjà présentés à la Société, sur la cause de l'inversion du sucre dans les sucres bruts de canne. Elles consistent dans l'emploi d'anesthésiques et d'antiseptiques destinés à paralyser le développement des êtres microscopiques contenus dans les sucres bruts.

1re expérience. Le 11 décembre 1879, on met dans des flacons à 40° :

a	100gr sucre brut	+ 5cc eau distillée.
b	—	+ 5cc solution de salicylate de soude.
c	—	+ 5cc solution d'acétate de soude.
d	—	+ 5cc solution d'acétate de potasse.
e	—	+ 5cc solution d'hydrate de chloral.

Les 17 et 18 janvier 1880, les sucres sont analysés, et l'on obtient :

	Sucre initial	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*
Glucose......	2,89	6,98	3,09	3,49	3,59	4,25
Rendement...	83,10	71,2	84,1	82,2	81,9	80,6

2e expérience. Avec salicylate de soude seul.

Le 15 novembre 1879, on prend du sucre contenant 8,76 % de glucose, et on dispose les essais suivants :

a	100gr sucre	+ 2gr	salicylate de soude.
b	—	+ 1gr	—
c	—	seul.	

Le 16 décembre, l'analyse donne en glucose

pour :	*a*	8,92 %
—	*b*	9,73
—	*c*	10,53

L'expérience, poursuivie jusqu'au 21 janvier 1880, a donné alors, pour le glucose :

a	9,16 °/₀
b	10,41
c	12,41

Ainsi, les antiseptiques connus arrêtent la transformation du sucre en glucose, et une dose de 2 °/₀ de salicylate de soude suffit pour produire ce résultat.

Tout se passe donc, dans les circonstances normales, comme si l'altération du sucre était due au développement d'organismes microscopiques.

— M. DE LACOLONGE entretient la Société de l'organisation des moteurs hydrauliques qu'il a fait installer à l'École professionnelle de la rue Saint-Sernin.

Séance du 8 juillet 1880. — M. PEREZ fait les communications suivantes :

1° Parmi les preuves apportées en faveur de la théorie de Dzierzon, concernant la ponte de l'abeille reine, est l'expérience de Berlepsch, qui, après avoir exposé à un froid très vif une reine excellente pondeuse, l'avoir ranimée et replacée dans sa ruche, avait constaté que cette reine ne pondait plus que des œufs de mâles. Berlepsch s'était proposé de tuer les spermatozoïdes dans le réservoir séminal, sans tuer la mère, ainsi ramenée à l'état de femelle non fécondée.

Un tel résultat, la survivance de la mère alors que le sperme était frappé de mort dans ses organes, est bien fait pour surprendre ceux qui connaissent la grande capacité de résistance au froid que présentent les spermatozoïdes de divers animaux, même à sang chaud. Aussi M. Perez a-t-il voulu répéter cette expérience. Il a exposé plusieurs reines à des températures de — 15° à — 18°, obtenues à l'aide de mélanges réfrigérants. Ces reines ont été tuées, et le sperme de leur spermathèque examiné au microscope, mêlé d'une faible quantité du sang de l'abeille, a manifesté les mouvements les plus énergiques, qui, même dans un cas, ont persisté plus de quatre heures, et n'ont cessé que par la dessiccation.

Le sperme résiste donc bien plus au froid que l'abeille qui le contient, et l'on ne peut tuer les éléments spermatiques sans tuer l'abeille. On ne saurait donc tirer de l'observation de Berlepsch les conclusions qu'on en a déduites.

2° On sait que l'on peut, à l'aide d'artifices particuliers, faire

éclore, l'année même où ils ont été pondus, des œufs de ver à soie, qui, normalement, ne se développent qu'au printemps suivant. Il suffit pour obtenir ce résultat, de soumettre les œufs à un brossage énergique, ou à l'action très peu prolongée d'un acide minéral, tel que l'acide sulfurique, ou bien à une très basse température.

M. Duclaux, qui a fait de nombreuses expériences sur ce sujet, a vainement cherché la cause de ces phénomènes.

M. Perez s'est demandé si des opérations telles que le brossage, l'action des acides, n'ont pas pour effet de dépouiller l'œuf d'un enduit particulier, celui qu'il reçoit au moment où il est pondu, et qui, se desséchant instantanément au contact de l'air, sert à fixer l'œuf au point où la pondeuse le dépose. Il a donc examiné comparativement les œufs encore contenus dans l'oviducte, et les œufs déjà pondus. Il a ainsi reconnu que la moitié postérieure de l'œuf pondu est recouverte d'un vernis en couche très mince, qui manque entièrement à l'œuf non pondu, dont la coque est parfaitement unie. Un frottement énergique enlève ce vernis par lambeaux, et les acides le dissolvent avec une grande rapidité.

M. Perez croit donc que dans l'ablation de cet enduit par les frottements ou les acides, en débouchant les canalicules dont la coque est criblée, facilite l'accès de l'air dans l'intérieur de l'œuf, active, par suite, la nutrition du germe et hâte son développement.

3° On sait depuis longtemps que la cellule-mère spermatique chez divers insectes, et en particulier chez les lépidoptères, présente cette singularité remarquable d'être une enveloppe formée de plusieurs cellules aplaties, au lieu d'être une simple membrane cellulaire. L'origine d'une telle organisation n'a pas encore été reconnue. Voici d'où elle procèderait, d'après M. Perez. Les tubes testiculaires sont remplis, à l'origine, de cellules simples, qui, à un certain moment, donnent naissance, par génération endogène, chacune à 16 cellules (lépidoptères). De ces 16 cellules, 15 demeurent appliquées contre la paroi de la cellule-mère, qui bientôt disparaît; la 16e cellule, restée au centre du système, devient seule le point de départ de la prolifération qui doit engendrer les spermatozoïdes.

— M. Debrun expose un nouveau procédé destiné à produire simplement et économiquement la liquéfaction des gaz. L'appareil qui fonctionne sous les yeux de la Société, se compose d'un tube en U à branches inégales. Dans la plus petite est placée le gaz à liquéfier; cette branche est étirée à l'extrémité et fermée à la lampe. Dans l'autre branche, qui est trois fois plus grande, on a versé du mercure en quantité suffisante pour qu'après compression

il puisse remplir complètement la petite branche. Au-dessus du mercure on a ajouté de l'eau acidulée, de manière à remplir le tube presque entièrement. Le tube est fermé à la lampe; au-dessus de la surface du mercure sont soudés dans le verre deux fils de platine fins; à l'aide de ces deux fils on décompose l'eau, les gaz se dégagent et la compression n'aurait probablement pour limite que la transformation totale de l'eau à l'état de gaz. Quoi qu'il en soit, on peut à l'aide de cet appareil liquéfier tous les gaz non permanents; aussi M. Debrun montre-t-il à la Société un appareil dans lequel un manomètre à air comprimé dénote une pression de deux cents atmosphères. Un tube plein d'acide carbonique liquéfié se trouve aussi sur la table.

Séance du 22 juillet 1880. — M. Royer annonce qu'il a continué, depuis le dépôt de son Mémoire, ses expériences sur le passage des vapeurs mercurielles à travers les liquides; mais qu'il s'est servi, au lieu de mercure, de plaques de cuivre légèrement amalgamées.

Les résultats obtenus ont été les mêmes que ceux qu'il a déjà communiqués à la Société. Toutefois, sa nouvelle manière d'opérer lui a permis, en outre, de constater que les vapeurs mercurielles cheminent dans tous les sens, à travers les liquides, et que, par conséquent, elles s'y diffusent véritablement comme dans les gaz.

— M. P. Tannery adresse une note *sur la mesure du cercle d'Archimède*. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.)

— M. Millardet fait connaître un travail de madame Ponsot sur la greffe de la vigne. Ce Mémoire est inséré dans le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.

Madame Ponsot est nommée membre correspondant.

— M. Perez fait la communication suivante :

Ed. van Beneden a décrit le vitellus de l'œuf de l'oursin en voie de formation, comme composé de deux couches concentriques de substances différentes. E. Selenka en indique une de plus, interposée aux deux autres. Ce dernier auteur fait, en outre, jouer à la zone extérieure un rôle important dans la nutrition de l'ovule; il la figure émettant des expansions sarcodiques rayonnantes, qu'il dit être animées de mouvements vifs. Les nombreux canalicules dont la zone muqueuse de l'œuf mûr est criblée, ne seraient, d'après Selenka, que la trace persistante de ces expansions radiées.

M. Perez a reconnu que le vitellus est parfaitement homogène en tout temps, dès l'instant où il commence à se former jusqu'à

celui où l'œuf atteint sa maturité. L opinion des auteurs précités est due à une interprétation erronée des effets de certains réactifs. L'acide chromique, par exemple, contracte le jaune de l'œuf, tandis que la membrane vitelline est, au contraire, fixée par lui. Il s'ensuit que, pendant que le vitellus se rétracte, on voit des traînées de substance granuleuse se produire sous la membrane vitelline qui demeure par places adhérente au vitellus, sans suivre son mouvement de concentration. Ce sont ces traînées que Selenka a prises pour des expansions pseudopodiques. Loin d'être une manifestation de la vitalité de l'ovule, ces productions sont au contraire un indice de sa mortification.

EXTRAITS

DES

PROCÈS-VERBAUX DES SÉANCES DE LA SOCIÉTÉ.

ANNÉE 1880-81.

Présidence de M. MILLARDET.

Séance du 11 novembre 1880. — La Société procède au renouvellement de son Bureau; sont élus :

Président	M. MILLARDET.
Vice-Président	M. DE LAGRANDVAL.
Secrétaire général	M. ABRIA.
Secrétaires adjoints	MM. COŸNE et GAYON.
Archiviste	M. HOÜEL.
Trésorier	M. POTOCKI.
Membres du Conseil d'administration.	MM. AZAM, DUPUY, GLOTIN, HAUTREUX, KOWALSKI, DE LACOLONGE, LESPIAULT, LOQUIN, MICÉ et PEREZ

— M. KOWALSKI est élu aide-archiviste.

— M. DE LACOLONGE présente un travail *sur la Théorie géométrique du pendule de Foucault*. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société.*)

Séance du 25 novembre 1880. — MM. DOUMERC et SABATIER sont élus membres titulaires.

— M. SALTEL présente à la Société deux Notes. Dans la première, il montre d'abord que la voie suivie, dans les Traités classiques, pour arriver à mesurer le volume de la sphère, laisse à désirer au point de vue logique; il indique ensuite une solution qui lui semble exempte de tout reproche.

La seconde Note a pour objet d'exposer, en se fondant uniquement sur les théories enseignées dans les cours de mathématiques spéciales, un des chapitres les plus importants de l'étude des

surfaces, chapitre relégué, jusqu'ici, à la fin des cours de calcul différentiel.

— M. Debrun présente une bougie électrique de son invention, qui se compose de deux charbons parallèles, comme les bougies Jablockoff; mais ces charbons n'ont entre eux aucun isolant, et sont maintenus écartés par une lame de verre à leur base dans le porte-charbons. L'appareil de rallumage est constitué par un petit charbon transversal, parallèle et articulé à une palette en fer doux. Lorsque le courant passe, un électro-aimant, situé en regard du fer doux, attire celui-ci et éloigne le petit charbon; alors l'arc jaillit et monte jusqu'à la pointe de la bougie. Si l'arc s'éteint, l'électro-aimant abandonne sa palette, et le charbon retombe sur la base de la bougie; le rallumage se produit alors comme précédemment.

— M. Kowalski donne communication d'un travail sur les systèmes coordonnés d'unités électriques. Ce travail est à proprement parler un chapitre d'un cours de physique destiné à combler d'une manière élémentaire une lacune que présentent tous ceux publiés en France jusqu'à ce jour, et à permettre la lecture des articles de journaux ou revues scientifiques dans lesquels il est à chaque moment question d'Ohms, Webers et Volts, et de calculs effectués sur ces quantités.

Ce travail comprend les subdivisions suivantes :

1° Choix de l'unité absolue d'intensité des courants et mesure en unités absolues des courants continus ou instantanés;

2° Extension de la notion de potentiel aux courants;

3° Remarques sur l'induction. Unités absolues de force électromotrice et de résistance. Mesure d'un étalon de résistance en unités absolues;

4° Systèmes divers d'unités absolues, et système usuel de mesures de l'Association britannique;

5° Détermination en *unités usuelles* des divers effets calorifiques, mécaniques et chimiques des courants électriques. — Exemples numériques;

6° Additions comprenant avec des tableaux numériques, une note sur le système d'unités électro-statiques, et une note sur la transmission électrique du travail. (Voir le t. IV de la 2e série des *Mémoires de la Société*.)

Séance du 9 décembre 1880. — MM. Bonel et Law sont élus membres titulaires.

— M. Millardet entretient la Société de la maladie de la vigne

connue depuis longtemps aux États-Unis sous le nom de *mildew*, qui a causé cette année, dans toute la France, mais surtout dans le Sud-Ouest, des ravages considérables.

Il l'a observée pour la première fois au mois de septembre 1878, à Bordeaux, tandis que M. Planchon la constatait à peu près en même temps sur d'autres points. Depuis ce temps, la maladie a été reconnue dans presque tous les vignobles français, en Suisse, en Lombardie, en Espagne, etc.

Elle est causée par un champignon, le *Peronospora viticola*, qui végète à la manière des autres espèces de ce même genre, c'est-à-dire dans l'intérieur de la feuille. Les filaments producteurs des spores sortent en groupes de 3 à 9 par les stomates, à la face inférieure des feuilles. Les spores qu'ils produisent donnent naissance (d'après les auteurs américains) à des zoospores. M. Millardet s'est assuré qu'au mois de septembre ces spores produisent des taches de *mildew* en fructification, dans l'espace de huit jours.

Indépendamment de ces spores non sexuées qui seules avaient été constatées en Europe jusqu'ici, M. Millardet a trouvé, dans l'épaisseur des feuilles atteintes de la maladie, les spores sexuées ou *oospores*. Ces dernières sont des spores dormantes : elles passent l'hiver à l'état inerte pour se réveiller à la belle saison et assurer la perpétuation de l'espèce après la période hivernale. Il pense qu'on pourrait probablement entraver la marche de la maladie en récoltant avec soin les feuilles tombées de la vigne, en automne, et en les brûlant. Cependant, il faudrait encore, avant d'avoir recours à ce moyen, s'assurer que le parasite ne traverse pas l'hiver dans l'épaisseur des sarments qu'il a attaqués, d'où il s'élèverait, au printemps, dans les jeunes feuilles.

Il semble certain que le *Peronospora viticola* est d'origine américaine. Son introduction est-elle tout à fait récente ou date-t-elle de plusieurs années? Plusieurs viticulteurs peuvent avoir toujours vu cette maladie qui constituerait ce que les vignerons appellent *brouillardage, melin, coup de soleil, brouissure, mehltau* en Allemagne, etc.; mais leurs témoignages n'ont pas grande valeur et il serait à désirer que les botanistes fissent des recherches à cet égard dans les anciens herbiers. Ce serait le moyen le plus certain de trancher cette importante question de l'ancienneté du *Peronospora* en Europe; car s'il était démontré que ce cryptogame n'a été importé chez nous que depuis trois ou quatre ans, ainsi qu'il semble à première vue, on peut prédire que cette maladie nouvelle sera plus préjudiciable à la viticulture européenne que le phylloxera lui-même.

M. Millardet incline à penser que le *mildew* est assez ancien en Europe, et qu'il ne doit l'extension énorme qu'il a prise en 1880 qu'aux conditions climatériques particulières qui ont caractérisé cette dernière année. Il fait remarquer que les chaleurs considérables de l'été dernier ont alterné avec des pluies très abondantes, et que ce sont là précisément les caractères climatologiques des régions des États-Unis où le *mildew* exerce le plus de ravages. D'après des chiffres cités par Strong, tandis qu'aux États-Unis, à l'est des Montagnes Rocheuses, il tombe en moyenne 13 pouces d'eau pendant l'été, il en tombe moins de 8 dans les pays d'Europe où la vigne est cultivée. Or, cette année il en est tombé plus à Bordeaux pendant la même période.

M. Millardet espère être à même de donner bientôt à la Société quelques détails sur ce dernier point, de manière à pouvoir asseoir le pronostic de la maladie nouvelle de la vigne sur des bases sérieuses.

— M. Debrun montre une nouvelle balance électro-dynamique formée d'un fléau qui porte à l'une de ses extrémités une spirale, au-dessous de laquelle en est disposée une seconde enroulée en sens contraire de la première. Lorsque le courant passe, les deux spirales s'écartent et on les ramène à leur place en ajoutant des poids marqués sur l'un des plateaux.

— M. de Lacolonge fait la communication suivante :

Pour couper de longueur, et bien carrément, les rails de chemin de fer, on les présente, au sortir du laminoir et encore rouges, à une scie circulaire animée d'une très grande vitesse de rotation. La scie est commandée par une roue à réaction à vapeur montée sur le même arbre qu'elle. Cet appareil, qui remplit parfaitement et très rapidement son but, n'est plus aussi estimable quand on le considère sous le rapport de la consommation de vapeur, car ces roues à réaction ont un très faible rendement. Mais, dans le cas présent, comme il ne s'agit que d'un travail intermittent et de très courte durée, comme le travail s'accomplit dans des usines où la consommation de charbon est considérable, la perte de vapeur est insignifiante. Elle l'est d'autant plus que, dans ces établissements, les générateurs sont chauffés, aujourd'hui, à gaz perdus.

En étudiant la théorie des ventilateurs, M. de Lacolonge avait eu autrefois une idée dont il ne retrouve pas trace dans les journaux techniques, et qu'il reproduit ici, afin d'éviter qu'elle ne soit reprise et exploitée par un ré-inventeur quelconque. La description imprimée d'un procédé le met, en effet, dans le domaine public.

Si au lieu de lancer dans la roue à réaction un courant de

vapeur continu, on ne l'y introduit que par intermittences, la vapeur agira par acoups et en se détendant; la machine, faisant volant, corrigera elle-même les irrégularités périodiques de l'action de la force motrice. Ce sera comme la toupie que les enfants commandent à coups de fouet. M. de Lacolonge pense que la consommation de vapeur serait alors moindre à égalité de travail produit.

L'introduction pourra se faire plusieurs fois par tour, ou une fois par plusieurs tours. Les organes pratiques peuvent être, ou une distribution par tourillon, comme dans les machines oscillantes, ou des lumières ménagées dans des tubes tournant l'un dans l'autre et animés de vitesses convenables. Bref, on peut y parvenir par nombre de moyens pratiques, l'idée principale étant l'intermittence de l'introduction de la vapeur.

Bien que la transmission directe de la pression de la vapeur à un arbre de rotation soit un desideratum très cherché et très digne de l'être, il ne croit pas du tout en avoir résolu le problème. Pour le moment la machine, telle qu'il la conçoit, ne serait applicable que pour des cas spéciaux n'exigeant qu'un travail utile de quelques chevaux seulement, demandant une grande vitesse de rotation, et le moins possible d'organes de transmission.

C'est le cas des ventilateurs à force centrifuge, machines qu'il avait alors particulièrement en vue. Il désirait les ramener, par des moyens simples, à débiter de l'air chaud comme le demandent certaines opérations métallurgiques et industrielles. Sur le même arbre il plaçait un ventilateur soufflant, muni de son portevent, et une roue à réaction fonctionnant sous une enveloppe close. Celle-ci se prolongeait par une conduite de section annulaire concentrique au portevent, lequel relevant l'air lancé par le ventilateur, le conduisait au lieu de l'emploi. La vapeur détendue de la roue pénétrait dans sa conduite annulaire. Au contact des parois métalliques du portevent il y avait transmission de calorique de la vapeur à l'air, la première se condensait, le second se chauffait et arrivait à destination ainsi modifié; l'eau de condensation était amenée à l'extrémité de sa conduite, encore chaude, et prête à concourir de nouveau à l'alimentation du générateur.

Ne disposant pas des moyens d'opérer des essais, M. de Lacolonge n'a fait aucun calcul, manquant des bases expérimentales nécessaires pour les appuyer.

Séance du 23 décembre 1880. — La Société adresse des félicitations à M. Abria, son secrétaire général, récemment élu correspondant de l'Institut (Académie des Sciences).

— M. Debrun déclare ne réclamer aucune priorité dans le principe de l'appareil présenté par lui à la séance précédente.

— M. Bayrac, pharmacien militaire, est élu membre titulaire.

— M. de Lacolonge, en regardant poser la voie des tramways de Bordeaux et en observant la marche des véhicules qui y circulent, a eu idée de chercher la limite du rayon des courbes que l'on peut franchir avec ce matériel.

La vitesse des tramways étant celle d'un cheval attelé, au trot, la force centrifuge a une très faible action sur les voitures. Le boudin de la roue se meut dans une rainure, où il y a un certain jeu qui limite l'obliquité que la roue peut prendre par rapport au rail sans sortir de son logement. Cette obliquité fixe le rayon de courbure extrême que comporte ce genre de voie. En partant de cette donnée, on arrive facilement à l'équation du second degré qui donne ce rayon : dans le matériel considéré, il est de $12^{m}86$. Les ingénieurs de la Compagnie admettent 15 mètres. Il y a donc entre la pratique et la théorie une concordance suffisante.

On peut aisément calculer la force centrifuge du véhicule. Quant à la résistance que l'adhérence et le frottement du bandage sur le rail opposent à cet effort, elle est difficile à évaluer faute d'expériences sur le frottement d'un corps sollicité normalement à son mouvement et à ses fibres : l'auteur prend le plus faible de tous les coefficients de frottement connus, et arrive à ce résultat que, dans cette hypothèse extrême, la résistance est sensiblement égale à la force centrifuge. La conclusion est que les tramways de Bordeaux sont installés dans de bonnes conditions, ce qui est d'ailleurs confirmé par leur fonctionnement régulier. (Voir les *Mémoires de la Société*, t. IV, 2e Série, p. 367.)

— M. Millardet complète la communication faite dans la séance précédente par la comparaison des hauteurs d'eau tombée en France pendant l'été de 1880, avec les moyennes observées pendant une période de 10 années : il est tombé en 1880, une fois et demie la moyenne.

Séance du 6 janvier 1881. — M. P. Tannery envoie un Mémoire sur la *Solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide*. (Voir *Mémoires de la Société*. 2e série, t. IV, p. 395.)

— M. Saltel présente deux mémoires de mathématiques. Le premier est difficile à analyser; mais pour en montrer l'importance l'auteur se borne à faire observer que la méthode proposée lui a

permis de résoudre sans peine des milliers de problèmes qui étaient restés jusqu'ici inattaquables.

Dans le second, l'auteur montre la nécessité de faire intervenir des considérations géométriques dans la solution du problème de la détermination des nouvelles limites qui correspondent à un changement de variables dans les intégrales multiples. (Voir *Mémoires de la Société*, 2e série, t. IV, p. 443.)

— M. Abria fait une communication sur la détermination des unités électriques.

— M. Debrun présente une nouvelle bougie électrique : c'est une modification de la bougie Jablochkoff; elle présente la propriété d'être absolument silencieuse et inextinguible.

Séance du 20 janvier 1881. — M. Bergonier est élu membre titulaire.

— M. P. Sabatier est élu secrétaire adjoint en remplacement de M. Gayon, démissionnaire.

— M. Abria donne la suite de ses communications sur les unités électriques. Il fait remarquer que, dans ses recherches sur le magnétisme terrestre, Gauss a employé le milligramme pour unité de poids, et non, comme le disent à tort quelques auteurs, le quotient du milligramme par g : cette dernière unité, que l'on pourrait appeler l'*unité absolue* de Gauss, a été indiquée par lui, mais non employée ; il s'est servi simplement du milligramme, comme il le dit du reste expressément dans son mémoire.

M. Abria a vérifié les conséquences de la formule de Gauss, en se servant d'expériences faites avec beaucoup de soin par Pouillet et insérées dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* pour 1866 et 1868 : des données rapportées dans ces deux mémoires, il résulte que la force nécessaire pour maintenir l'un des barreaux de Pouillet dans une direction perpendiculaire au méridien magnétique devait être égale à 4,800 grammes. Ce nombre, déduit du coefficient d'élasticité de torsion du fil employé par Pouillet, a été de 4 grammes 400, nombre qui diffère assez peu du premier pour qu'on puisse considérer la vérification comme exacte dans les limites d'expériences qui n'ont pas été faites à ce point de vue et qui n'ont pu être contrôlées.

M. Abria rappelle la méthode très ingénieuse et qui semble très exacte, dont Pouillet s'est servi pour mesurer la distance polaire d'un barreau : cette méthode peut être modifiée de façon à éviter les incertitudes que présente la méthode employée par les habiles physiciens. (Voir *Mémoires de la Société*, t. V, 2e série.)

— M. Coÿne fait une communication sur un cas de môle hydatique du placenta avec développement anormal des fœtus renfermés dans cet œuf fœtal.

Les cotylédons du placenta étaient développés anormalement et présentaient tous les caractères de l'altération muqueuse : l'un des fœtus était adhérent par le plancher buccal à la formation placentaire, et au niveau de cette adhérence existe une masse qui a écarté les deux moitiés du maxillaire inférieur et qui paraît renfermer les débris d'un autre fœtus développé d'une façon très anormale.

— M. Gayon fait une communication sur les fermentations et démontre que l'acide succinique seul ne peut pas expliquer la transformation du sucre cristallisable en sucre interverti ; il a, en effet, obtenu le développement du *Mucor circinelloides*, moisissure ferment d'une grande puissance en présence des doses variables d'acide succinique et de sucre cristallisable, sans que celui-ci ait donné lieu à du sucre réducteur.

Séance du 3 février 1881. — M. l'Archiviste distribue aux membres présents le 2e cahier du tome IV des *Mémoires de la Société*.

— M. Mondiet, professeur au lycée, est élu membre titulaire.

— Sur un rapport de M. Millardet, M. le comte de Trévisan Saint-Léon est nommé membre correspondant de la Société.

— M. Rayet communique la série des observations thermométriques qui ont été faites à Floirac du 15 au 18 janvier 1881. Le 16 au matin, le thermomètre est descendu à 16°,2 au-dessous de zéro : c'est un des plus grands froids qu'on ait observés à Bordeaux.

— M. Lespiault fait quelques observations sur les basses températures observées en 1831 et 1881 : les dégâts produits par la gelée sur les bourgeons des vignes ont été très grands.

— M. Hautreux fait une communication sur les indications fournies par le thermomètre, pour la route à suivre du Cap en Australie. La route, par arc de grand cercle passant en pleine banquise australe, on est réduit à faire des routes composées suivant à peu près l'un des parallèles de latitude.

De l'étude des données météorologiques et des températures de la mer, il semble résulter que du méridien du Cap à la Tasmanie, l'espace à parcourir se divise en deux régions distinctes :

1° Celle des Iles, qui s'étend de 20° à 80° longitude E.

2° La région australienne qui va de 80° longitude E., jusqu'à la Tasmanie.

Dans la première région, les eaux froides sont très voisines des

eaux chaudes, les troubles atmosphériques violents, les glaces à redouter.

Dans la seconde, les eaux froides sont refoulées plus au Sud, les différences de température moins rapides, les troubles atmosphériques et les glaces plus rares.

Les vents contraires ont soufflé surtout pendant l'hiver austral, dans la région des îles entre 40° et 45° latitude S., dans la région australienne entre 45° et 50°.

C'est pendant l'hiver austral qu'on a essuyé le plus de coups de vent pour les régions citées précédemment.

La fréquence des coups de vent paraît liée à la décroissance plus ou moins rapide de température suivant la latitude.

Dans la région des îles, le maximum de chute thermale de la surface, atteignant 1°6 par degré de latitude, a lieu en juin et juillet entre 40° et 45° latitude. Le minimum qui est de 0°8 par degré, a lieu dans les mêmes mois entre 45° et 50°.

Dans la région australienne, le maximum à 1°4 par degré, a lieu d'octobre à décembre entre 45° et 50° de latitude. Le minimum qui est de 0°6 par degré de latitude, a lieu en juin et juillet entre 40° et 45° latitude.

De ces observations, on déduit les règles de route suivantes:

Janvier. — Naviguer dans les eaux à 8° et 9°; les coups de vent sont au Sud.

Avril. — Se tenir dans les eaux à 6°; les coups de vent sont au Nord.

Juillet. — Se tenir dans les eaux de 4° à 5°. Les coups de vent sont au Nord et les glaces sont soudées à la banquise.

Octobre. — Suivre l'isotherme de 7° et ne pas descendre au Sud dans la région australienne pour éviter les vents contraires et les coups de vent. (Voir *Mémoires de la Société*, t. V, 2e Série.)

Séance du 17 février 1881. — M. DE VOLONTAT, ingénieur des ponts et chaussées, est élu membre titulaire.

— M. G. DARBOUX est nommé membre honoraire de la Société.

— M. LESPIAULT communique à la Société quelques renseignements complémentaires qu'il a recueillis, depuis la dernière séance, sur les effets de la grande gelée du 16 janvier 1881.

En ce qui touche d'abord l'observation directe de la température, il y a lieu de signaler une coïncidence remarquable entre les observations faites à Floirac par M. Rayet, et celles qui ont été faites à Nérac au même moment, c'est-à-dire dans la matinée du 16 janvier.

Un thermomètre placé à une fenêtre du second étage, dans l'intérieur de la ville, marquait à sept heures du matin — 17° ; deux heures plus tard, il était encore à — 15°. D'autre part, un thermomètre à mercure, placé contre la serre du sieur Vincent, pépiniériste, à la limite même de la ville, à une hauteur de 1^m50 au-dessus du sol, indiquait 21° de froid, entre sept et huit heures du matin. Cette double observation est conforme à celle que M. Rayet faisait à peu près à la même heure, à l'Observatoire de Floirac; elle montre que le refroidissement considérable des couches d'air, à mesure qu'on se rapprochait du sol, n'était pas un phénomène isolé, mais qu'il s'étendait à toute la contrée.

La comparaison des heures et des circonstances des observations montre que le froid a été encore plus excessif à Nérac qu'à Bordeaux. On est conduit à la même conclusion par l'examen des effets de la gelée sur les végétaux, et particulièrement sur la vigne.

Tandis qu'à Bordeaux le mal a été partiel, et que beaucoup de bourgeons ont résisté, à Nérac ils ont presque tous été détruits, du moins sur les plants français. Les plants américains se sont beaucoup mieux comportés.

Voici le détail de quelques expériences qui ont été faites sur des sarments maintenus en serre, nuit et jour, pendant trois semaines, à une température constante de 25° :

1° Aucune des boutures françaises coupées dans un vignoble de la plaine, après la gelée, n'a donné le moindre signe de végétation; des boutures coupées quelques jours auparavant ont au contraire rapidement poussé.

2° Les *Riparia* ont généralement poussé comme s'ils n'avaient pas été touchés par le froid. Les *Vialla* et les *Elvira,* en particulier, ont paru absolument intacts. Les *Æstivalis,* précédemment coupés et mis dans le sable, ont aussi tous poussé au bout de dix à douze jours.

3° Les *Æstivalis,* particulièrement les *Jacquez,* coupés après la gelée, ne donnaient encore aucun signe de végétation au bout de dix jours; ils n'ont poussé qu'après deux ou trois semaines. Le froid paraît donc les avoir simplement retardés dans leur évolution.

Ce désastre, presque sans précédent, est dû à un faux dégel. Le 13 et le 14 janvier il était tombé de la neige; dans l'après-midi du 15, cette neige avait commencé à fondre ; le bois imprégné d'humidité s'est désorganisé sous l'action du froid excessif de la nuit. On doit s'attendre, d'après cela, à trouver un mal beaucoup moindre

là où il n'avait pas neigé, ou bien là encore où le dégel n'avait pas commencé. Une enquête sommaire montre, en effet, que le dommage est très variable suivant les régions.

Dans les plaines de l'arrondissement de Nérac, et même du reste du département, on peut regarder à peu près tous les ceps comme gelés jusqu'au ras du sol. Sur les points plus élevés, au contraire, particulièrement sur les coteaux qui bordent la Garonne, beaucoup de bourgeons ont résisté. Dans les départements du Tarn-et-Garonne, du Lot, de la Dordogne et du Gers, la situation est à peu près la même. Dans la Gironde, la région seule des Graves a considérablement souffert. Le mal est moindre sur la rive droite. Il diminue, d'ailleurs, à mesure qu'on approche de la mer, et il est à peu près nul dans le Médoc.

Le désastre paraît, d'après les renseignements recueillis, limité à la portion inférieure du bassin de la Garonne. Cela tient à ce que le froid a été beaucoup plus intense dans cette contrée que dans le reste de la France. Si l'on consulte, en effet, pour les journées des 15 et 16 janvier, le tableau des températures *minima* publié par le Bureau météorologique (tableau dans lequel manquent accidentellement les observations de Bordeaux), il est facile de s'assurer qu'à part Charleville, où l'on a constaté 15° de froid, le thermomètre à *minima* n'est descendu qu'à — 13°5 à Paris et à Belfort, à — 12° à Nancy et à Clermont, à — 7° à Lyon et à Marseille, à — 2° à Perpignan. Il résulte, au contraire, de ces mêmes tableaux et des renseignements fournis directement par MM. Planchon, de Montpellier, Baillaud, de Toulouse, et d'autres professeurs, qu'un véritable *axe de froid* s'est formé dans la matinée du 16 janvier, de Bordeaux à Cette, avec des températures de — 11° à La Coubre, — 17° (— 22°, ras du sol) à Bordeaux, à Nérac et à Agen, — 10° à Toulouse, — 11° à Montpellier.

Il est intéressant de rechercher, dans la disposition des lignes isobares, quelles peuvent être les causes de ce singulier accident météorologique. Un examen attentif permet de le rattacher à l'existence, sur les côtes de Provence, d'une de ces dépressions secondaires dont l'action, parfois très énergique, a été récemment signalée par M. Mascart à l'attention des météorologistes. Il y a déjà plus de dix ans que M. Lespiault lui-même a fait remarquer, dans ses études annuelles sur les orages du Sud-Ouest, que les périodes orageuses de nos contrées étaient presque toujours accompagnées d'une dépression très circonscrite qui persistait, pendant plusieurs jours, sur la Vendée ou la Bretagne. Le Bureau

météorologique vient de reconnaître (¹) d'une manière plus générale, qu'une baisse, même légère, du baromètre en certains points, particulièrement vers le golfe de Gascogne, donnait généralement lieu pendant l'été à des périodes orageuses s'étendant à une grande partie de la France. Il arrive souvent que des dépressions analogues se forment sur les golfes de Gênes ou du Lion, ou dans l'intérieur de bourrasques plus profondes et plus étendues, et qu'elles restent stationnaires pendant plusieurs jours, probablement par suite de la configuration du sol. Ces bourrasques secondaires sont très limitées, mais très énergiques dans leur rayon d'activité

Or, dès le 11 janvier, un centre de basses pressions, venu d'Espagne, s'établit près de Marseille. Le 12, la dépression s'agrandit et couvre le golfe de Gênes, l'Italie et l'Adriatique. Le 13, le baromètre descend encore de 6 millimètres sur les golfes du Lion et de Gênes. Le 14, un faible mouvement secondaire se dessine à Nice. Le 15, ce mouvement, qui s'est agrandi et dont le centre s'est transporté en Corse, amène des pluies importantes sur les côtes, depuis Perpignan jusqu'à Monaco, et de la neige sur les hauteurs. Le 16, enfin, tandis que la dépression principale couvre l'Adriatique et l'Italie, une autre moins importante se forme sur le golfe de Gênes. Toutes les deux amènent un fort refroidissement en Provence et en Piémont.

C'est probablement cette dernière dépression qui, succédant à une perturbation de plus de six jours, a étendu son action par Montpellier, Cette et Toulouse, et jeté des masses d'air froid sur le bassin de la Garonne. Il serait difficile toutefois de comprendre, en assimilant cette dépression à un tourbillon à axe vertical, comment les vents du Nord et du Nord-Est qui lui sont dus peuvent amener, en un lieu donné, une température beaucoup plus basse que celle des régions plus septentrionales. Mais plusieurs météorologistes, particulièrement M. Fron, dans ses recherches sur les conditions géométriques du tourbillon, ont reconnu que les faits ne pouvaient souvent s'expliquer qu'en supposant à l'axe de la bourrasque une inclinaison quelquefois très forte. Dans la circonstance actuelle, il suffirait d'admettre, dans la bourrasque de Provence, une inclinaison de l'axe plus ou moins prononcée vers le Sud, pour qu'elle dût verser sur sa gauche, c'est-à-dire sur la vallée de la Garonne, une véritable douche d'air glacé puisé dans les régions supérieures de l'atmosphère. Il est à remarquer qu'en

(¹) *La Météorologie appliquée à la prévision du temps*. Leçon faite par M. Mascart, pages 29, 47 et suivantes. Paris, Gauthier-Villars.

effet, le thermomètre marquait, en ce moment même, — 17° aux observatoires du Puy-de-Dôme et du Pic du Midi. En outre, ces déplacements d'air dans le sens vertical, qui peuvent s'opérer en quelques heures, sont les seuls qui permettent d'expliquer, non seulement la production de la grêle, mais aussi la rapidité de certains dégels. C'est sans doute dans un déplacement de ce genre qu'il faut rechercher les causes de la grande gelée qui, en janvier 1820, abaissa le thermomètre, dans une nuit, en Provence, de + 12° à — 14°, et détruisit un grand nombre d'oliviers.

— M. Bayssellance fait observer qu'un travail fait, il y a quelques années, par M. Ancel, capitaine de frégate, conduisait à admettre que l'axe des cyclones est normal à l'axe de la terre : leur forme serait celle d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

— M. Debrun présente à la Société un nouveau mesureur d'énergie : cet appareil se compose d'un électro-aimant Becquerel. Des poids et un répartiteur convenablement disposés font que la rentrée du noyau est proportionnelle à l'intensité du courant. Ce mesureur est gradué en $\frac{1}{10}$ Weber par comparaison avec une balance électro-dynamique.

Séance du 3 mars 1881. — M. Colot dépose une note sur les différentes tensions de vapeurs : ce dépôt est effectué pour prendre date.

— M. Bonel annonce que la Société générale des Téléphones vient d'établir une succursale à Bordeaux.

Sur les quais, on pose des tubes en ciment de 0m20 de diamètre, renfermant des câbles Gower : ils serviront ainsi que les égouts et les lignes aériennes à relier les abonnés.

La Société emploie le téléphone Bell et le microphone Crossley, qui reproduisent très fidèlement la parole : l'appareil se compose d'une planchette derrière laquelle est fixé le microphone proprement dit, formé de quatre charbons agissant librement dans des supports de même substance. Les vibrations s'amplifient au moyen d'une bobine de Ruhmkorff, dont les courants induits gagnent les téléphones du correspondant.

Un commutateur suisse sert à mettre les abonnés en rapport : un avertisseur, sous l'influence du courant émis, donne un appel de sonnerie et l'employé établit la correspondance désirée à l'aide de fiches placées dans les encoches du commutateur.

— M. Huyard fait une communication sur l'oléo-margarine et sa fabrication, et met sous les yeux de la Société les modèles des appareils et divers échantillons du produit.

— M. Hautreux fait une communication sur la construction du *Livadia*. Ce navire étrange, conçu par l'amiral Popoff, repose sur une vraie tortue ne calant pas plus de 2 mètres d'eau. Sa largeur au niveau de la ligne d'eau est de 46 mètres, sa longueur est seulement de 70 mètres. Il a une vitesse de 15 à 16 nœuds communiquée par trois machines fournissant 10000 chevaux. Il a navigué et supporté une horrible tempête sur le golfe de Gascogne: sa stabilité est très grande, le maximum d'oscillation de tangage a été 9°, de roulis 8°.

Séance du 17 mars 1881. — M. Rafael Roig y Torrés, rédacteur de la *Crónica cientifica* de Barcelone, est nommé membre correspondant de la Société.

— M. Hoüel donne lecture d'une Notice nécrologique publiée par M. Laisant dans le *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, sur M. Giusto Bellavitis, membre honoraire de la Société, décédé le 6 novembre 1880.

— M. Coÿne parle sur la trichine et la trichinose à Bordeaux.

Séance du 2 juin 1881. — M. P. Boutan donne sa démission de membre de la Société.

— MM. Ariès, capitaine du génie, et Dupetit sont élus membres titulaires.

— M. Perez communique le résultat des recherches qu'il a faites sur l'origine de la cellule dite *embryogène* de M. Balbiani. Il a vu, chez diverses espèces d'araignées, particulièrement sur les Amaurobius, les phénomènes suivants se produire dans les œufs très jeunes. Le noyau de la vésicule germinative, simple d'abord, se partage en deux parties qui deviennent libres par la disparition de la paroi vésiculaire. Ces deux noyaux deviennent bientôt vésiculaires, et l'un se transforme en la vésicule germinative définitive, l'autre devient la vésicule de Balbiani.

Rapprochant ces faits de ceux que présente la formation des cellules dites *vitellogènes* de l'œuf des insectes et dont il a fait antérieurement connaître la loi, de ceux que divers auteurs ont signalés, concernant le dédoublement de la tache germinative dans l'œuf de plusieurs espèces animales, M. Perez pense qu'on peut les rapporter tous à une même cause, la prolifération de l'ovule. Il est des œufs où la prolifération n'atteint pas la tache germinative (certains lamellibranches, etc.); il en est où elle produit le dédoublement de la vésicule germinative en deux, comme il est dit plus haut (araignées, myriapodes). Enfin, elle intéresse parfois la cel-

lule ovulaire tout entière qui donne 2, 4, 8, 16, 32... cellules, dont une seule succède à l'ovule primitif (insectes, sacculines).

— M. Millardet présente à la Société des feuilles de vigne affectées d'une maladie non encore décrite, qui rentre dans le groupe d'affections indéterminées, désignées sous les noms de *coup de soleil, échaudage, brouillard, brouissure,* etc. Elle est caractérisée essentiellement par la présence, à la face inférieure des feuilles, de petits amas de matière muqueuse jaunâtre, qui, au microscope, se montre constituée par des myriades de bactéries, nageant dans un liquide incolore épais. Cette matière, transportée à la face inférieure de feuilles saines dans un récipient humide, augmente en quantité pendant plusieurs jours. Cependant, même après 15 jours entre 14° et 20°, il n'a pas été possible de reproduire sur des feuilles adultes de Malbec les caractères pathognomiques de l'affection. Ces échecs tiennent sans doute à l'insuffisance de la température et à l'état adulte des feuilles: car on peut faire pourrir en 24 heures des bourgeons terminaux, en y déposant l'enduit muqueux précédemment décrit, à une température plus élevée.

Le développement de la maladie est le suivant: dès que l'enduit muqueux apparaît en un point de la face inférieure des feuilles (jamais à la face supérieure), le point atteint jaunit, puis brunit, Le microscope montre alors à l'intérieur de la feuille beaucoup de bactéries, soit dans les cellules, soit dans leurs intervalles. Les cellules sont désorganisées, comme macérées. L'épiderme des deux faces résiste plus longtemps à la destruction. Les points où la pourriture est suffisamment avancée, se dessèchent bientôt au soleil : il se produit ainsi une foule de taches brunes friables de deux à quatre millimètres de largeur où le tissu de la feuille est comme brûlé. L'état hygrométrique de l'air exerce donc beaucoup d'influence sur l'aspect des feuilles atteintes. Sous l'action d'un brouillard, la bactéridie s'étend et se multiplie rapidement. Vienne alors un soleil vif, ou un coup de vent du nord, tous les points atteints sont brûlés en quelques heures.

Ce qui permet de caractériser nettement cette maladie, c'est l'aspect luisant, comme nacré, que présentent pendant tout son développement les taches, tant à la face supérieure qu'à la face inférieure de la feuille.

C'est M. Ch. Skawinski, régisseur du domaine de Pontet-Canet, qui a découvert cette nouvelle maladie et l'a signalée à M. Millardet. C'est au printemps de 1877 que, pour la première fois, il remarqua une demi-douzaine de ceps atteints. Depuis lors, le mal a reparu chaque année : aujourd'hui la maladie n'existe plus au point atta-

qué en 1877, mais elle s'est étendue sur certaines parties du vignoble. Le 15 mai, MM. Pérez et Millardet l'ont constatée à l'état sporadique en plusieurs endroits de la propriété; dans une pièce de trois hectares, un cinquième des feuilles était déjà compromis sérieusement.

M. Skawinski affirme que la maladie attaque la grappe, surtout à la floraison, la fait pourrir et sécher comme les feuilles; mais dans les grappes ainsi désséchées, M. Millardet n'a pu retrouver avec précision l'enduit muqueux jaunâtre à bactéries.

C'est au printemps, pendant la floraison, que le mal se manifeste et s'étend; son développement est alors très rapide; cette année M. Skawinski commença à l'apercevoir le 15 mai : survinrent quelques journées chaudes et sèches, et du 10 au 22 mai les feuilles se desséchèrent subitement. En trois jours, dans la pièce de 3 hectares précitée, les feuilles desséchées furent si nombreuses qu'il semblait qu'on les eût grillées en promenant une torche autour des souches. Le dommage causé par la dessiccation des grappes est évalué à $\frac{1}{8}$ de la récolte.

M. Skawinski a d'ailleurs constaté l'existence de la maladie pendant toute la belle saison : elle aurait même déterminé au mois d'août une chute abondante de feuilles. M. Millardet fait observer que c'est peut-être à cette maladie qu'il faudrait rapporter certaines chutes de feuilles attribuées au *mildew*. La même maladie a été constatée à Château-Lafite, mais à un degré bien moins grave.

Des recherches ultérieures diront si parmi les divers cépages, il en est de spécialement disposés à cette affection, et si elle se montre de préférence dans certains terrains.

— M. Sabatier fait une communication sur les chlorures de fer.

Le protochlorure de fer, mis en présence de l'acide chlorhydrique concentré, ne donne pas de chlorhydrate, mais sa solubilité diminue et il cristallise en aiguilles d'un vert pâle dont la composition est FeCl,2HO : c'est le même hydrate que l'on obtient en faisant effleurir dans le vide sec à la température ordinaire l'hydrate ordinaire vert FeCl,4HO. M. Ditte a obtenu dernièrement pour les chlorures de manganèse, de nickel, de calcium, des résultats analogues.

Le perchlorure de fer dissous, évaporé dans le vide, donne des cristaux rhomboédriques jaunes Fe^2Cl^3,12HO : ceux-ci, abandonnés dans le vide sec, se liquéfient au lieu de s'effleurir, en un liquide sirupeux rouge foncé, qui fournit ensuite des cristaux octaédriques d'un rouge brun Fe^2Cl^3,5HO. Le liquide précédent

se solidifie donc, soit qu'on lui ajoute de l'eau, soit qu'on lui en enlève.

Dans un courant d'acide chlorhydrique sec, les cristaux Fe^2Cl^3, 5HO se liquéfient en absorbant ce gaz, et donnent un liquide jaune verdâtre, qui, soumis à un refroidissement intense, abandonne des lames verdâtres rectangulaires de CHLORHYDRATE DE PERCHLORURE DE FER, qui se détruisent par le réchauffement.

L'existence de ce chlorhydrate nouveau est d'ailleurs indiquée par l'accroissement de solubilité du chlorure en présence de l'acide chlorhydrique, comme cela a lieu pour le bichlorure de mercure, le chlorure d'or.

Séance du 16 juin 1881. — M. l'archiviste distribue aux membres présents le 3e cahier du 4e volume (2e série) des *Mémoires de la Société.*

— M. Perez fait une communication sur un organe spécial aux hyménoptères. M. Canestrini, dans une Note préliminaire insérée dans le *Zoologischer Anzeiger* de Carus (n° 63, 1880), parle d'un organe singulier qui se voit aux pattes antérieures des hyménoptères et qui se compose : 1° d'une encoche arrondie à la base du premier article des tarses; 2° de l'épine, notablement modifiée dans sa forme, de l'extrémité correspondante du tibia. L'auteur, qui décrit diverses particularités de cet appareil, ignore quel peut en être l'usage.

M. Perez sait depuis longtemps que cet organe sert à l'insecte pour nettoyer ses antennes; non seulement l'observation le constate aisément, mais encore toutes les particularités qu'il présente s'expliquent par cet usage.

— M. Bonel entretient la Société des appareils de la télégraphie sous-marine.

Pour éviter les effets de l'induction et de la condensation qui affectent les câbles immergés d'une grande longueur, Sir W. Thomson a imaginé deux appareils sensibles, le miroir et le siphon.

Le premier se compose d'un fort galvanomètre au centre duquel est une rainure; à l'intérieur est suspendu par un fil de cocon, un miroir de 1cm5 de diamètre, muni d'un barreau aimanté très léger: le tout pèse moins de 1 centigramme. Le miroir renvoie sur un écran les rayons d'une lampe, en produisant des écarts voisins de 1 centimètre, à droite ou à gauche selon le sens du courant. L'écart de droite représente le trait, celui de gauche le point de Morse.

Le second système, fort compliqué, possède un électro-moteur, qui fait avancer une bande de papier. Les étincelles d'induction

recueillies sur le moulin, impriment un mouvement vibratoire à l'encre, dans laquelle plonge un siphon, gros comme une forte aiguille à coudre, et long de 3 centimètres, de façon à tracer au centre de la bande de papier, une suite ininterrompue de petits points. Le siphon se rattache par un fil à un écheveau dont il suit les mouvements qui lui sont donnés en avant ou en arrière, suivant le mode du courant, cette sorte de glène étant placée entre les pôles d'un électro aimant. Le siphon tracera donc, de part et d'autre de la ligne centrale, des angles, les supérieurs figurant le point, les inférieurs le trait de l'alphabet Morse.

M. Cromwell Varley applique aux deux extrémités du câble sous-marin deux condensateurs, dans le but d'éviter les inconvénients précités : le signal est produit par l'influence du courant émis sur le fluide neutre du câble.

On est parvenu à établir le système dit *dupuex* aux lignes sous-marines ; c'est-à-dire permettre aux deux postes de transmettre leurs signaux simultanément en sens contraire. La disposition ressemble à celle du pont de Wheatstone et consiste dans une balance parfaitement égale à chaque extrémité entre la résistance du câble d'une part, et une ligne factice de l'autre. Quand les deux postes communiquent à la fois, les deux miroirs se tournent dans le sens du courant émis par l'autre station, chacun des galvanomètres étant influencé par la différence entre le courant des deux piles et celui de l'une d'elles.

— M. Gayon indique quelques expériences desquelles il résulte que le sulfure de carbone ajouté à certaines terres végétales s'y fixe en partie dans un état encore indéterminé.

— M. Gayon appelle l'attention sur l'invasion du *mildew*, et presente à la Société des feuilles et des grappes déjà fortement atteintes.

— M. Millardet fait remarquer la précocité de cette attaque, qui n'avait jusqu'à présent commencé qu'au mois d'août.

— MM. Gayon et Dupetit donnent les premiers résultats qu'ils ont obtenus dans la germination des graines de cresson alénois en présence de solutions antiseptiques et antifermentescibles. Leur but est de déterminer un milieu où les grains puissent germer, sans donner lieu au développement d'organismes : bactéries, vibrions, ou moisissures.

1° Eau chlorée. — La germination commence en général plus tôt que dans l'eau ordinaire, elle s'arrête d'autant plus vite que l'eau chlorée est plus concentrée. Pas de moisissures, bactéries dans quelques graines non germées.

2° ACIDE PHÉNIQUE. — Germination nulle dans solution à $\frac{1}{100}$, faible à $\frac{1}{1000}$, presque normale à $\frac{1}{10000}$; pas de moisissures, quelques bâtonnets dans les solutions à $\frac{1}{10000}$.

3° SALICYLATE DE SOUDE. — Germination nulle à $\frac{1}{100}$, très faible à $\frac{1}{1000}$, à peu près normale à $\frac{1}{10000}$. Organismes nuls ou douteux, mais beaucoup de moisissures.

4° ACÉTATE DE SOUDE. — Germination nulle à $\frac{1}{10}$, faible à $\frac{1}{100}$, un peu retardée à $\frac{1}{1000}$, presque normale à $\frac{1}{10000}$. Organismes nuls ou douteux, moisissures.

5° ACÉTATE DE POTASSE. — Germination nulle à $\frac{1}{10}$, faible à $\frac{1}{100}$, affaiblie à $\frac{1}{1000}$, à peu près normale à $\frac{1}{10000}$: moisissures et organismes.

6° HYDRATE DE CHLORAL. — Germination presque nulle à $\frac{1}{100}$, très retardée à $\frac{1}{1000}$, presque normale à $\frac{1}{10000}$: organismes nuls à $\frac{1}{1000}$, nombreux à $\frac{1}{10000}$, moisissures à $\frac{1}{1000}$.

7° SULFATE DE CUIVRE, — Germination très affaiblie à $\frac{1}{10}$, faible à $\frac{1}{100}$, activée d'abord, puis arrêtée à $\frac{1}{1000}$, normale à $\frac{1}{10000}$: pas d'organismes, moisissures à $\frac{1}{1000}$, non à $\frac{1}{100}$.

8° SULFATE DE ZINC. — Mêmes résultats, bâtonnets à $\frac{1}{10000}$.

9° ACIDE SULFUREUX. — Germination ralentie avec solution saturée, étendue à $\frac{1}{50}$, nulle à dose plus élevée.

10° CHLORURE DE PLATINE. — Germination retardée, puis normale à $\frac{1}{1000}$ et à $\frac{1}{10000}$.

11° AZOTATE D'ARGENT. — Germination nulle à $\frac{1}{1000}$, retardée, puis normale à $\frac{1}{10000}$.

12° BICHLORURE DE MERCURE. — Germination un peu retardée et affaiblie à $\frac{1}{1000}$ et à $\frac{1}{10000}$.

Séance du 7 juillet 1881. — M. HAUTREUX présente une communication relative aux températures et aux densités de l'eau dans l'estuaire de la Gironde.

Des observations de températures ont été faites pendant plusieurs années à Bordeaux, le Verdon, Royan, Bonne-Anse, Cordouan et le golfe de Gascogne : elles montrent que les oscillations des courants de marée ne produisent pas de variations de température de plus de 1°, non plus que les changements diurnes de température aérienne.

Les perturbations atmosphériques et les crues de la rivière produisent à Bordeaux des ébranlements durant en général 15 jours.

Les courants tendent à suivre les passes profondes et s'y cantonnent; le jeu des marées détermine de simples oscillations dans les masses en mouvement. Les mélanges avec l'eau de mer se font dif-

ficilement et hors des passes, sur les bancs, les eaux semblent tourbillonner sur elles-mêmes.

Les observations de densités faites à Bonne-Anse, à Royan et au Verdon depuis 1878, montrent que les eaux du fleuve s'écoulent vers la mer surtout pendant les quadratures, et que les fortes marées de syzygies refoulent le fleuve vers l'amont.

La passe de Médoc semble servir à l'écoulement des eaux douces, celle de Saintonge à l'entrée des eaux salées.

Des mouvements tourbillonnaires puissants se produisent à la pointe de Grave. Aux environs des étales de basses et de pleines mers, se produisent des mouvements de divagation des courants dont la cause n'est pas encore bien connue.

C'est pendant l'été entre Bordeaux et Royan, pendant l'hiver entre Royan et la mer, que ces observations offrent le plus d'intérêt.

— M. Bayssellance confirme par ses observations personnelles l'épanchement des eaux douces sur l'eau salée, dont a parlé M. Hautreux dans sa communication.

Séance du 21 juillet 1881. — M. Viault est élu membre titulaire.

— M. Sabatier annonce à la Société qu'il est parvenu à obtenir et à séparer, à l'état cristallisé, le chlohydrate de chlorure ferrique dont il a indiqué l'existence dans une précédente communication. On l'obtient en faisant passer un courant de gaz chlorhydrique sur un mélange de chlorure sublimé et d'hydrate inférieur $Fe^2Cl^3,5HO$.

Les cristaux obtenus sont d'une déliquescence excessive; ils ont été séchés sur une plaque poreuse et soumis à l'analyse: leur composition paraît être $Fe^2Cl^3,HCl,4HO$.

— M. Coÿne met sous les yeux de la Société un organe monstrueux, dont l'étude histologique lui a permis de préciser la nature.

— M. de Lagrandval communique une construction très simple de la *normale à l'ellipse en un point donné.*

On trace les circonférences de rayons a et $a+b$; par le point M on élève une perpendiculaire MB au grand axe, jusqu'à la rencontre B avec le cercle a: on joint OB qui vient couper en A, le cercle $a+b$. AM est la normale au point M.

— M. Figuier décrit et montre un régulateur de température fondé sur l'emploi de la pile.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1879-1880.

Séance du 13 novembre 1879.

ADELAIDE. — *Transactions and Proceedings and Report of the Philosophical Society of Adelaide, South Australia, for 1877-78.* In-8°.

ALAIS. — *Mémoires et Comptes rendus de la Société scientifique et littéraire d'Alais.* Année 1878, t. X, 1er Bulletin. — Gr. in-8°.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 16e année, 1879, 1er et 2e trimestres. — [illegible]

AMSTERDAM. — *Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde.* 2e série, [illegible]

ANGERS. — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* 3e série, t. XX, 1879, 1er semestre. [illegible]

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, [illegible]

BATAVIA. — *Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia.* T. II et III, 1869-75. — 2 vol. gr. in-4°.

BERLIN. — *Mathematische und Physikalische Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Année 1878. [illegible]

— *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mai-juin, 1879. — In-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann,* t. IX, année 1877. — In-8°.

BOLOGNE. — *Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* 3e série, t. VII, VIII, IX, X (fasc. 1-2); 1876-1879. — In-4°.

BOLOGNE. — *Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* Années 1876-1879. — 3 vol. in-8°.

BONN. — *Verhandlungen der naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 54e et 55e années (4e série, t. 4-5); 1877-1878. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 19e année; juillet-septembre 1879. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année. Nos 1-15; août-novembre 1879. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 2e année. Nos 15-21; août-novembre 1879. — Gr. in-8°.

BOSTON. — *Memoirs of the Boston Society of Natural History.* T. III, Part. 1, nos 1-2; 1878-79. — In-4°.

- *Proceedings of the Boston Society of Natural History.* T. XIX, fasc. 3-4; t. XX, fasc. 1; 1877-1878. — In-8°.

— *Science Observer. A journal for Scientists.* Juillet 1879. — In-8°.

BRUXELLES. — *Bulletin de la Société Belge de Microscopie.* 5e année, nos 9-13; juin-octobre 1879. — In-8°.

— *Société Entomologique de Belgique.* Série II, nos 63-65. *Comptes rendus des Assemblées de avril-juin 1879.* — Gr. in-8°.

— *Introduction à la Bibliographie de Belgique. Relevé de tous les écrits périodiques qui se publient dans le royaume.* 1877. — 1 vol. in-8°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.* 1879. — 1 vol. in-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.* Vol. V, nos 11-14; 1879. — In-8°.

— *Memoirs of the Museum of comparative Zoölogy at Harvard College.* Vol. VI, 1re partie : *The Auriferous Gravels of the Sierra Nevada of California, by J. D.* WHITNEY. 1879. — In-4°.

CARACAS. — *La Gaceta cientifica de Venezuela.* 2e année, t. II, nos 26, 28-45; t. III, nos 2-4; 1878-79. — Gr. in-4°.

CATANE. — *Atti dell' Accademia Gioenia di Scienze naturali in Catania.* 3e série, t. XI-XII; 1877-1878. — In-4°.

CHERBOURG. — *Mémoires de la Société nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg.* T. XXI (3e série, t. I); 1877-1878. — Gr. in-8°.

— *Catalogue de la Bibliothèque de la Société nationale des Sciences naturelles de Cherbourg.* 2e partie, 2e livraison. 1878. — Gr. in-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes*

Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1879. N° 2. — In-8°.

DANZIG. — *Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig.* 2e série, t. IV, fasc. 3; 1878. — Gr. in-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax.* 4e année (1879), 3e trimestre. — Gr. in-8°.

DUBLIN. — *Proceedings of the Royal Irish Academy.* Vol. I, 2e série, n° 3; avril-juillet 1879. — In-8°.

— *The Transactions of the Royal Irish Academy.* Vol. XXVI. *Science,* nos 18-21; *Polite Literature and Antiquities,* nos 2-3. 1879. — 5 fasc. in-4°.

— *Æneidea, or Critical, Exegetical and Æsthetical Remarks on the Æneis. by* JAMES HENRY. T. II (suite); 1879. — Gr. in-8°.

— *Journal of the Royal Geological Society of Ireland.* 2e série, t. V, 2e partie; 1878-79. — In-8°.

GLASGOW. — *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.* T. XXII, 1878-79. — In-8°.

GRENOBLE. — *Bulletin de l'Académie Delphinale.* 3e série, t. XIV; 1879. — In-8°.

— *Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère.* 3e série, t. VIII; 1879. — Gr. in-8°.

HALLE. — *Festchrift zur Feier des hundertjährigen Bestehens der Naturforschenden Gesellschaft in Halle a. S.* 1879. — 1 vol. in-4°.

HARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem.* T. XIV, livr. 1-2; 1878-79. — In-8°.

HAVRE (LE). — *Société des Sciences et Arts agricoles et horticoles du Havre.* 14e Bulletin, 1879. — In-8°.

HEIDELBERG. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. II, fasc. 4. 1879. — Gr. in-8°.

INNSBRUCK. — *Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.* 8e année, 1877; fasc. 2-3. — In-8°.

KAZAN. — *Izviestia i outchonya Zapiski...* Bulletin et Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan. XLIVe année, 1877. — 6 fasc. gr. in-8°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles.* 2e série, t. XVI, n° 82, 1879. — In-8°.

LEIPZIG. — *Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.* T. XI, nos 6-8; t. XII, n° 1; 1876-78. — In-4°.

LEIPZIG. — *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physikalische Classe.* 1875 (nos 2-4), 1876, 1877, 1878. — 6 fasc. in-8°.

— *Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft.* 1878-1879. — 2 fasc. in-8°.

— *Sitzungsberichte der Naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig.* 5e année, 1878. — Gr. in-8°.

— *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* 14e année, fasc. 3; 1879. — In-8°.

LILLE. — *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.* 4e série, t. VI; 1879. — Gr. in-8°.

LONDRES. — *The Journal of the Linnean Society. Botany.* Vol. XVI-XVII, Nos 93-102. — *Zoology.* Vol. XIII-XIV, Nos 72-79; 1877-1879. — In-8°.

— *List of the Linnean Society.* 1877-1878. — 2 fasc. in-8°.

— *Journal of the Royal Microscopical Society.* Vol. II, nos 5-6, août-octobre 1879. — In-8°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* Vol. IX, n° 9; 1879. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 145-147. — In-8°.

— *Proceedings of the Royal Society.* Vol. XXVI-XXIX, nos 184-196. — In-8°.

LUXEMBOURG. — *Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des Sciences naturelles.* T. XVII; 1879. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société scientifique industrielle de Marseille.* Année 1878, 4e trimestre. — Gr. in-8°.

MILAN. — *Atti della Società Crittogamologica Italiana residente in Milano.* T. II, fasc. 1, 1879. — Gr. in-8°.

— *Atti della Società Italiana di Scienze naturali.* T. XIX, fasc. 4; t. XX, fasc. 3-4; t. XXI, fasc. 3-4; 1877-1879. — In-8°.

— *Memorie del Reale Istituto di Scienze e Lettere. — Classe di Scienze matematiche e naturali.* T. XIII (série III, t. IV), fasc. III; t. XIV (série III, t. V), fasc. 1-2; 1877-1879. — *Classe di Lettere e Scienze morali e politiche.* T. XIII (série III, t. IV), fasc. 3-4; 1877-1878. — Gr. in-4°.

— *Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Rendiconti,* 2e série, t. IX-XI; 1876-1878. — 3 vol. in-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1879, n° 1, t. LIV. — In-8°.

MUNICH. — *Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe*

der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften. T. XIII, 2e Partie; 1879. — In-4°.

— *Ueber die chemische Synthese. Festrede gehalten in der öffentlichen Sitzung der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München am 25. Juli 1878 von Dr.* AD. BAEYER. — In-4°.

— *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1879, fasc. 1. — In-8°.

NANCY. — *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy.* 2e série, t. IV, fasc. 8; 11e année; 1878. — Gr. in-8°.

— *Mémoires de l'Académie de Stanislas.* 4e série, t. XI; 1878. — In-8°.

NEW-YORK. — *Annals of the Lyceum of Natural History.* T. XI, nos 9-12; 1876-77. — In-8°.

— *Annals of the New York Academy of Sciences (late Lyceum of Natural History).* T. I, nos 1-8; 1877-78. — Gr. in-8°.

OFFENBACH A. M. — *17r und 18r Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde in den Vereinsjahren vom 9. Mai 1875 bis 13. Mai 1877.* — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Compte rendu de la 7e session. Paris, 1878.* — 1 vol. gr. in-8°.

— *Association Française pour l'avancement des Sciences. Informations et documents divers.* N° 23. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXII, nos 3-9, août-novembre 1879. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. VII, n° 5; 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série, t. III, avril-juillet 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 3e série, t. II, 2e fasc.; 1879. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXIX, nos 2-17; juillet-octobre 1879. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. VIII, nos 92-94, août-octobre 1879. — Gr. in-8°.

— *Revue des Sociétés savantes. Sciences mathématiques, physiques et naturelles.* 2e série, t. IX; 1875. — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia.* 1878. — 1 vol. in-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia for promoting Useful Knowledeje.* Vol. XVIII, nos 102-103; 1878-79. — In-8°.

PHILADELPHIE. — *The Geological Relations of the Lignitic Groups, by* JOHN J. STEVENSON. 1875. — In-8°.

— *Second Geological Survey of Pennsylvania.* 1875. *Report of Progress of the Greene and Washington District of the Bituminous Coal-Fields of Western Pennsylvania,* by J.-J. STEVENSON. — 1876-1877. *Report of progress in the Fayette and Westmoreland District of the Bituminous Coal-Fields of Western Pennsylvania, by J.-J. Stevenson.* 2 vol. = 3 vol. in-8°.

— *Mines and Mineral Statistics of New South Wales, and Notes on the Geological Collection of the Department of Mines, compiled by direction of the Hon.* JOHN LUCAS, *Minister for Mines.* 1875. — 1 vol. in-8°.

— *The Argentine Ropublic, written in German by* RICHARD NAPP, *assisted by several fellow-writers, for the Central Argentine Commission of the Centenary Exhibition at Philadelphia.* 1876. Buenos-Ayres. — 1 vol. in-8°.

— *Anno biographico Brazileiro, por* JOAQUIM MANOEL DE MACEDO. T. I. Rio de Janeiro, 1876. — 1 vol. in-8°.

— *Brazilian Biographical Annual, by* JOAQUIM MANOEL DE MACEDO. — Vol. I. Rio de Janeiro. 1876. — 1 vol. in-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali, 6 luglio 1879.* — Gr. in-8°.

— *Il Nuovo Cimento.* 3e série, t. VI, juillet-octobre 1879. — In-8°.

PRAGUE. — *Abhandlungen der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften vom Jahre 1877 und 1878.* 6e série, t. IX. — In-4°.

— *Jahresberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften ausgegeben am 9 Mai 1877.* — In-8°.

— *Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang* 1878. — In-8°.

— *Archiv mathematiky a fysiky.* T. II, n° IV; 1879. — In-8°.

LA ROCHELLE. — *Académie de La Rochelle. Section des Sciences naturelles. Annales.* 1878. N° 15. — In-8°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 32e Année, 1879. 7e séance. — In-8°.

— *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 32e année, séances I et II, 1878-79. — 2 fasc. in-4°.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno CCLXXVI, 1878-79. Serie terza. Transunti. Vol. III,* fasc. 7; juin 1879. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XII, mai-juillet 1879. — In-4°.

ROUEN. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de*

Rouen. T. V, 1869; t. XIV, 1878; t. XV, 1er semestre, 1879. — 4 fasc. in-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Acta Horti Petropolitani*. T. VI, fasc. 1; 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*. T. XXV, n° 4; 1879. — Gr. in-4°.

SASSARI. — *Annuario del Circolo di Scienze mediche e naturali di Sassari*. 1re année, 2e fasc., 1879. — Gr. in-8°.

STUTTGART. — *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunde in Württemberg*. XXXVe année, 1878. — 1 vol. in-8°.

TOULOUSE. — *Revue mycologique. Recueil trimestriel illustré, consacré à l'étude des Champignons. Dirigé par M.* C. ROUMEGUÈRE. 1re année, 1879, nos 3 et 4. — Gr. in-8°.

TURIN. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*. T. XIV, fasc. 5-7; 1879. — Gr. in-8°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique*. T. XXXII, nos 7-10, 1879. — In-8°.

WASHINGTON. — *Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the Year 1877*. — 1 vol. in-8°.

— *Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1877*. — 1 vol. in-8°.

— *Engineer Department, United States Army. Report upon Geographical and Geological Explorations and Surveys West of the one hundredth Meridian, in charge of first Lieut. Geo. M. Wheeler. Part IV, vol. III. Geology*. 1875. — In-4°.

— *Tenth Annual Report of the United States Geological and Geographical Survey of the Territories, embracing Colorado and parts of adjacent Territories, being a Report of Progress of the Exploration for the Year 1876. By* F.-V. HAYDEN, *U. S. Geologist*. 1878. — 1 vol. in-8°.

— *United States Geological Survey of the Territories*. F.-V. HAYDEN *Geologist in Charge. Miscellaneous Publications*. N° 9. *Descriptive Catalog of Photographs of North American Indians. By* W.-H. JACKSON, 1877. In-8°. — N° 10. *Bibliography of North American invertebrate Paleontology, By* C.-A. WHIT *and H. Alleyne Nicholson*, 1878. In-8°. — *Illustrations of Cretaceous and Tertiary Plants of the Western Territories of United States*; 1878. In-4°.

— *Sketch of the Life and Contributions to Science of Prof.* JOSEPH HENRY, L. L. D., *Secretary of the Smithsonian Institution*. In-8°.

— *National Board of Health. Bulletin*. Vol. I, Nos 4-6, 12-13; juillet-septembre 1879. — In-4°.

BATTAGLINI (G.). — *Sui connessi ternarii di 2° ordine e di 2ª classe in involuzione semplice.* Napoli, 1879. — In-4°.

CADÈNE (M.). — *De la sclérotomie dans le traitement du Glaucome.* Thèse pour le Doctorat en Médecine, soutenue à Bordeaux, 1879. — In-4°.

MANSUY (P.). — *Nouvelle théorie des Marées.* Autographié. Paris, 1879. — In-8°.

ROUMEGUÈRE (C.). — *Statistique botanique du département de la Haute-Garonne.* Paris, 1876. — In-8°.

— *Nouveaux documents sur l'histoire des plantes cryptogames et phanérogames des Pyrénées. Correspondances scientifiques inédites, échangées par Picot de Lapeyrouse, P. de Candolle, etc., avec P. de Barrera, Coder et Xatard.* Paris, 1876. — In-8°.

— *Léon Dufour, botaniste.* Paris, 1878. — In-8°.

— *Notice nécrologique sur* M. CH. DURIEU DE MAISONNEUVE. Alger, 1878. — In-8°.

THUOT (J.-B.). — *Notice sur quelques restes d'édifices romains trouvés dans le rempart vitrifié de Puy-de-Gaudy.* Guéret, 1879. — In-8°.

TOMMASI (DONATO). — *Sulla non esistenza dell idrogeno nascente. Parte quinta. Riduzione del perclorato potassico.* Firenze, 1879. — Gr. in-8°.

— *Ricerche sulle formole di costituzione dei composti ferrici. Parte prima. Idrati ferrici.* Firenze, 1879. — In-4°.

Séance du 27 novembre 1879.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, octobre 1879. — Gr. in-8°.

BÉZIERS. — *Bulletin de la Société d'étude des Sciences naturelles de Béziers.* 1878, 3e année, 2e fasc. — Gr. in-8°.

BONN. — *Verhandlungen des naturhistorischen Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 55e année (4e série, 5e année). 1878. — 1 vol. in-8°.

BORDEAUX. — *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux.* 4e série, t. III, livr. 3-4, 1879. — Gr. in-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année, nos 16-17, novembre 1879. — In-4°.

— *Société de Géographie Commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 2e année, n° 22, 17 novembre 1879. — Gr. in-8°.

— *Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.* Thèse n° 1, série 2. *De la conduite à tenir dans les hémorrhagies traumatiques*

de la fesse et de la partie supérieure de la cuisse. Par Th. Boissérie-Lacroix. 17 novembre 1879. — In-4°.

Paris. — *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel.* 1879, 3e trimestre. — *Table analytique des 5 premiers volumes.* — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, T. LXXXIX, nos 18-19, novembre 1879. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. VIII, no 95, novembre 1879. — Gr. in-8°.

Mathematics in a Dilemma. Complimentary Edition. New-York, 1879. — In-8°.

Séance du 11 décembre 1879.

Berlin. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Juillet-août 1879. — In-8°.

Bordeaux. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année, nos 18-19; novembre-décembre 1879. — In-4°.

— *Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.* Thèse no 2. *Étude clinique et pathologique sur quelques anomalies dans la variole, par* F. Bompar. In-4°. — *Étude chimique sur les ammoniaques composées : Thèse par* J.-F. Geneste. In-8°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 2e année, no 23, 1er décembre 1879. — Gr. in-8°.

Bruxelles. — *Société Belge de Microscopie.* No 1. Procès-verbal de la séance du 30 octobre 1879. — In-8°.

Cambridge. — *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.* Vol. III, fasc. 3-6, décembre 1877 à mai 1879. — In-8°.

— *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.* T. XII, fasc. 3; 1879. — In-4°.

Genève. — *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève.* T. XXVI, 2e partie; 1879. — In-4°.

Glasgow. — *Proceedings of the Philosophical Society of Glasgow.* T. XI, no 2; 1878-79. — In-8°.

Londres. — *Memoirs of the Royal Astronomical Society.* T. XLIV; 1877-79. — In-4°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 148-150. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXII, no 10; 5 décembre 1879. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXIX, nos 20-21, novembre 1879. — In-4°.

SEMUR. — *Bulletin de la Société des Sciences historiques et naturelles de Semur*. 15e année, 1878. — Gr. in-8°.

TOMMASI (Dr D.). — *Sull' equilibrio termico nelle azioni chimiche*. Pise, 1879. — *Réduction du chlorure d'argent*. Paris, 1879. — *Nuove prove in conferma alla teoria termica sullo stato nascente dell' idrogeno*. Florence, 1879. — 3 broch. in-8°.

Séance du 8 janvier 1880.

ARBOIS. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois (Jura)*. 3e année, 1879, n° 2. — In-8°.

AUGSBOURG. — *25ter Bericht des Naturwissenschaftlichen Vereins in Augsbourg*. 1879. — In-8°.

BORDEAUX. — *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux*. Volume XXXIII, 4e série, t. III, 5e livr., 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux*. 19e année, octobre-novembre 1879. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, nos 20-23, décembre 1879 à janvier 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 2e année, n° 24; 3e année, n° 1. 1879-1880. — Gr. in-8°.

— *Faculté des Sciences de Bordeaux. Thèses présentées pour obtenir le grade de docteur ès sciences naturelles*, par G. DUTAILLY. *Sur quelques phénomènes déterminés par l'apparition tardive d'éléments nouveaux dans les tiges et les racines de dicotylédones*. 1879. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Belge de Microscopie*. N. 11. *Procès verbal de la séance du 27 novembre 1879*. — In-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax*. 4e année (1879), 4e trimestre. — Gr. in-8°.

GIESSEN. — *18ter Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde*. 1879. — In-8°.

HALLE. — *Mittheilungen des Vereins für Erdkunde zu* Halle a S. 1879. — Gr. in-8°.

KAZAN. — *Izviestyia*... Bulletins et Mémoires de l'Université Impériale de Kazan. 45e année, 1878. — 6 fasc. gr. in-8°.

LEIPZIG. — *Publicationen der Astronomischen Gesellschaft*. XIV. *Fundamental-Catalog für die Zonen-Beobachtungen am nördlichen Himmel; von* A. AUWERS. 1879. — XV. *Untersuchungen über die Durchmesser der Planeten Venus und Mars nach Heliometermessungen auf der provisorischen Universitäts-Sternwarte zu Strass-*

burg, mit Hinzuziehung der anderweitigen vorhandenen Mikrometerbeobachtungen; von ERNST HARTWIG. 1879. — 2 fasc. in-4°.

— *Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.* T. XII, nos 2-3; 1879. — 2 fasc. in-4°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society.* T. II, nos 7 et 7a; décembre 1879. — In-8°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XI, n° 1; novembre 1879. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Scientifique industrielle de Marseille.* Année 1879, 1er fasc. — Gr. in-8°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1879, n° 2. — In-8°.

PARIS. — *Annales du Conservatoire des Arts et Métiers.* N° 41; t. XI, 1er fasc., 1879. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXII, n° 11, 15 décembre 1879. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série, t. III, août 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris.* 2e série, t. II, fasc. 3; avril-juillet 1879. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXIX, nos 22-24, novembre-décembre 1879. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. VIII, n° 96, décembre 1879. — Gr. in-8°.

— *Revue des Sociétés savantes, Sciences mathématiques, physiques et naturelles.* 3e série, t. I, 1878; 4e livr. — Gr. in-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa. Processi verbali,* vol. II. Novembre 1879. — Gr. in-8°.

PRAGUE. — *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky.* T. VIII, 1878. — In-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXXII, 3e séance, 16 février 1879. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XII, août 1879. — In-4°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXXII, nos 1-3, janvier-mars 1879. — In-8°.

Séance du 22 janvier 1880.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Septembre-octobre 1879. — In-8°.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, n° 24; 10 janvier 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 3e année, n° 2; janvier 1880. — Gr. in-8°.

HELSINGFORS. — *Observations météorologiques publiées par la Société des Sciences de Finlande*. Année 1877. — 1 vol. in-8°.

— *Öfversigt af Finska Vetenskaps-Societetens Förhandlingar*. XXI; 1878-1879. — 1 vol. in-8°.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. T. XL, n° 2; décembre 1879. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou*. Année 1879, n° 2. — In-8°.

NEUCHATEL. — *Bulletin de la Société des Sciences naturelles de Neuchatel*. T. XI, 3e cahier, 1879. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXII, n° 12; t. XXXIII, n° 1; décembre 1879 à janvier 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France*. T. VII, n° 6; 1879. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. LXXXVIII, 1879, *Table des matières*; t. LXXXIX, nos 25-26; décembre 1879. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IX, n° 97, janvier 1880. — Gr. in-8°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. 33e année, 1879, 1re séance. — In-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*. T. XXV, n° 5, octobre 1879. — Gr. in-4°.

Séance du 5 février 1880.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, nos 25-27, janvier 1880. — In-4°.

— *Le Sud-Ouest Médical, Revue de Médecine, de Chirurgie et d'Oculistique*. Directeur : le Dr BADAL. N° 1, janvier 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. (2e série, 3e année). N° 3, 2 février 1880. — Gr. in-8°.

BREST. — *Bulletin de la Société Académique de Brest*. 2e série, T. VI, 1er fasc. 1879. — In-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Annual Report of the Curator of the Museum*

of Comparative Zoölogy at Harvard College, for 1878-79. — In-8°.

— *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College, in Cambridge.* T. V, nos 15-16; 1878-1879. — In-8°.

GRENOBLE. — *Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère.* 3e série, t. IX; 1879. — Gr. in-8°.

LE HAVRE. — *Société des Sciences et Arts agricoles et horticoles du Havre.* 15e Bulletin, 1879. — In-8°.

LONDRES. — *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 151-152. — In-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali, pubblicata da Medici dell' Ospitale Maggiore di Milano.* 1re année, no 1, janvier 1880. — In-8°.

MOSCOU. — *Matematitcheskii Sbornik.* T. X, 3e fasc., 1879. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XC, nos 1-3, janvier 1880. — In-4°.

ROME. — *Atti della R. Accademia dei Lincei.* 3e série, t. IV. *Transunti,* fasc. 1, décembre 1879. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XII, septembre 1879. — In-4°.

BERLINER (E.). — *Improvement in Electrical-Contact Telephones.* Boston, 1880. — Gr. in-8°.

DUBRUEIL (E.). — *Société des Sciences naturelles de Province.* Montpellier. — Gr. in-8°.

MONCORVO (Dr), trad. par le Dr MAURIAC. — *Notion sur l'action physiologique et thérapeutique de la* Carica-Papayo. Bordeaux, 1880. — In-8°.

WEX (GEORG, Ritter von). — *Zweite Abhandlung über die Wasserabnahme in den Quellen, Flüssen und Strömen, bei gleichzeitiger Steigerung der Hochwässer in den Culturländern.* Vienne, 1879. — Gr. in-4°.

Séance du 19 février 1880.

BERLIN. — *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Novembre 1879. — In-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von C. Ohrtmann u. a.* T. IX, année 1879, 3e fasc.; 1880. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 19e année, décembre 1879. — In-8°.

Bordeaux. — *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, nos 28-29; février 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* (2e série, 3e année). N° 4, 16 février 1880. — Gr. in-8°.

Cambridge (Mass.). — *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College*. T. VI, nos 1-2; 1879. — In-8°.

Erlangen. — *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen*. 11e fasc., novembre 1878 à août 1879. — In-8°.

Francfort-sur-le Mein. — *Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen Naturforschenden Gesellschaft*. T. XI, fasc. 4; 1879. — In-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschenden Gesellschaft*. 1878-1879. — In-8°.

Kiel. — *Schriften der Naturforschenden Vereins für Schleswig-Holstein*. T. III, 2e fasc.; 1880. — Gr. in-8°.

Londres. — *Journal of the Royal Microscopical Society*. T. III, n° 1, février 1880. — In-8°.

Paris. — *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel*. 1879, 4e trimestre. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, nos 4-5, janvier-février 1880. — In-4°.

Pise. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali*. 11 janvier 1880. — Gr. in-8°.

Rome. — *Atti della R. Accademia dei Lincei*. 3a série, *Transunti*, t. IV, fasc. 2, janvier 1880. — In-4°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique*. T. XXXII, novembre-décembre 1879. — In-8°.

Wurzbourg. — *Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg*. 2e série, t. XIV, fasc. 1-2. 1880. — Gr. in-8°.

Battaglini (G.). — *Sull'equazione differenziale ellittica. Roma*, 1880. — In-4°.

Tommasi (D.). — *Réponse à une Note de M. Phipson, intitulée :* On the Nascent State of Bodies. Paris, 1880. — In-8°.

Séance du 4 mars 1880.

Amiens. — *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel*. N° 61, 1er juillet 1877, 6e année, t. III; nos 82-87, avril-septembre 1879, t. IV. — In-8°.

Besançon. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs*. 5e série. t. III, 1878. — In-8°.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année, nos 30-31, février 1880. — In-4o.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série. 3e année, no 5, 1er mars 1880. — Gr. in-8o.

— *Le Sud-Ouest médical.* 1re année, no 2, février 1880. — In-4o.

INNSBRUCK. — *Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.* IXe année, 1818. — In-8o.

LILLE. — *Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille. Programmes des concours ouverts pour l'année 1880.* — Gr. in-8o.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XL, no 3, janvier 1880. — In-8o.

LYON. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts de Lyon. Classe des Sciences.* T. XXIII, 1878-1879. — Gr. in-8o.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali.* 1re année, nos 2-3, février 1880. — In-8o.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1879, fasc. III. — In-8o.

PARIS. — *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série, t. III, septembre 1880. — Gr. in-8o.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XC, nos 6-7, février 1880. — In-4o.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IX, no 98, février 1880. — Gr. in-8o.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 33e année, 1880, 2e séance. — In-8o.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XII, octobre 1879. — In-4o.

SAINT-JEAN-D'ANGÉLY. — *Bulletin de la Société Linnéenne de la Charente-Inférieure.* T. I, années 1877-1879. — In-8o.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques et naturelles de Toulouse.* T. III et IV (1re livraison), 1875-1878. — Gr. in-8o.

— *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.* 8e série, t. I, 1879. — Gr. in-8o.

ZURICH. — *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.* 23e année, 1878. — In-8o.

Séance du 18 mars 1880.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année, nos 32-33, mars 1880. — In-4o.

BORDEAUX. — *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, n° 6, 15 mars 1880. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Belge de Microscopie.* N° III. *Procès-verbal de la séance du 8 janvier 1880.* — In-8°.

BUDAPEST. — *Bibliotheca Hungarica historiae naturalis et matheseos. Magyarorszag Természettudományi és Mathematikai Könyvészete.* 1472-1875. *Készítettet* SZINNYEI JÓZSEF. *Kiadja a Kir, természettudományi Társulat.* 1878. — Un vol. gr. in-8°.

— *A Kir. Magyar természettudományi Társulat Könyveinek czimjegyzéke. Összeállitotta* HELLER ÁGOST. 1877. — Un vol. gr. in-8°.

— *Magyarország... Ungarns Spinnen-Fauna. Im Auftrage der kön. Ungar. Naturwissenschaftlichen Gesellschaft verfasst von* OTTO HERMAN. III. Bd, 1879. — In-4°.

— *Magyar Fakóérczek chemiai Elemzése. Chemische Analyse ungarischer Fahlerze. Von Dr.* KOLOMAN HIDEGH. 1879. — In-4°.

COIMBRA. — *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo Dr.* FRANCISCO GOMES TEIXEIRA. Coimbra, 1877-1878. Tome Ier. — In-8°.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. Annual Report of the Council.* T. XL, n° 4; février 1880. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 253-155. — In-8°.

NAPLES. — *Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli.* 2e série, t. XVI; 1879. — In-4°.

— *Lavori accademici del R. Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali, economiche e tecnologiche di Napoli nell' anno 1879. Dal Segretario perpetuo* F. DEL GIUDICE. 1880. — In-4°.

— *Rendiconti dell' Accademia delle Scienze fisiche e matematiche (Sezione della Società Reale di Napoli).* Années XVII-XVIII; 1878-1879. — In-4°.

PARIS. — *Association Française pour l'Avancement des Sciences. Informations et documents divers.* N° 24. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIII, nos 1-5, janvier-mars 1880. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XC, nos 8-9; février-mars 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IX, n° 99, mars 1880. — Gr. in-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento.* 3e série, t. VII, janvier-février 1880. — In-8°.

PRIVAS. — *Bulletin de la Société d'Agriculture, Industrie, Sciences, Arts et Lettres du département de l'Ardèche. Nouvelle série, faisant suite aux Bulletins de la Société d'Agriculture et de la Société des Sciences naturelles et historiques de ce département.* T. I[er], 1879. — In-8°.

VIENNE. — *Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien.* Année 1878-79. — 1 vol. in-12.

Séance du 15 avril 1880.

ALAIS. — *Mémoires et Comptes rendus de la Société scientifique et littéraire d'Alais.* Année 1878; t. X, 2[e] Bulletin. — Gr. in-8°.

AMIENS. — *Bulletin de la Société Industrielle d'Amiens.* T. XVIII, n[os] 1-2, janvier-mars 1880. — Gr. in-8°.

ANGERS. — *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire.* 50[e] année, 20[e] de la 3[e] série; 1879, 2[e] semestre. — In-8°.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3[e] série, 1[er] trimestre 1880. — Gr. in-8°.

BATAVIA. — *Natuurkundig Tijdschrift voor Nederlandsch Indië, uitgeyeven door de Natuurkuudige Vereeniging in Nederlandsch Indië.* T. XVI (4[e] série, t. II), fasc. 3; t. XXII (5[e] série, t. II), fasc. 1-6; t. XXXVIII (7[e] série, t. 8). — In-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Décembre 1879. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 20[e] année, janvier-février 1880. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9[e] année, n[os] 34-37, mars-avril 1880. — In-4°.

— *Le Sud-Ouest Médical.* 1[re] année, n° 3, mars 1880. — In-4°.

BRUXELLES. — *Annales de la Société Entomologique de Belgique.* T. XXII; 1879. — Gr. in-8°.

— *Société Entomologique de Belgique.* Série II, n[os] 69-72, octobre-décembre 1879. — Gr. in-8°.

— *Société Belge de Microscopie.* N° 5. *Procès-verbal de la séance du 4 mars 1880.* — In-8°.

BUDAPEST. — *Értekezések a Mathematikai Tudományok Köréből. Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia.* T. VI, n[os] 3-7, 9, 1878-78; t. VII, n[os] 1, 2, 4, 5, 1879. — In-8°.

— *Értekezések a Természettudomanyok Köréből. Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia.* T. VIII, n[os] 8-15, 1877-1878; t. IX, n[os] 1-19, 1879. — In-8°.

BUDAPEST. — *Mathematikai és természettudományi Közlemények. Vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a Magyar Tudományos Akadémia Mathematikai és Természettudományi állandó bizottsága.* T. XIV-XV, 1877-1878. — In-8°.

— *A M. T. Akadémia évkönyvei. A mesterségesen koponyákról általában. Különösen pedig egy Csongrádon és Székely-Udvarhelyen talált ilynemü makrokephal és egy alcsúthon talált barbár korból származó koponyáról.* Irta Lenhossék József. 1878. — In-4°.

— *Parlatore Fülöp, Emlékebeszed melyet irt s a Magyar Tudományos Akadémia 1878. Június 16-ki közülésén fölolvasott Dr Haynald Lajos.* 1879. — In-4°.

— *Literarische Berichte aus Ungarn über die Thätigkeit der Ungarischen Akademie des Wissenschaften, u. s. w. Herausgegeben von Paul Hunfalvy.* T. II-III, 1878-1879. — In-8°.

CANNES. — *Mémoires de la Société des Sciences naturelles et historiques, des Lettres et des Beaux-Arts de Cannes et de l'arrondissement de Grasse.* T. VIII, 1878-1879. — In-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax.* 5e année, 1880, 1er trimestre. — Gr. in-8°.

HARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles.* T. XIV, nos 3-5; 1879. — In-8°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society.* T. III, n° 2, avril 1880. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Industrielle de Marseille.* Année 1879, 2e trimestre. — Gr. in-8°.

MILAN. — *Atti della Società Italiana di Scienze naturali.* T. XX, fasc. 3-4, février 1880. — In-8°.

— *Gazzetta degli ospitali, pubblicata da Medici dell' Ospitale Maggiore di Milano.* 1re année, nos 4-5, février 1880. — In-8°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse.* Janvier-mars 1880. — 2 fasc. gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIII, nos 4, 6-7, février-avril 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. VIII, n° 2. 1880. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série, t. III, octobre-novembre 1879. — Gr. in-8°.

— *Revue des Sociétés savantes.* 3e série, t. II, 1879. 1re livraison. — Gr. in-8°.

— *Les Échanges internationaux littéraires et scientifiques.* Par ALPHONSE PASSIER, 1880. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, nos 10-11, mars 1880. — In-4°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Anno* XXXIII (1880), sessione III. — In-8°.

— *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Anno* XXXII. Séances IV-VII, mars-juin 1879. — In-4°.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei.* 1879-1880. 3e série. *Transunti,* fasc. 3, février 1880; t. IV. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XII, novembre 1879. — In-4°.

SAINT-JEAN-D'ANGÉLY. — *Bulletin de la Société Linnéenne de la Charente-Inférieure.* 3e année, 1er volume, 1er trimestre 1879; 4e année, 2e volume, 1er trimestre 1880. — In-8°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXVIII-XXXI, 1875-1878; t. XXXIII, nos 1-2, janvier-février 1880. — In-8°.

WISCONSIN. — *Jahres-Bericht des Naturhistorischen Vereins von Wisconsin.* 1879-1880. — In-8°.

CARLES (P.). — *Étude chimique et hygiénique du vin de Bordeaux.* Thèse pour le doctorat en médecine, 20 mars 1880. Bordeaux. — In-4°.

DARBOUX (G.). — *Mémoire sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre.* (Extrait des *Mémoires de l'Institut* [*savants étrangers*]). Paris, 1880. — In-4°.

HAYDEN (F. V.). — *Sketch of the Origin and Progress of the United States Geological and Geographical Survey of the Territories.* Washington, 1877. — *Hayden's new Maps of Wyoming,* etc. — *Primary Triangulation and Yellowstone Park Mass. — The Laramie Group of Western Wyoming and adjacent Regions; by* A. C. PEALE. Washington, 1879. — *Catalegue of the Publications of the U. S. Geological and Geographical Survey of the Territories.* 3d édition, Washington, 1879. — *The so-called Two-Ocean Pass.* Washington, 1879. — 6 broch. in-8°.

TANNERY (P.). — *A quelle époque vivait Diophante?* Paris, 1879. — *Thalès de Milet. Ce qu'il a emprunté à l'Égypte.* Paris, 1880. — 2 broch. gr. in-8°.

Séance du 29 avril 1880.

BERNE. — *Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern.* Nos 937-978. 1879-1880. — 2 fasc. in-8°.

— *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft*

in Bern den 12., 13. und 14. August 1878. 61. Jahresversammlung. Jahresbericht 1877-1878. — In-8°.

— *Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft in St. Gallen, den 10., 11., und 12. August 1879. 62. Jahresversammlung. Jahresbericht 1878-79.* — In-8°.

BORDEAUX. — *Actes de la Société Linnéenne de Bordeaux.* T. XXXIII (4e série, t. III), livr. 5-6, et Procès-verbaux; 1879-1880. — Gr. in-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* Nos 38-39, avril 1880. — In-8°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* 1878, fasc. 3-4. — Gr. in-8°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, nos 7-8. Avril 1880. — Gr. in-8°.

— *Sud-Ouest Médical.* 1re année, n° 4, avril 1880. — In-4°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College.* T. VI, n° 4, février 1880. — In-8°.

EDIMBOURG. — *Proceedings af the Royal Society of Edinburgh.* T. X, n° 103, 1878-1879. — In-8°.

— *Transactions of the Royal Society of Edinburgh.* T. XXVIII, 3e partie; t. XXIX, 1re partie, 1877-1879. — In-4°.

LE HAVRE. — *Société des Sciences et Arts agricoles et horticoles du Havre.* 16e Bulletin, 1879. — In-8°.

LONDRES. — *Memoirs of the Royal Astronomical Society.* T. XLI, 1879. — In-4°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XL, n° 5, mars 1880. — In-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. LXXXIX, second semestre 1879, Table; t. XC, n° 14, Avril 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IX, n° 100; avril 1880. — Gr. in-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali.* 14 mars 1880. — Gr. in-8°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 33e année, 1880; 4e séance. — In-12.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei.* 3e série. *Transunti*, t. IV, fasc. 4, mars 1880. — In-4°.

TOULOUSE. — *Recueil mycologique, par* M. C. ROUMEGUÈRE. 2e année, n° 2, avril 1880. — Gr. in-8°.

VIENNE. — *Schriften des Vereines zur Verbreitung naturwissenschaftlicher Kenntnisse in Wien.* T. XX, 1878-79. — In-12.

WASHINGTON. — *Report on the Geology of the Henry Mountains; by* G. K. GILBERT. 1877. — In-4°.

— *Report and the Lands of the Arid region of the United States, with a more detailed Account of the Lands of Utah; by* J. W. POWELL, 1879. — In-4°.

— *Bulletin of the United States Geological and Geographical Survey of the Territories.* T. III, n° 4; t. IV, n°s 1, 2, 4; t. V, n°s 1, 2, 3; 1877-1879. — In-8°.

— *Bulletin of the United States Entomological Commission.* N°s 1, 2, 3, 5; 1877-1880. — In-8°.

— *Miscellaneous publication.* N°s 1 et 5, 1877-1875. — In-8°.

Séance du 13 mai 1880.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année; n°s 40-41, mai 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux.* 2e série, 3e année, n° 9; 3 mai 1880. — Gr. in-8°.

BRESLAU. — 56. *Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1879. — Gr. in-8°.

— *Statut der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur.* 1879. — In-4°.

— *General-Sachregister der in den Schriften der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur von 1804 bis 1876 incl. enthaltenen Aufsätze.* 1878. — Gr. in-8°.

CAEN. — *Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie.* 3e série, t. III, 1878-1879. — In-8°.

CASSEL. — *XXVI. und XXVII. Bericht des Vereines für Naturkunde zu Cassel.* 1880. — In-4°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München.* 1879, fasc. IV. — In-8°.

NEW-HAVEN. — *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences.* T. V, 1re partie. 1880. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIII, n° 9, mai 1880. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques.* 2e série, t. III, décembre 1879. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société d'Anthropologie de Paris.* 3e série, t. II, fasc. IV, juillet-décembre 1879. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* T. XC, n°s 12-13, 15-17, mars-avril 1880. — In-4°.

Rome. — *Atti della R. Accademia dei Lincei*. Série III. *Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*. T. III-IV, 1879. — 2 vol. in-4°.

Battaglini (G.). — *Sulle Cubiche ternarie sizigetiche*. 1879. — Gr. in-8°.

Séance du 27 mai 1880.

Arbois. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois (Jura)*. 3e année, 1879, nos 3-4. — In-8°.

Berlin. — *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Janvier 1880. — In-8°.

Bordeaux. — *Journal de Médecine de Bordeaux*. Nos 42-43, 15-22, mai 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 3e année. N° 10, 17 mai 1880. — Gr. in-8°.

Brême. — *Abhandlungen herausgegeben vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen*. T. VI, fasc. 2-3, 1879-80. — In-8°.

— *Beilage N° 7 zu den Abhandlungen des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen. Tabellen über den Flächeninhalt des Bremischen Staats*, etc. 1879. — Gr. in-8°.

Cambridge (Mass.). — *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy, at Harvard College, Cambridge, Mass*. T. VI, nos 5-7. 1880. — In-8°.

Halle. — *Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, redigirt von Dr.* C. G. Griebel. 3e série, t. IV, 1879. — In-8°.

Leipzig. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft*. 14e année, fasc. 4; 1879. — *Catalog der Bibliothek der Astronomischen Gesellschaft. Herausgegeben von Dr.* C. Bruhns. 1880. — In-8°.

Londres. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. T. XL, n° 6, avril 1880. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society*. Nos 156-158. — In-8°.

Paris. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Informations et documents divers*. N° 25. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIII, n° 10, 20 mai 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France*. T. VIII, n° 3, 1880. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, nos 18-19, mai 1880. — In-4°.

PARIS. — *Journal de l'École Polytechnique*. 46e cahier, t. XXVIII. 1879. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IX, n° 101, mai 1880. — Gr. in-8°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. VII, mars-avril, 1880. — Gr. in-8°.

PRAGUE. — *Astronomische, magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1879*. 40e année. — Gr. in-4°.

ROME. — *Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie 3a. Transunti*. T. IV, fasc. 5, avril 1880. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. T. XII, décembre 1879. — Gr. in-4°.

STOCKHOLM. — *Entomologisk Tidskrift e på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm, utgifven af Jacob Spångberg*. T. I, fasc. 1, 1880. — In-8°.

Annuaire des spécialités médicales et pharmaceutiques. 1re année, 1880. Paris. — In-12.

GUILLON (G.). — *Œuvres chirurgicales et médicales du Dr G. Guillon (père)*. Paris, 1879. — 1 vol. in-8°.

TOMMASI (D.). — *Sul ferro dializzato*. Firenze, 1880. — *Ricerche interno alla formazione dell' idrato ferrico*. Torino, 1880. — *On the Reduction of Chloride of Gold*. (*Chemical News*, vol. 41, n° 1059). — *Sur l'hydrogène naissant*. (*Les Mondes*, t. LI.) — 4 broch. gr. in-8°.

Séance du 10 juin 1880.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens*. T. XVIII, n° 3, mai 1880. — Gr. in-8°.

ANGERS. — *Mémoires de la Société Académique de Maine-et-Loire*. T. XXXV. Sciences. 1880. — In-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Février 1880. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin de la Société de Pharmacie de Bordeaux*. 28e année, mars et avril 1880. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, nos 44-45, mai-juin 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 3e année, n° 11, 7 juin 1880. — Gr. in-8°.

— *Faculté de Médecine de Bordeaux. Thèses*. 2e série. N° 4. *Étude historique de la pilocarpine et de son emploi dans les fièvres inter-*

mittentes et dans l'hémianesthésie hystérique, par J. E. Ferré. — N° 5. *Aperçu critique des causes de la coagulation du sang, par* G. Lévy. — 2 fasc. in-4°.

Boston. — *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New series.* T. VI-VII (1re partie) [XIV, XV (1re p.) de la collection]. 1879-1880. — In-8°.

Budapest. — *Mittheilungen aus dem Jarhbuche der kön. ungar. Geologischen Anstalt. Die Basaltgesteine des südlichen Bakony,* von Dr K. Hofmann, 1879. — Gr. in-8°.

Dresde. — *Sitzungsberichte der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Herausgegeben unter Mitwirkung des Redactions-Comité von* Carl Bley, *verantwortlichem Redacteur und erstem Secretair der Gesellschaft.* Année 1879, juillet-décembre. — In-8°.

Erlangen. — *Verhandlungen der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.* Fasc. 1-2, 1865-1870. — In-8°.

— *Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät zu Erlangen.* Fasc. 3, 4, 5, 6, 7 et 10; 1871-1878. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIII, n° 11, 5 juin 1880. — In-8°.

— *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel.* 1er trimestre, 1880. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XC, nos 20-21, mai 1880. — In-4°.

Philadelphie. — *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting Useful Knowledge.* T. XVIII, n° 104, juillet-décembre 1879. — In-8°.

— *The Great West: its Attractions and Resources. By Praf.* F. V. Hayden. 1880. — In-8°.

Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* T. XXXIII, 1re séance, 21 décembre 1879. — In-4°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* 32e année, t. XXXIII, nos 3-4, 1880. — In-8°.

Washington. — *Declinations of Fixed Stars, by* Lewis Boss, Director of Dudley Observatory. — In-4°.

— *United States Naval Observatory;* Gilliss, *Catalogue of 1963 Southern Stars.* — Hall, *Mural zones,* 1846-49. — Harkness, *Longitude of Saint-Louis, Mo.* — Newcomb, *Equatorial fundamental Stars.* — Hall, *Transit Zones,* 1846-49. — Hall, *Meridian Circle Zones,* 1847-49. — Eastman, *Reduction Tables for Transit Observations. Longituds of Detroit, Carlin, and Austin. Longitude of Ogden. Meteorological Observations for 1876. West India Cyclone, 1867.* — Holden, *Catalogue of the Library of the U. S.*

Naval Observatory. I. *Astronomical Bibliography*, 1879. — 12 fasc. in-4°.

— *List of the Institutions, Libraries, etc., in Correspondence with the Smithsonian Institution*, 1872-78. — 2 fasc. gr. in-8°.

Séance du 24 juin 1880.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux*. 9e année, nos 46-47, juin 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 3e année, no 12; 21 juin 1880. — Gr. in-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger*. Année 1879, no 3; année 1880, no 1. — In-8°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles*. 2e série, t. XVI, no 83; mai 1880. — In-8°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society*. T. III, no 3, juin 1880. — In-8°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. T. XL, no 7; mai 1880. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society*. Nos 159-160. — In-8°.

MILAN. — *Atti della Società Crittogamologica Italiana residente in Milano*. 23e année, 2e série, t. II, fasc. 2. — In-4°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*. Avril-mai 1880. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIII, no 12; 20 juin 1880. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, 2e série, t. III, 1879; Table des matières. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, nos 22-23, mai-juin 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. X, no 102. 1880. — Gr. in-8°.

PISE. — *Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa*. T. IV (*Scienze mat. e fis.*, t. II); t. V (*Filos. e Filologia*, t. III); 1879-1880. — 2 vol. in-8°.

— *Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali*, 9 mai 1880. — In-4°.

PRAGUE. — *Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky*. T. IX, 1879. — In-8°.

ROME. — *Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie 3ª Transunti.* T. IV, fasc. 6, mai 1880. — In-4°.

WASHINGTON. — *Eleventh Annual Report of the United States Geological and Geographical Survey of the Territories, embracing Idaho and Wyoming, by* F. V. HAYDEN. 1877. — 1 vol. in-8°.

WURZBOURG. — *Verhandlungen der Physikal.-Medicin. Gesellschaft in Würzburg. Neue Folge.* T. XIV, fasc. 3-4; 1880. — Gr. in-8°.

Séance du 8 juillet 1880.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 16ᵉ année, 1879, trimestres 3-4. — In-8°.

ANGERS. — *Bulletin de la Société d'Études scientifiques d'Angers.* 8ᵉ et 9ᵉ années, 1878-1879. — In-8°.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* Nᵒˢ 48-49; juin-juillet 1880. — In-4°.

— *Le Sud-Ouest Médical.* 1ʳᵉ année, n° 6, juin 1880. — In-4°.

GRAZ. — *Jahresbericht des academischen naturwissenschaftlichen Vereines in Graz.* Années II-V, 1876-1879. — 4 fasc. gr. in-8°.

INNSBRUCK. — *Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.* Années I, fasc. 1-2; II, fasc. 1-3; III, fasc. 1-3; IV, fasc. 1-2; 1870-1874. — In-8°.

LEIPZIG. — *Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.* T. XII, n° 4. — In-4°.

— *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathematisch-physische Classe;* 1879. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Scientifique industrielle de Marseille.* Année 1879, 3ᵉ trimestre. — Gr. in-8°.

MODÈNE. — *Memorie della Regia Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.* T. VIII-IX, 1867-68; t. XIV-XVI, 1874-75. — 5 vol. gr. in-4°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften.* 1880, fasc. 1. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIV, n° 1; juillet 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. VIII, n° 4, 1880. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2ᵉ série, t. IV, janvier 1880. — Gr. in-8°.

STUTTGART. — *Jahreshefte des Vereins für vaterländische Naturkunae in Württemberg*. 36e année, 1880. — In-8°.

TOULOUSE. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Toulouse.* Années X, fasc. 3; XII, fasc. 4; XIII, fasc. 2-4; 1877-1879. — In-8°.

VIENNE. — *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.* T. LXXVII, fasc. 4-5; t. LXXVIII; t. LXIX, fasc. 1-3; 1878-1879. — Gr. in-8°.

BROWN (Alphonse). — *Le Jardin d'Acclimatation à Bordeaux.* Bordeaux, s. a. — In-8°.

Séance du 22 juillet 1880.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, 2e trimestre 1880. — Gr. in-8°.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* T. X, fasc. 1, année 1878. — In-8°.

— *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mars et avril 1880. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 20e année, mai-juin 1880. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 9e année, nos 50-52; 10e année, no 1; juillet-août 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année; nos 13-14, juillet 1880. — Gr. in-8°.

— *Le Sud-Ouest médical.* 1re année, nos 5 et 7, mai et juillet 1880. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Entomologique de Belgique.* Série II, nos 66-68. *Comptes rendus des Assemblées mensuelles, de juillet-septembre 1879.* — Gr. in-8°.

— *Note sur le* BREYERIA BORINENSIS, *par* A. PREUDHOMME DE BORRE. Juin 1879. — Gr. in-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax.* 5e année, 1880, 2e trimestre. — Gr. in-8°.

FRIBOURG-EN-BRISGAU. — *Berichte über die Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft zu Freiburg i. B.* T. VII, fasc. 4; 1880. — In-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* 15e année, fasc. I et II, 1880. — In-8°.

LILLE. — *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.* 4e série, t. VII-VIII; 1880. — Gr. in-8°.

Madrid. — *Revista de los progresos de las Ciencias exactas, fisicas y naturales*. T. XXI, n° 3; 1880. — In-8°.

Odessa. — *Zapiski*... Mémoires de la Section Mathématique de la Société des Naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. II, 1879. — Gr. in-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIV, n° 2, 20 juillet 1880. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, nos 24-26; t. XCI, nos 1-4; juin-juillet 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IX, n° 103, juillet 1880. — Gr. in-8°.

— *Revue des Sociétés savantes*. 3e série, t. II, 1879; 2e livraison. — In-8°.

Pise. — *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. VII, mai-juin 1880. — In-8°.

Rome. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. Anno XXXIII (1880). *Sessioni* VI-VII. — In-12.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei*. *Serie III*. *Transunti*. T. IV, fasc. 7, juin 1880. — In-4°.

Rouen. — *Tératologie entomologique. Recueil de Coléoptères anormaux, par feu M.* S. Mocquerys. *Réimprimé par la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen*. 1880. — In-8°.

Saint-Pétersbourg. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*. T. XXVI, n° 1, mars 1880. — Gr. in-4°.

Toulouse. — *Bulletin de la Société Académique Hispano-Portugaise de Toulouse*. T. I, n° 2, 1880. — Gr. in-8°.

Valenciennes. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique*. T. XXXIII, nos 5-6; mai-juin 1880. — In-8°.

Tommasi (Dott. Donato). — *Ossicloruri alluminici. Osservazioni sull' attuale peso atomico dell' alluminio*. Firenze, 1880. — In-8°.

BULLETIN

DES

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

REÇUES PAR LA SOCIÉTÉ DES SCIENCES PHYSIQUES ET NATURELLES

pendant l'année 1880-1881.

Séance du 11 novembre 1880.

ADELAÏDE. — *Transactions and Proceedings and Report of the Philosophical Society of Adelaide, South Australia, for 1878-79.* — In-8°.

ALAIS. — *Mémoires et Comptes rendus de la Société scientifique et littéraire d'Alais.* Année 1879; t. XI, 1er Bulletin. — Gr. in-8°.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger.* 17e année, 1880, 1er et 2e trimestres. — In-8°.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens.* T. X (moins le n° 2), XI-XVII, XVIII (3, 4, 5); 1872-1880. — Gr. in-8°.

ARBOIS. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois (Jura).* 4e année, 1880, nos 1, 2. — In-8°.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, 3e trimestre, 1880. — Gr. in-8°.

BATAVIA. — *Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië. Door Dr* F. A. BERGSMA. 1re année, 1879. — In-8°.

— *Observations made at the Magnetical and Meteorological Observatory at Batavia.* T. IV, 1879. — Gr. in-4°.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Mai-juillet 1880. — In-8°.

— *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik.* T. X, année 1878; fasc. 2, 1880. — In-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux.* 29e année, juillet-septembre 1880. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 2-15, août-novembre 1880. — In-4°.

— *Mémoires et Bulletins de la Société de Médecine et de Chirurgie de Bordeaux.* Année 1879. — Gr. in-8°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, nos 17-21, septembre-novembre 1880. — Gr. in-8°.

— *Le Sud-Ouest médical, Revue de Médecine, de Chirurgie et d'Oculistique.* 1re année, nos 8-10; août-octobre 1880. — In-4°.

— *Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.* Thèses pour le Doctorat en Médecine, soutenues par MM. A. Giraud et Ch. Eyssautier; août 1880. — In-4°.

Brunswick. — *Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig für das Geschäftsjahr 1879-80.* — In-8°.

Bruxelles. — *Société Belge de Microscopie.* Nos X-XII, juillet-septembre 1880. — In-8°.

Cambridge (Mass.). — *Bulletin of the Museum of comparative Zoölogy, at Harvard College.* T. VII (t. I de la série géologique), n° 1; 1880. — In-8°.

Chicago. — *Report to the Trustees of the « James Lick Trust » of Observations made on Mt. Hamilton,... by S. W. Burnham.* 1880. — In-4°.

Dax. — *Bulletin de la Société de Borda à Dax.* 5e année (1880), 3e trimestre. — Gr. in-8°.

Dublin. — *The Journal of the Royal Dublin Society.* N° 45, t. VII, 1878. — In-8°.

— *The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society. Vol. I-II (new series),* 1877-1880. — In-8°.

— *The Scientific Transactions of the Royal Dublin Society.* 2e série, t. I et II (n° 1), 1877-1880. — In-4°.

— *Proceedings of the Royal Irish Academy. Polite Literature and Antiquities.* T. II (2e série), n° 1. *Science.* T. III (2e série), n° 4; 1879-1880. — In-8°.

— *The Transactions of the Royal Irish Academy.* T. XXVI. *Scienze.* N° 22, 1879. — *Irish Manuscript Series.* T. I, 1880. — 2 fasc. in-4°.

— *Æneidea, or Critical, exegetical, and æsthetical Remarks on the Æneis. By James Henry.* T. II (suite), 1879. — Gr. in-8°.

Giessen. — *19ter Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur-und Heilkunde.* 1880. — In-8°.

Glasgow. — *Transactions of the Institution of Engineers and Shipbuilders in Scotland.* T. XXIII, 1880. — 1 vol. in-8°.

Göttingen. — *Göttingische gelehrte Anzeigen.* 1879. — 2 vol. in-12.

— *Nachrichten von der K. Gesellschaft der Wissenschaft und der Georg-Augusts-Universität aus dem Jahre 1879.* — In-12.

Grenoble. — *Bulletin de l'Académie Delphinale.* 3e série, t. XV; 1879. — In-8°.

HAARLEM. — *Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des Sciences à Harlem.* T. XV, nos 1-2, 1880. — In-8°.

— *Untersuchungen über den Bau und die Entwickelungsgeschichte der Hirudineen, von Dr.* C. K. Hoffmann. 1880. — In-4°.

— *Archives du Musée Teyler.* T. V, 2e partie; 1880. — Gr. in-8°.

HELSINGFORS. — *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ.* T. XI, 1880. — In-4°.

— *Bidrag till kännedom af Finlands natur och folk.* Fasc. 32, 1879. — In-8°.

— *Observations météorologiques publiées par la Société des Sciences de Finlande.* Année 1878. — In-8°.

KAZAN. — *Izviestia*... Bulletins et Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Kazan. 46e année, 1879. — 6 fasc. gr. in-8°.

KHARKOF. — *Soobchtchénia*... Communications et Bulletins des séances de la Société Mathématique près l'Université Impériale de Kharkof. Années 1879-1880. — 2 fasc. gr. in-8°.

— ANDRÉIEF (K. A.): *O postroïénii*... Sur la construction des polaires par rapport aux courbes géométriques planes. 1880. — Gr. in-8°.

LEIPZIG. — *Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft.* 15e année, fasc. 3. — In-8°.

LILLE. — *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.* Années 1841, 1845, 1847 et 1848. — 6 fasc. in-8°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society.* Août-octobre 1880. — 2 fasc. in-8°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XL, nos 8-9, juin 1880. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 161-162. — In-8°.

— *Proceedings of the Royal Society.* T. XXIX-XXX, nos 197-205, juin 1879-juin 1880. — In-8°.

MADRID. — *Revista de los progresos de las Ciencias exactas, fisicas y naturales.* T. XXI, n° 4. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société scientifique et industrielle de Marseille.* Année 1879, 4e trimestre. — Gr. in-8°.

— *Société scientifique et industrielle de Marseille. Catalogue des ouvrages de la Bibliothèque. — Décret du 30 avril 1880 relatif aux chaudières à vapeur.* — 2 fasc. gr. in-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali.* 1re année, nos 6-18, mars-octobre 1880. — In-8°.

MONTPELLIER. — *Académie des Sciences et Lettres de Montpellier.*

Mémoires de la Section des Sciences. T. IX, fasc. 3, 1879. — In-4°.

Moscou. — *Bulletin de la Société Impériale des Sciences de Moscou*. Année 1879, nos 3-4. — In-8°.

Mulhouse. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse*. Juin-septembre 1880. — 2 fasc. gr. in-8°.

Münster. — *8ter Jahresbericht des Westfälischen Provinzial-Vereins für Wissenschaft und Kunst pro 1879*. — In-8°.

Nancy. — *Bulletin de la Société des Sciences de Nancy*. 2e série, t. IV-V, fasc. X-XI, 1879-1880. — 2 fasc. gr. in-8°.

— *Mémoires de l'Académie de Stanislas*. 1879. 4e série, t. XII. — In-8°.

Paris. — *Association Française pour l'Avancement des Sciences*. 8e session; Montpellier, 1879. — 1 vol. gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIV, nos 4-7, septembre-octobre 1880. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France*. T. VIII, n° 5, 1880. — Gr. in-8°.

— *Bulletin de la Société Philomathique de Paris*. 7e série, t. III, nos 3-5; t. IV, nos 1-3; 1879-1880. — In-8°.

— *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*. 2e série, t. IV; février-mai 1880. — 4 fasc. gr. in-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*. 3e série, t. III, fasc. 1-2, janvier-avril 1880. — In-8°.

— *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel*. 1880. 2e trimestre. — In-8°.

— *Annuaire du Club Alpin Français*. 6e année, 1880. — 1 vol. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XCI, nos 5-7, 9-17; août-octobre 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IX, nos 104-106; août-octobre 1880. — Gr. in-8°.

Pise. — *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. VIII, juillet-août 1880. — Gr. in-8°.

La Rochelle. — *Académie de La Rochelle. Section des Sciences naturelles. Annales*. N° 16, 1879. — In-8°.

Rome. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. T. XXXIII, séances II-IV, janvier-mars 1880. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. T. XII, Numéro de décembre 1879, et Table des matières. — In-4°.

Saint-Louis. — *Publications of Missouri Historical Society*. Nos I-IV, 1880. — In-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Acta Horti Petropolitani.* T. VI, fasc. II; 1880. — Gr. in-8°.

STOCKHOLM. — *Entomologisk Tidskrift på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm udgifven af* JACOB SPÅNBERG. T. I, fasc. 2, 1880. — In-8°.

THORN. — *Mittheilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst zu Thorn.* Fasc. 2, 1880. — In-8°.

TOULOUSE. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.* Table alphabétique des matières de la 7e série. — Mémoires, 8e série, t. II, 1er semestre 1880. — Gr. in-8°.

— *Revue Mycologique, par* CH. ROUMEGUÈRE. 2e année, n° 8, octobre 1880. — Gr. in-8°.

UPSAL. — *Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal.* T. VIII-IX, 1876-1877. — 2 fasc. gr. in-4°.

— *Nova Acta Regiæ Societatis Scientiarum Upsaliensis.* 3e série, t. X, fasc. 2, 1879. — In-4°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique.* T. XXXIII, nos 7-9, 1880. — In-8°.

Collection des publications diverses de M. A. BAUDRIMONT. *(Don de la famille.)*

DELBOS (J.). — *Notice sur la découverte de squelettes humains dans le Lehm de Bollwiller (Haut-Rhin).* Paris, 1880. — Gr. in-8°.

ROBINSKI. — *De l'influence des eaux malsaines sur le développement du typhus exanthématique démontrée par des observations.* Paris, 1880. — In-8°.

Séance du 25 novembre 1880.

ARBOIS. — *Bulletin de la Société de Viticulture et d'Horticulture d'Arbois.* 4e année, 1880, n° 3. — In-8°.

BERLIN. — *Physikalische Abhandlungen der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Année 1879. — In-4°.

BORDEAUX. — *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 16-17, novembre 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, n° 22, novembre 1880. — Gr. in-8°.

CAEN. — *Mémoires de l'Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen.* 1880. — In-8°.

— *Académie Nationale des Sciences, Arts et Belles-Lettres de Caen. Séance publique du 4 décembre 1879.* — In-8°.

CAMBRAI. — *Mémoires de la Société d'Émulation de Cambrai.* T. XXXVI. *Séance publique du 16 août 1879.* 1880. — In-8°.

Florence. — *R. Biblioteca Nazionale di Firenze. Pubblicazioni del R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. Sezione di Medicina e Chirurgia e Scuola di Farmacia.* Vol. I, 1876. — *Sezione di Scienze fisiche et naturali.* Vol. I, 1877. — Cavanna (G.): *Studi e ricerche sui Picnogonidi. Parte I^a. Descrizione di alcuni Batraci anuri polimeliani, e considerazioni intorno alla polimelia.* 1877. — Cavanna (G.): *Ancora sulla polimelia nei Batraci anuri. Sopra alcuni visceri del Gallo cedrone* (Tetrao urogallus *Linn.*). 1879. — Eccher (A.): *Sulla teoria fisica dell' elettrotono nei nervi.* 1877. — Eccher (A.): *Sulle forze elettromotrici sviluppate dalle soluzioni saline a diversi gradi di concentrazione...* 1878. — Meucci (F.): *Il globo celeste Arabico del secolo XI, esistente nel Gabinetto di strumenti antichi di Astronomia... del R. Istituto di Studi superiori.* 1878. — Tommasi (D.): *Ricerche sulle formole di costituzione dei composti ferrici. Parte I^a. Idrati ferrici.* 1879. — Gr. in-8°.

Milan. — *Gazzetta degli Ospitalli.* 1re année, n° 20, octobre 1880. — In-8°.

Modène. — *Memorie della Reale Accademia di Scienze, Lettere ed Arti in Modena.* T. XIX; 1879. — In-4°.

New-Haven. — *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences.* T. II, 1re partie; 1870. — In-8°.

Paris. — *Association Française pour l'Avancement des Sciences. Informations et Documents divers.* N° 27. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXIV, n°s 8-10, novembre 1880. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences.* T. XCI, n°s 18-19, novembre 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. IX, n° 107, novembre 1880. — Gr. in-8°.

Pise. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali residente in Pisa. Memorie.* T. IV, fasc. 2; 1880. — Gr. in-8°.

— *Il Nuovo Cimento.* 3e série, t. VIII, sept.-octobre 1880. — In-8°.

Turin. — *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino.* T. XV; 1879-1880. — Gr. in-8°.

— *Bollettino dell' Osservatorio della Regia Università di Torino.* XIVe année, 1880. — In-4°, oblong.

Venise. — *Temi di premio proposti dal R. Istituto Veneto di Scienze. Lettere ed Arti, 15 agosto* 1880. — In-8°.

Washington. — *Index-Catalogue of the Library of the Surgeon-General's Office, United States Army. Authors and Subjects. Vol.* I. *A. Berlinski.* 1880. — 1 vol. in-4°.

— *U. S. Geological Survey of the Territories.* F. V. Hayden, *Geologist in-Charge. Miscellaneous Publications*, n° 12. *History of North American Pinnipeds. A Monography of the Walruses, Sea-Lions, Sea-Bears and Seals of North America. By* J. A. Allen. 1880. — 1 vol. in-8°.

Conil (P. A.). — *Nouveaux cas de myiasis, observés dans la province de Cordoba (République Argentine) et dans la République de Vénézuela.* Cordoba, 1880. — In-8°.

Delmas (P.). — *Physiologie nouvelle de l'Hydrothérapie, d'après des recherches récentes sur l'action du froid et de la chaleur sur l'organisme.* Paris, 1880. — Gr. in-8°.

Rubini (R.). — *Complemento al Calcolo infinitesimale.* Napoli, 1880. — In-8°.

— *Intorno ad un' assertiva di Boole.* Napoli, 1880. — In-4°.

Séance du 9 décembre 1880.

Bonn. — *Verhandlungen des naturforschenden Vereines der preussischen Rheinlande und Westfalens.* 37e année (4e série, 7e année); 1880. — 2 fasc. in-8°.

Bordeaux. — *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux.* 1re année, nos 1-27, juin-décembre 1880. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 18-19, novembre-décembre 1880. — In-4°.

— *Faculté de Médecine et de Pharmacie de Bordeaux.* Thèses. N° 1. J. Courtin. *Du redressement et de l'immobilisation dans le traitement des tumeurs blanches des membres.* — N° 2. Rougier Grangeneuve. *Aperçu historique sur quelques points de pathologie animée...* 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, n° 23, 6 décembre 1880. — Gr. in-8°.

Bruxelles. — *Société Belge de Microscopie.* N° 1. *Procès-verbal de la séance du 30 octobre 1880.* — In-8°.

Cambridge (Mass.). — *Memoirs of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College.* T. VII, n° 1. *Report on the Florida Reefs, by* Louis Agassiz. 1880. — In-4°.

Heidelberg. — *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg.* 2e série, t. II, 5e fasc.; 1880. — Gr. in-8°.

Londres. — *The Journal of the Linnean Society.* Botany, vol. XVII-XVIII, Nos 103-107, 1879-1880. — Zoology, vol. XIV-XV, Nos 80-83; 1879-1880. — In-8°.

MILAN. — *Atti della Società Crittogamologica Italiana residente in Milano.* 2e série, t. III, n° 1; 1881. — Gr. in-8°.

— *Gazzetta degli Ospitali.* 1re année, nos 21-22; novembre 1880. — In-8°.

PARIS. — *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel.* 1880, 3e trimestre. — *Table de l'Annuaire pour 1879.* — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XCI, n° 20, 15 novembre 1880. — In-4°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei.* 33e année, 5e séance, 18 avril 1880. — In-4°.

ROUEN. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen.* 15e année, 1879, 2e semestre. — In-8°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 4e série, t. V-VI, 1878-1880. — In-8°.

Séance du 23 décembre 1880.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, supplément au 3e trimestre de 1880. — Gr. in-8°.

BORDEAUX. — *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux.* 1re année, n° 29; 18 décembre 1880. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 20-21, décembre 1880. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 3e année, n° 24, 20 décembre 1880. — Gr. in-8°.

DANZIG. — *Schriften der naturforschenden Gesellschaft in Danzig.* 2e série, t. IV, fasc. 4, 1880. — Gr. in-8°.

INNSBRUCK. — *Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereines in Innsbruck.* 10e année, 1879. — In-8°.

LONDRES. — *Journal of the Royal Microscopical Society.* T. III, nos 6-6a, décembre 1880. — Gr. in-8°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XLI, n° 1, novembre 1880. — In-8°.

— *Proceedings of the London Mathematical Society.* Nos 163-164. — In-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali.* 1re année, n° 23, 15 décembre 1880. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou.* Année 1880, n° 1. — In-8°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société industrielle de Mulhouse.* Octobre 1880. — Gr. in-8°.

MUNICH. — *Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe*

der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1880, fascicules 2-3. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIV, n° 11, décembre 1880. — In-8°.

— *Bulletins de la Société d'Anthropologie de Paris*. 3e série, t. XII, fasc. 2-3, février-juillet 1880. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XCI, nos 21-23, novembre-décembre 1880. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. IX, n° 108, décembre 1880. — Gr. in-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*. T. XXVI, n° 2, août 1880. — Gr. in-4°.

WASHINGTON. — *Bulletin of the United States Geological Survey of the Territories*. T. V, n° 4, septembre 1880. — In-8°.

PAIVA (ADRIANO DE). — *La Télescopie électrique basée sur l'emploi du sélénium*. Porto, 1880. — In-8°.

Séance du 6 janvier 1881.

ANGERS. — *Bulletin de la Société d'études scientifiques d'Angers*. 10e année, 1880, 1er fasc. — In-8°.

— *Bulletin de la Société industrielle et agricole d'Angers et du département de Maine-et-Loire*. 51e année (21e de la 3e série), 1880, 1er semestre. — In-8°.

BELFAST. — *Proceedings of the Belfast Natural History and Philosophical Society, for the Sessions 1878-1880*. — In-8°.

BORDEAUX. — *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux*. 1re année, nos 28, 30; 2e année, n° 1. Décembre 1880 à janvier 1881. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 10e année, nos 22-23; décembre 1880 à janvier 1881. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Belge de Microscopie*. N° II. *Procès-verbal de la séance du 27 novembre 1880*. — In-8°.

CAEN. — *Bulletin de la Société Linnéenne de Normandie*. 2e série, t. V-VII, années 1869-1873. — In-8°.

GRENOBLE. — *Bulletin de la Société de Statistique, des Sciences naturelles et des Arts industriels du département de l'Isère*. 3e série, t. VI (XVIIe de la collection). 1874. — Gr. in-8°.

LIÈGE. — *Bulletin de la Fédération des Sociétés d'Horticulture de Belgique*. 1879. — Gr. in-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXIV, n° 12, 20 décembre 1880. — In-8°.

PARIS. — *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XC, *Tables*; t. XCI, nos 8, 24 et 25, août-décembre 1880. — In-4°.

ROME. — *Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno* CCLXXVIII, 1880-81. Serie terza. *Transunti*. Vol. V, fasc. I, 5 décembre 1880. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. T. XIII, janvier-février 1880. — In-4°.

ROUEN. — *Bulletin de la Société des Amis des Sciences naturelles de Rouen*. 16e année, 1880, 1er semestre. — In-8°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, littéraire et artistique*. T. XXXIII, n° 10, octobre 1880. — In-8°.

BADAL (Dr). — *Leçons d'Ophthalmologie. Mémoires d'Optique physiologique*. Paris, 1881. — 1 vol. in-8°.

TOMMASI (Donato). — *Sopra una nuova modificazione del triidrato alluminico*. Torino, 1880. — *Réponse à une Note de M. A. Riche sur la réduction du chlorure d'argent par la lumière*. Paris, 1880. — 2 brochures in-8°.

Séance du 20 janvier 1881.

BERLIN. — *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. T. X, année 1878, fasc. 3. 1881. — Gr. in-8°.

BORDEAUX. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux*. 20e année, novembre 1880. — In-8°.

— *Faculté de Médecine. Thèses :* DELAGE (A.). *Des maladies virulentes dans leurs rapports avec les fermentations*. 1880. — BUSQUET (J.-B.-A.). *Des avantages du traitement par occlusion dans les dermatoses*. 1880. — 2 fasc. in-4°.

— *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux*. 2e année, n° 2, 9 janvier 1881. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 10e année, nos 24-25, janvier 1881. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 4e année, n° 2, 17 janvier 1881. — Gr. in-8°.

— *Le Sud-Ouest médical*. 1re année, n° 12, décembre 1880. — In-4°.

BREST. — *Bulletin de la Société Académique de Brest*. 2e série, t. VI, 2e fasc.; 1880. — In-8°.

DAX. — *Bulletin de la Société de Borda*. 5e année, 1880, 4e trimestre. — Gr. in-8°.

LAUSANNE. — *Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences naturelles*. 2e série, t. XVII, n° 84, 1880. — In-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali.* 1re année, n° 24, 30 décembre 1880. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Informations et documents divers.* N° 28. Congrès d'Alger. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXV, n° 1, 5 janvier 1881. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. VIII, n° 6; 1880. — Gr. in-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XCI, n° 26; t. XCII, n° 1; décembre 1880 à janvier 1881. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. X, n° 109, janvier 1881. — Gr. in-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze naturali. Processi verbali*, 14 novembre 1880. — Gr. in-8°.

ROME. — *Atti della R. Accademia dei Lincei.* 1880-1881. *Serie terza. Transunti.* T. V, fasc. 2-3, 1881. — In-4°.

ROTTERDAM. — *Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam.* 1880. — In-8°.

STOCKHOLM. — *Entomologisk Tidskrift, på föranstaltande af Entomologiska Föreningen i Stockholm udgiven af* JACOB SPÅNBERG. T. I, fasc. 3-4, 1880. — In-8°.

WÜRZBOURG. — *Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg.* 2e série, t. XV, fasc. 1-2; 1881. — Gr. in-8°.

Séance du 3 février 1881.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens.* T. XVIII, n° 6, novembre 1880. — Gr. in-8°.

BARCELONE. — *Crónica científica, Revista internacional de Ciencias, publicada por* D. RAFAEL ROIG Y TORRES. 4e année, nos 73-74; janvier 1881. — Gr. in-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Septembre et octobre 1880. — In-8°.

BESANÇON. — *Mémoires de la Société d'Émulation du Doubs.* 5e série, t. IV, 1879. — In-8°.

BORDEAUX. — *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales.* 2e année, nos 4-5; janvier 1881. — In-8°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 26-27, janvier 1881. — In-4°.

BORDEAUX. — *Faculté de Médecine*. Thèse : *Contribution à l'étude des atrophies musculaires réflexes; par* H. GUICHARD. 1881. — In-4°.

BRUXELLES. — *Société Belge de Microscopie*. N° III. *Procès-verbal de la séance du 30 décembre 1880*. — In-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Museum of Comparative Zoölogy. Annual Report of the Curator for 1879-1880*. — In-8°.

— *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy*. Vol. VI. N°s 8-9 et 11; 1880. — 2 fasc. in-8°.

— *Memoirs of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. T. VI, n° 1 et Appendice au n° 2; t. VII, n° 2, 1re partie; 1880. — 3 fasc. in-4°.

FRANCFORT-SUR-MEIN. — *Abhandlungen herausgegeben von der Senckenbergischen naturforschenden Gesellschaft*. T. XII, fasc. 1-2; 1880. — In-4°.

— *Bericht über die Senckenbergische naturforschende Gesellschaft*. 1879-1880. — In-8°.

LE HAVRE. — *Société des Sciences et Arts agricoles et horticoles du Havre. 19e Bulletin*. (1880, 2e trimestre). — In-8°.

LILLE. — *Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille. Programme des concours pour 1881*. — In-8°.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — T. XLI, n° 2, décembre 1880. — In-8°.

MILAN. — *Gazetta degli Ospitali*. 2e année, n° 1, janvier 1881. — In-8°.

MULHOUSE. — *Bulletin de la Société Industrielle de Mulhouse*. Novembre-décembre 1880. — Gr. in-8°.

OSNABRÜCK. — *Viertes Jahresbericht des Naturwissenschaftlichen Vereins zu Osnabrück. Für die Jahre 1876-1880*. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXV, n° 2, janvier 1881. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XCII, n°s 2-3, janvier 1881. — In-4°.

PISE. — *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. VIII, novembre-décembre 1880. — In-8°.

ROME. — *Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. 34e année (1880-81). *Sessione I*. — In-18.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei. Serie 3^a. Transunti*. T. V, fasc. 4, janvier 1881. — In-4°.

— *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*. T. XIII, mars 1880. — In-4°.

SEMUR. — *Bulletin de la Société des Sciences historiques et naturelles de Semur*. 16e année, 1879. — Gr. in-8°.

TOULOUSE. — *Mémoires de l'Académie des Sciences, Inscriptions et Belles-Lettres de Toulouse.* 8e série, t. II, 2e semestre, 1880. — Gr. in-8°.

— *Revue Mycologique, dirigée par* C. ROUMEGUÈRE. 3e année, n° 9, janvier 1881. — Gr. in-8°.

Séance du 17 février 1881.

BAGNÈRES-DE-BIGORRE. — *Bulletin de la Société Ramond.* 3e série, 15e année, 1880. — Gr. in-8°.

— *Société Ramond. Observations météorologiques faites à la station Plantade (Pic du Midi) en 1878.* — Gr. in-8°.

BARCELONNE. — *Crónica científica.* 4e année, n° 75, 10 février 1881. — Gr. in-8°.

BORDEAUX. — *Faculté de Médecine et de Pharmacie. Thèse pour le doctorat en Médecine :* MUSELLI (J.-M.). *De la Fistule gastrique.* — TAUZIAC (J.) : *Quantité et renouvellement du sang dans les systèmes circulatoires,* etc. — 2 broch. in-4°.

— *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales.* 2e année, nos 6-7, février 1881. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux.* 10e année, nos 28-29, février 1881. — Gr. in-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 4e année, n° 3, février 1881. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Annuaire de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* Années 1879 et 1880. — 2 vol. in-12.

— *Bulletins de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* 2e série, t. XLVI-XLIX; 1878-1880. — 4 vol. in-8°.

— *Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* Collection in-8°, t. XXIX-XXX; 1880. — 2 vol. in-8°.

— *Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publiés par l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* T. XXXIX (2e partie), XLII et XLIII; 1879-1880. — 3 vol. in-4°.

— *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique.* T. XLIII, 1re partie, 1880. — In-4°.

— *Tables des Mémoires des Membres, des Mémoires couronnés et des Mémoires des savants étrangers.* 1858-1878. — In-12, 1879.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Bulletin of the Museum of Comparative*

Zoölogy at Harvard College. T. VIII, n°s 1-2, décembre 1880. — Gr. in-8°.

Coimbra. — *Jornal de Sciencias mathematicas e astronomicas, publicado pelo* Dr Francisco Gomes Teixeira. T. II, 1880. — Gr. in-8°.

Genève. — *Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*. T. XXVII, 1re partie; 1880. — In-4°.

Londres. — *Journal of the Royal Microscopical Society*. 2e série, t. I, fasc. 1, février 1881. — In-8°.

Paris. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXV, n° 3, février 1881. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XCII, n°s 4-5, janvier 1881. — In-4°.

Pise. — *Il Nuovo Cimento*. 3e série, t. IX, janvier 1881. — In-8°.

Vienne. — *Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*. T. LXXIX (n°s 4-5), LXXX, LXXXI, LXXXII (n°s 6-7); 1879-1880. — Gr. in-8°.

Comes (O.). — *Osservazioni su alcune specie di funghi del Napoletano e descrizione di due nuove specie*. Napoli, 1880. — In-4°.

Forti (Angelo). — *Saggio di nuove tavole di funzioni iperboliche, aventi per argomento il loro doppio settore*. Pisa, 1881. — Gr. in-8°.

Forti (Ottavio). — *Geometria pratica. La Teorica degli errori e il metodo dei minimi quadrati*. Milano, 1880. — In-8°.

Gayon (U.). — *Sur un procédé nouveau d'extraction du sucre des mélasses*. — In-8°.

Saltel (L.). — *Notice sur les travaux mathématiques de M. L. Saltel*. Bordeaux, 1881. — In-4°.

Séance du 8 mars 1881.

Barcelone. — *Crónica científica. Revista internacional de Ciencias, publicada por* D. Rafael Roig y Torres. 1re année, 1878, n°s 1-22; 2e année, 1879, n°s 25-26, 28-48; 3e année, 1880, n°s 49-72; 4e année, 1881, 25 février, n° 76. — Gr. in-8°.

Bordeaux. — *Bulletin des travaux de la Société de Pharmacie de Bordeaux*. 20e année, décembre 1880. — In-8°.

— *Faculté de Médecine et de Pharmacie. Essai de critique historique de la périnéorrhaphie. Thèse, par* G. Lataste, 1881. — In-4°.

— *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux*. 2e année, n° 9, 26 février 1881. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 10e année, n°s 30-31; 20-27 février 1881. — In-4°.

BORDEAUX. — *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin.* 2e série, 4e année, n° 4, 21 février 1881. — Gr. in-8°.

BRUXELLES. — *Société Belge de Microscopie.* N° IV. *Procès-verbal de la séance du 29 janvier 1881.* — In-8°.

COPENHAGUE. — *Oversigt over det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbejder.* 1880, n° 2. — In-8°.

LONDRES. — *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.* T. XLI, n° 3, janvier 1881. — In-8°.

MILAN. — *Atti della Società Crittogamologica Italiana residente in Milano.* 24e année, 2e série, t. II, fasc. 3, 1881. — Gr. in-8°.

— *Gazzetta degli Ospitali.* 2e année, n° 2, 30 janvier 1880. — In-8°.

PARIS. — *Bulletin de la Société Chimique de Paris.* T. XXXV, n° 4, 20 février 1881. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Mathématique de France.* T. IX, n° 1; 1880. — Gr. in-8°.

— *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques.* 2e série, t. IV, août 1880. — Gr. in-8°.

— *Club Alpin Français. Bulletin trimestriel.* 1880, 4e trimestre. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences.* T. XCII, nos 6-7, janvier-février 1881. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée.* T. X, n° 110, février 1881. — Gr. in-8°.

ROME. — *Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche.* T. XIII, avril 1880. — In-4°.

TROMSÖ. — *Tromsö Museums Aarshefter.* III. — In-8°.

VALENCIENNES. — *Revue agricole, industrielle, artistique et littéraire.* T. XXXIII, nos 11-12, 1881. — In-8°.

VENISE. — *Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti.* 5e série, t. VI, fasc. 10; 1880. — In-8°.

— *Monografia stratigrafica e paleontologica del Lias nelle provincie Venete, del Prof.* TORQUATO TARAMELLI. *Appendice al Tomo V, serie V degli Atti dell' Istituto.* 1880. — In-4°.

WASHINGTON. — *Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the Year 1878.* — 1 vol. in-8°.

COYNE (P.). — *Des tumeurs épithéliales de la glande mammaire.* Paris, 1880. — In-8°.

LAISANT (A.). — *Introduction à la méthode des Quaternions.* Paris, 1881. — 1 vol. in-8°.

Séance du 17 mars 1881.

ALGER. — *Bulletin de la Société des Sciences physiques, naturelles et climatologiques d'Alger*. 17e année, 1880, 3e et 4e trimestres. — In-8°.

AMIENS. — *Bulletin de la Société industrielle d'Amiens*. T. XIX, n° 1, 1er janvier 1881. — Gr. in-8°.

— *Société Linnéenne du Nord de la France. Bulletin mensuel.* 1er octobre 1879 à 1er août 1880, 8e et 9e années, t. IV-V; nos 88-98. — In-8°.

BARCELONE. — *Crónica cientifica*. IVe année, n° 77, 10 mars 1881. — Gr. in-8°.

BERLIN. — *Monatsbericht der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. Novembre 1880. — In-8°.

BORDEAUX. — *Gazette hebdomadaire des Sciences médicales de Bordeaux*. 2e année, nos 3, 10, 11; janvier et mars 1881. — In-4°.

— *Journal de Médecine de Bordeaux*. 10e année, nos 32-33, mars 1881. — In-4°.

— *Société de Géographie commerciale de Bordeaux. Bulletin*. 2e série, 4e année, n° 5, 7 mars 1881. — Gr. in-8°.

BOSTON. — *Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences. New Serie*. Vol. VII, Part. II, 1879-1880. — In-8°.

— *Memoirs of the Boston Society of Natural History*. T. III, 1re partie, n° 3; 1879. — In-4°.

— *Proceedings of the Boston Society of Natural History*. Vol. XX, part. 2-3, 1878-1880. — In-8°.

— *Occasional Papers of the Boston Society of Natural History*. III. — *Contributions to the Geology of Eastern Massachusetts, by* W.-O. CROSBY. 1880. — In-8°.

CAMBRIDGE (Mass.). — *Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College*. T. VIII, n° 3. — In-8°.

CHERBOURG. — *Mémoires de la Société Nationale des Sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg*. T. XXII (3e série, t. II); 1879. — Gr. in-8°.

COLMAR. — *Bulletin de la Société d'Histoire naturelle de Colmar*. 20e et 21e années, 1879 et 1880. — Gr. in-8°.

FRANCFORT-SUR-MER. — *Jahres-Bericht des Frankfurter Vereins für Geographie und Statistik*. Années 37-45; 1872-1880. — 4 fasc. gr. in-8°.

LONDRES. — *Memoirs of the Royal Astronomical Society*. T. XLV, 1879-1880. — In-4°.

— *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. T. XLI, n° 4, février 1881. — In-8°.

MANCHESTER. — *Memoirs of the Literary and Philosophical Society of Manchester*. 3e série, t. VI, 1879. — In-8°.

— *Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*. T. XVI-XIX, 1876-1880. — In-8°.

MARSEILLE. — *Bulletin de la Société Scientifique Industrielle de Marseille*. 1880. Procès-verbaux. — Gr. in-8°.

MILAN. — *Gazzetta degli Ospitali*. 2e année, nos 3-4, février 1881. — In-8°.

MOSCOU. — *Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou*. Année 1880, n° 2; t. LV. — In-8°.

NAPLES. — *Atti del Reale Istituto d'Incoraggiamento alle Scienze naturali e tecnologiche*. 2e série, t. XVII, 1880. — In-4°.

NEW-YORK. — *Annals of the Lyceum of Natural History of New-York*. T. XI, n° 13, 1876. — In-8°.

— *Annals of the New-York Academy of Sciences, late Lyceum of Natural History*. T. I, nos 9-13, 1879-1880. — In-8°.

PARIS. — *Association Française pour l'avancement des Sciences. Informations et documents divers*. N° 29. *Congrès d'Alger*. — In-8°.

— *Bulletin de la Société Chimique de Paris*. T. XXXV, n° 5, 5 mars 1881. — In-8°.

— *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*. T. XCII, nos 7-9, février-mars 1881. — In-4°.

— *Journal de Physique théorique et appliquée*. T. X, n° 111, mars 1881. — Gr. in-8°.

PHILADELPHIE. — *Proceedings of the Academy of Natural Sciences of Philadelphia*. Année 1879. — 3 fasc. in-8°.

— *Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia, for promoting useful knowledge*. T. XVIII, nos 105-106, janvier-mars 1880. — In-8°.

— *List of the Members of the American Philosophical Society. March 15, 1880*. — In-8°.

PISE. — *Atti della Società Toscana di Scienze Naturali. Processi verbali*. Séances du 4 juillet 1880 et du 9 janvier 1881. — Gr. in-8°.

ROME. — *Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*. 33e année, 6e séance, 25 mai 1880. — In-4°.

— *Atti della R. Accademia dei Lincei. Anno 278, 1880-81, serie 3a. Transunti. Vol. V, fasc. 5-6*. Février 1881. — In-4°.

SAINT-LOUIS. — *The Transactions of the Academy of Science of St. Louis*. Vol. IV, n° 1, 1880. — In-8°.

— *Contributions to the Archæology of Missouri, by the Archæological Section of the St. Louis Academy of Science. Part. 1. Pattery.* 1880. — Gr. in-8°.

SAINT-PÉTERSBOURG. — *Bulletins de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*. T. XXVI, n° 3, 1880. — Gr. in-4°.

WASHINGTON. — *Engineer Department, U. S. Army. Report upon United States Geographical Surveys West of the one hundredth Meridian, in Charge of First Lieut.* GEO. M. WHEELER, *Corps of Engineers, U. S. Army. Topographical Atlas (crayon)*. 1875. Gr. in-fol. oblong. — Vol. II. *Astronomy and Barometrie Hypsometry;* 1877. — Vol. III. *Geology,* 1875. — Vol. IV, *Paleontology,* 1877. Vol. V, *Zoölogy,* 1875. — Vol. VI, *Botany,* 1878. — 5 vol. in-4°.

— *Geological Survey of the Territories.* F. V. HAYDEN, *Geologist in charge. Acrididae of North America by* CYRUS THOMAS, *Ph. D.* 1873. — In-4°.

— *First Annual Report of the U. S. Entomological Commission for the year 1877 relating to the Rocky Mountain Locust and the best Methods of preventing its Injuries,* etc. 1878. — 1 vol. in-8°.

— *A Subject-Index of the U. S. Naval Observatory, 1845-1875, by* EDW. S. HOLDEN, 1879. — In-4°.

— *Measurement of Powder Pressures in Cannon by means of the registered compression of Oil, by Dr.* W. E. WOODBRIDGE; 1879. — In-8°.

— *U. S. Patent Office. General Index of the Official Gazette and Monthly Volumes of Patents of the United States Patent Office.* 1875. — Gr. in-8°.

— *Annual Report of the Commissionner af Patents for the Years 1876-1879.* — 4 vol. gr. in-8°.

BATTAGLINI (GIUS.). — *Sui connessi ternari di 1° ordine e di 1ª classe.* Napoli, 1880. — *Sulle forme ternarie bilineari.* Roma, 1881. — 2 broch. in-4°.

CONFÉRENCES

DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE

PAR M. LOUIS SALTEL

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

« On ne peut se flatter d'avoir le dernier mot d'une théorie tant » qu'on ne peut pas l'expliquer en peu de paroles à un passant » dans la rue. » (GERGONNE.)

PREMIÈRE CONFÉRENCE [1]

Définition de la Méthode de correspondance analytique.

1. Afin de définir ce que nous appellerons *Méthode de correspondance analytique,* nous devons préalablement faire connaître et démontrer certains théorèmes sur lesquels repose cette méthode.

2. PREMIER THÉORÈME D'ALGÈBRE. — *Si dans la relation*

$$U(\rho_1, \rho_2) = 0, \qquad (1)$$

algébrique entière et rationnelle par rapport aux variables ρ_1, ρ_2, *on fait*

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho,$$

on peut dire :

1° Que le degré N *de l'équation en* ρ *ainsi obtenue est égal au nombre des valeurs nulles et non nulles, mais finies, du rapport* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$,

---

[1] Ces Conférences, faites à la Faculté des sciences de Bordeaux, reproduisent, sous forme didactique, des résultats personnels publiés à des époques assez éloignées dans divers recueils. Nous eussions voulu en réunir un grand nombre à la fois, mais le désir de mettre progressivement à profit les observations que le public géomètre voudra bien nous faire, nous a contraint à les présenter par série de trois ou quatre. Ajoutons que nous supposons seulement connu du lecteur les *premières notions* d'algèbre et de géométrie analytique enseignées dans les cours de mathématiques spéciales de France.

pour ρ_2 infini, plus le nombre des valeurs nulles du rapport inverse $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, pour ρ_1 infini, si toutefois parmi les valeurs limites du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ il n'y en a pas d'égales à l'unité;

2° Que le degré N′ du terme le moins élevé de cette équation en ρ est égal au nombre des valeurs nulles et non nulles, mais finies, du rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$, pour ρ_2 nul, plus le nombre des valeurs nulles du rapport inverse $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, pour ρ_1 nul, si toutefois parmi les valeurs limites du rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ il n'y en a pas d'égales à l'unité (1).

Démontrons d'abord la première partie du théorème :

Supposons la relation proposée d'ordre m et groupons ensemble les termes du même degré, on aura

$$U_m(\rho_1,\rho_2) + U_{m-1}(\rho_1,\rho_2) + U_{m-2}(\rho_1,\rho_2) + \ldots = 0. \tag{2}$$

Si dans la relation homogène

$$U_m(\rho_1,\rho_2)$$

la plus haute puissance de ρ_1 est h et la plus petite k, la plus petite puissance de ρ_2 sera nécessairement $m-h$ et la plus haute $m-k$. Pour ce motif, nous écrirons le groupe U_m sous la forme

$$U_m[(\rho_1)^h_k, (\rho_2)^{m-k}_{m-h}]. \tag{3}$$

Cela dit, si l'on pose

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho_1' \quad \text{ou} \quad \rho_1 = \rho_1'\rho_2,$$

(1) On peut donner à l'énoncé de ce théorème une forme plus symétrique, mais moins commode dans la pratique. On peut dire, par exemple, que le nombre N est égal :

1° *Au nombre des valeurs finies non nulles, pour ρ_1 ou ρ_2 infinis du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ ou du rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$*; 2° *plus le nombre des valeurs nulles du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ pour ρ_1 infini;* 3° *plus le nombre des valeurs nulles du rapport $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ pour ρ_2 infini.*

Même observation à l'égard du nombre N′. Ajoutons que dans une communication spéciale, nous enseignerons à compléter cet énoncé, lorsque l'une des valeurs imites des rapports $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ est égale à l'unité.

les valeurs du rapport ρ'_1, pour une valeur donnée de ρ_2, seront fournies par la relation

$$\rho_2^m . U_m[(\rho'_1)^h_k, 1] + \rho_2^{m-1} . U_{m-1}(\rho'_1, 1) + \rho_2^{m-2} . U_{m-2}(\rho'_1, 1) + \ldots = 0, \quad (4)$$

obtenue en remplaçant dans (2) la lettre ρ_1 par $\rho'_1 . \rho_2$, ce qui revient à remplacer dans cette même équation (2) : 1° la lettre ρ_1 par ρ'_1; 2° la lettre ρ_2 par l'unité; 3° à multiplier chaque groupe par le facteur ρ_2 élevé à une puissance marquée par le degré de ce groupe.

Il résulte de là que, pour ρ_2 infini, les valeurs tant nulles que non nulles, mais finies, de ρ'_1, sont fournies per l'équation

$$U_m[(\rho'_1)^h_k . 1] = 0, \quad (5)$$

ce qui montre qu'il y a :

(α) { 1° h valeurs finies tant nulles que non nulles du rapport ρ'_1;
2° k valeurs nulles du rapport ρ'_1.

On prouverait de même que les valeurs tant nulles que non nulles, mais finies, du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2$, pour ρ_1 infini, sont fournies par l'équation

$$U_m[1, (\rho'_2)^{m-k}_{m-h}] = 0, \quad (6)$$

ce qui entraîne :

(β) { 1° $m - k$ valeurs finies tant nulles que non nulles de ρ'_2;
2° $m - h$ valeurs nulles de ρ'_2.

L'inspection des résultats (α) et (β) permet, par simple addition, de vérifier : *que le degré m de la fonction*

$$U(\rho_1, \rho_2) = 0 \quad (1)$$

est toujours égal au nombre des valeurs nulles et non nulles, mais finies, du rapport limite ρ'_1, ce nombre étant augmenté du nombre des valeurs nulles du rapport limite ρ'_2.

D'autre part, si dans cette même équation (1) on fait

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho,$$

cette équation pouvant s'écrire

$$\rho^m U_m(1, 1) + \rho^{m-1}(1, 1) + \ldots = 0, \quad (7)$$

on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que le degré de cette équation en ρ reste toujours égal à m est que l'on n'ait pas

$$U_m(1,1) = 0,$$

c'est-à-dire que l'équation (5) n'ait pas de racine en ρ'_1 égale à l'unité. La première partie du théorème est donc complètement démontrée. On démontrerait de la même manière la seconde partie. Il suffirait de considérer l'ensemble des termes du moindre degré au lieu d'avoir égard aux termes du degré le plus élevé.

3. Voici une définition qui va nous permettre d'interpréter géométriquement le théorème que nous venons de démontrer.

Définition. — Si à un point A_1, pris arbitrairement sur une droite Δ, il lui en correspond un ou plusieurs autres $A_2, A'_2, A''_2, \ldots$ dont la position soit parfaitement déterminée, on dit que la droite Δ contient deux séries de points et que les points $A_2, A'_2, A''_2, \ldots$ sont les points homologues de A_1. S'il arrive que l'un des points A_2, $A'_2, A''_2, \ldots$ coïncide avec A_1, on dit, de plus, qu'il y a en un tel point *coïncidence*, ou bien que ce point est *double*.

Δ O A_1 A_2 A'_2 A''_2

4. Cette définition donnée, considérons de nouveau l'équation

$$U(\rho_1, \rho_2) = 0,$$

et convenons de porter sur une droite Δ, à partir d'une origine O, des longueurs $OA_2, OA'_2, OA''_2, \ldots$ égales aux valeurs de ρ_2 qui correspondent à une valeur OA_1 attribuée à ρ_1; on aura de la sorte deux séries de points, et le théorème précédent pourra s'énoncer comme il suit :

Théorème. — *Une droite Δ contient un point O pris pour origine et deux séries de points S_1, S_2, dont la liaison est telle que, prenant arbitrairement un point Q, considéré comme appartenant à l'une de ces deux séries, à une distance du point O, représentée*

par ρ_1 *ou* ρ_2, *il corresponde pour l'autre série un nombre constant de points* α_2 *ou* α_1. *On peut affirmer :*

1° Que le nombre N *des coïncidences, situées à distance finie, est égal au nombre des valeurs nulles et non nulles, mais finies, du rapport* $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ *pour* ρ_1 *infini, plus le nombre des valeurs nulles du rapport inverse* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ *pour* ρ_2 *infini, si toutefois parmi les valeurs limites du rapport* $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ *il n'y en a pas d'égales à l'unité;*

2° Que le nombre N′ *des coïncidences confondues avec l'origine* O *est égal au nombre des valeurs nulles et non nulles, mais finies, du rapport* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ *pour* ρ_2 *nul, plus le nombre des valeurs nulles du rapport inverse* $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ *pour* ρ_1 *nul, si toutefois parmi les valeurs limites du rapport* $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ *il n'y en a pas d'égales à l'unité.*

5. *Définition.* — Pour plus de rapidité dans le discours, nous donnerons au théorème que nous venons d'énoncer ou au théorème d'algèbre dont il est dérivé le nom de *Principe de correspondance analytique* [1].

6. SECOND THÉORÈME D'ALGÈBRE. — *Si on a entre les k variables* $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k$ *une relation algébrique entière et rationnelle*

$$U(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k) = 0, \qquad (8)$$

dans laquelle les plus hautes puissances de ces variables soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k,$$

on peut affirmer :

1° Que le degré N *de cette équation, lorsqu'on y fait*

$$\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = \rho_i = \ldots = \rho_k = \rho,$$

est égal à

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \ldots \alpha_k,$$

---

(1) Ce nom est légitimé par l'importance des théorèmes en question dans les problèmes définis par des équations algébriques.

si toutefois il arrive qu'en supposant les $k-1$ variables

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_k,$$

arbitrairement finies ou infinies, le nombre des valeurs finies de la variable restante ρ_i soit toujours α_i;

2° Que le degré N' du terme le moins élevé de cette même équation en ρ est égal à

$$N' = l_1 + l_2 + \ldots + l_i + \ldots + l_k$$

s'il arrive que les plus petites puissances de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k$ soient

$$l_1, l_2, \ldots, l_i, \ldots, l_k,$$

et qu'en supposant les $k-1$ variables

$$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_k$$

arbitrairement nulles ou non nulles, le nombre des valeurs nulles correspondantes de la variable ρ_i soit toujours l_i.

Démontrons d'abord la première partie. Pour cela, nous allons montrer successivement l'existence des termes de la forme

$$\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}, \quad \rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}, \quad \rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}.\rho_4^{\alpha_4}, \text{ etc.}$$

1° Existence du terme $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}$. — Supposons donné aux variables $\rho_3, \rho_4, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k$ des valeurs constantes, et divisons le premier membre de (8), supposé ordonné par rapport aux puissances décroissantes de ρ_2, par $\rho_1^{\alpha_1}$. Le nombre des valeurs finies de ρ_2, pour ρ_1 fini ou infini, devant être toujours égal à α_2, on voit, en supposant ρ_1 infini, que cette équation doit prendre la forme

$$A\rho_2^{\alpha_2} + B\rho_2^{\alpha_2-1} + \ldots = 0,$$

dans laquelle A doit être nécessairement différent de zéro; on ne peut donc pas supposer la non existence du terme $A\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}$.

2° Existence du terme $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}$. — Supposons donné aux variables $\rho_4, \rho_5, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k$ des valeurs constantes, et divisons le premier membre de (8) par $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}$. Le nombre des valeurs finies de ρ_3, pour ρ_1 et ρ_2 finis ou infinis, devant être toujours égal à α_3, on voit, en supposant ρ_1 et ρ_2 infinis, que le terme $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}$ existe nécessairement.

3° *Existence du terme* $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}.\rho_4^{\alpha_4}$. — Supposons donné aux variables $\rho_5, \rho_6, \dots, \rho_i, \rho_k$ des valeurs constantes, et divisons le premier membre de (8) par $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}$. Le nombre des valeurs finies de ρ_4, pour ρ_1, ρ_2 et ρ_3 finis ou infinis, devant être toujours égal à α_4, on voit, en supposant ρ_1, ρ_2 et ρ_3 infinis, que le terme $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}.\rho_4^{\alpha_4}$ existe nécessairement.

En procédant de proche en proche, on démontrera de la même manière l'existence du terme $\rho_1^{\alpha_1}.\rho_2^{\alpha_2}.\rho_3^{\alpha_3}. \dots \rho_i^{\alpha_i}. \dots \rho_k^{\alpha_k}$, ce qui suffit pour légitimer la première partie du théorème.

Je me bornerai à démontrer la seconde partie sur le cas de deux variables ρ_1 et ρ_2 :

1° Tout coefficient de ρ_1 doit contenir ρ_2 avec un exposant au moins égal à l_2, sinon, en supposant ρ_1 constant et non nul, il n'y aurait pas l_2 valeurs nulles de ρ_2; de même tout coefficient de ρ_2 doit contenir ρ_1 avec un exposant au moins égal à l_1;

2° Tous les termes ayant l'une des trois formes

$$\rho_1^{l_1}.\rho_2^{l_2}.\rho_1^{m_1}, \qquad \rho_1^{l_1}.\rho_2^{l_2}.\rho_2^{m_2}, \qquad \rho_1^{l_1}.\rho_2^{l_2}.\rho_1^{n_1}.\rho_2^{n_2},$$

la plus petite valeur de m_1 doit être égale à zéro; car si elle était égale à m'_1, en divisant tous les termes par $\rho_2^{l_2}$ et faisant tendre ρ_2 vers zéro, on aurait $l_1 + m'_1$ racines nulles pour ρ_2, alors que, par hypothèse, il ne doit y en avoir toujours que l_1; donc le terme $\rho_1^{l_1}.\rho_2^{l_2}$ existe.

7. Voici une définition qui va nous permettre d'interpréter géométriquement le théorème que nous venons de démontrer.

Définition. — Si à $k-1$ points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k$, pris arbitrairement sur une droite Δ, il leur en correspond un ou plusieurs autres $A_i, A'_i, A''_i, A'''_i, \dots$ dont la position soit parfaitement déterminée, on dit que la droite Δ contient k séries de points et que l'ensemble des points $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k$, associés à l'un quelconque des points A_i, A'_i, A''_i, A'''_i, constituent un groupe de k points homologues. S'il arrive que k points homologues soient confondus en un même point P, on dit, de plus, qu'il y a en ce point *coïncidence,* ou bien que ce point est *multiple.*

Δ O A_1 A_2 A_3 A_i A'_i A''_i A'''_i A_k

8. Cette définition donnée, considérons de nouveau l'équation

$$U(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k) = 0,$$

et convenons de porter sur une droite Δ, à partir d'une origine O, des longueurs $OA_i, OA'_i, OA''_i, \ldots$ égales aux valeurs de ρ_i qui correspondent aux valeurs $OA_1, OA_2, OA_3, \ldots, OA_{i-1}, OA_{i+1}, \ldots, OA_k$ attribuées à $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \ldots, \rho_k$; on aura de la sorte k séries de points, et le théorème précédent pourra s'énoncer comme il suit :

Théorème. — Une droite Δ contient un point O pris pour origine et k séries de points $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots, S_k$, dont la liaison est telle que, à $k-1$ points $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k$, pris arbitrairement à distance finie ou infinie et considérés comme appartenant respectivement aux $k-1$ séries $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k$, il corresponde, pour la série restante S_i, un nombre constant de points α_i. On peut affirmer :

1° Que le nombre N des coïncidences, situées à distance finie, est égal à

$$N = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \ldots + \alpha_k;$$

2° Que le nombre N' des coïncidences, confondues avec l'origine O, est égal à

$$N' = l_1 + l_2 + \ldots l_i + \ldots + l_k,$$

s'il arrive qu'en supposant arbitrairement les points $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k$ à distance finie ou nulle de O, il y ait toujours α_i points, appartenant à la série S_i, qui soient confondus avec O.

9. *Définition*. — Pour plus de rapidité dans le discours, nous donnerons au théorème que nous venons d'énoncer (¹) ou au théorème d'algèbre dont il est dérivé le nom de *Principe de correspondance géométrique entre k séries de points* (²).

10. *Définition de la méthode de correspondance analytique*. —

(¹) La *première partie* de ce théorème, dans le cas particulier de *deux* séries de points, portait déjà le nom de *Principe de correspondance* de M. Chasles.

(²) Ce nom est légitimé par l'importance des théorèmes en question dans les problèmes définis par des conditions géométriques.

Nous appellerons *Méthode de correspondance analytique* l'application, à diverses questions d'algèbre et de géométrie définies par des équations algébriques, du *Principe de correspondance analytique* et du *Principe de correspondance géométrique entre k séries de points* (1).

11. *Importance de la méthode de correspondance analytique.*— Dans une foule de questions où se présentent les séries de points dont nous venons de nous occuper, ce n'est pas la connaissance des relations

$$U(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad (1)$$

$$U(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k) = 0 \quad (8)$$

qui est importante, mais bien la connaissance de leurs *degrés*, lorsqu'on suppose toutes les variables égales. On conçoit dès lors tout de suite l'importance des théorèmes précédents, qui permettent de trouver ces *degrés* au moyen de certaines *indications* fournies le plus souvent par les données mêmes du problème. Bien plus, comme nous ferons plus tard une étude géométrique des équations (1) et (8) qui nous conduira à une foule de constructions et théorèmes dépendant seulement des *degrés* (2) de ces relations et non de leur nature intime, les indications en question suffiront pour pouvoir appliquer immédiatement toutes ces constructions et propriétés à un grand nombre de séries.

12. Je terminerai cette première Conférence par certains expédients qui simplifient singulièrement l'application du Principe de correspondance analytique.

La question à résoudre est toujours, comme on sait, la suivante:

Problème. — La variable ρ_2 *étant fonction algébrique de la variable* ρ_1, *on considère le rapport* $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho_2'$; *on demande, pour* ρ_1

(1) Dans plusieurs Notes antérieures, nous avions déjà énoncé ces Principes sous une *forme* différente : nous adoptons définitivement la rédaction de ce jour.

(2) On sait déjà que la connaissance du *degré* d'une courbe permet d'énoncer, au sujet de cette courbe, une foule de théorèmes, bien que son équation soit inconnue.

infini ou nul : 1° le nombre des valeurs nulles du rapport ρ'_2; *2° le nombre des valeurs finies non nulles de ce même rapport.*

Cela dit, voici les expédients en question :

1° Si pour ρ_1 infini correspondent k valeurs finies de ρ_2, il y a au moins k valeurs nulles du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ pour ρ_1 infini;

2° Si à une valeur arbitraire finie de ρ_1 correspondent h valeurs infinies de ρ_2, il y a au moins h valeurs infinies du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ pour ρ_1 infini;

3° Si pour ρ_1 nul correspondent k valeurs finies de ρ_2 et l valeurs nulles, il y a au moins k valeurs infinies du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ pour ρ_1 nul, et au plus l valeurs finies pour ce même rapport;

4° Si à une valeur arbitraire finie de ρ_1 correspondent h valeurs nulles de ρ_2, il y a au moins h valeurs nulles du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ pour ρ_1 nul;

5° On détermine au préalable : 1° le nombre θ des valeurs finies de ρ_2 qui correspondent à une valeur arbitraire finie de ρ_1, ce qui montre que le rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2$, pour une valeur donnée de ρ_1, à θ valeurs finies; 2° le nombre k des valeurs nulles du rapport ρ'_2 obtenues en faisant usage du premier expédient. Cela fait, s'il arrive, et cela se présente, en effet, très fréquemment, que l'on puisse prouver qu'il y a au moins $\theta - k$ valeurs finies non nulles du rapport ρ'_2, on sera évidemment en droit d'affirmer que, pour ρ_1 infini, le rapport ρ'_2 a exactement

1° k valeurs nulles;
2° $\theta - k$ valeurs non nulles.

DEUXIÈME CONFÉRENCE

Application de la méthode de correspondance analytique à la détermination simultanée du nombre des solutions nulles et non nulles, mais finies, communes à un système de k équations à k inconnues.

1. La méthode de correspondance analytique se prête avec facilité à la résolution de ce problème.

La méthode à suivre sera suffisamment développée par son application à quelques résultats déjà connus.

2. Théorème I. — *Désignons par m_1, m_2 les degrés de deux équations algébriques*

$$(A) \begin{cases} V_1(x_1,x_2) = U_{m_1}(x_1,x_2) + U_{m_1-1}(x_1,x_2) + \dots = 0, & (1) \\ V_2(x_1,x_2) = U_{m_2}(x_1,x_2) + U_{m_2-1}(x_1,x_2) + \dots = 0, & (2) \end{cases}$$

les plus générales à deux inconnues (x_1, x_2), dans lesquelles on a groupé ensemble les termes de même degré. Le nombre N *des solutions, en valeurs finies, communes à ces équations, est marqué par l'expression*

$$N = m_1 . m_2.$$

Démonstration. — Mettons, dans la première équation, la lettre ρ_1 à la place de x_2, et, dans la seconde, la lettre ρ_2 à la place de cette même lettre; il vient

$$(B) \begin{cases} V_1(x_1,\rho_1) = U_{m_1}(x_1,\rho_1) + U_{m_1-1}(x_1,\rho_1) + \dots = 0, & (3) \\ V_2(x_1,\rho_2) = U_{m_2}(x_1,\rho_2) + U_{m_2-1}(x_1,\rho_2) + \dots = 0, & (4) \end{cases}$$

Si l'on attribue à ρ_1 une valeur arbitraire finie, l'équation (3) détermine m_1 valeurs de x_1, et chacune de ces solutions substituée dans (4) donne m_2 valeurs finies correspondantes de ρ_2. Ainsi à une valeur arbitraire finie donnée à ρ_1 correspondent $m_1 . m_2$ valeurs finies de ρ_2. On voit tout aussi facilement qu'à une valeur arbitraire finie de ρ_2 correspondent $m_1 . m_2$ valeurs finies de ρ_1. Si donc on convient de porter sur une droite, à partir d'une origine O, des longueurs $OA_2, OA'_2, OA''_2, \dots$ égales aux valeurs de ρ_2 qui

correspondent à une valeur OA_1 attribuée à ρ_1, on obtiendra deux séries de points correspondants; d'ailleurs, le nombre N des coïncidences, situées à distance finie, marquera le nombre des solutions finies du système proposé par rapport à x_1. Il suffit donc d'obtenir le nombre des coïncidences [1].

Pour cela, cherchons d'abord si le Principe de correspondance géométrique entre deux séries de points serait applicable. Tant que l'on suppose ρ_1 arbitrairement fini, le nombre des valeurs finies de ρ_2 n'est pas altéré et est toujours égal à $m_1.m_2$; mais si l'on suppose ρ_1 infini, l'équation (3) déterminant m_1 valeurs infinies de x_1, l'équation (4) donne par là même $m_1.m_2$ valeurs infinies correspondantes de ρ_2, ce qui prouve que, pour ρ_1 infini, le nombre des valeurs finies de ρ_2 est modifié; donc le Principe de correspondance géométrique entre deux séries de points n'est pas applicable. Au contraire, le Principe de correspondance analytique va nous conduire tout de suite au résultat.

Pour cela, observons d'abord qu'à une valeur arbitraire finie de ρ_1 correspondant $m_1.m_2$ valeurs finies de ρ_2, il en résulte nécessairement $m_1.m_2$ valeurs finies du rapport

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_2 = \rho_1 \cdot \rho'_2, \tag{5}$$

valeurs déterminées par les équations

$$(C) \begin{cases} U_{m_1}(x_1, \rho_1) + U_{m_1-1}(x_1, \rho_1) + \ldots = 0, & (6) \\ U_{m_2}(x_1, \rho_1 \cdot \rho'_2) + U_{m_2-2}(x_1, \rho_1 \cdot \rho'_2) + \ldots = 0, & (7) \end{cases}$$

obtenues en remplaçant dans (B) l'inconnue ρ_2 par (5). La question est donc maintenant de trouver combien parmi ces $m_1.m_2$ valeurs du rapport ρ'_2, déterminées par les équations (6,7), il y en a qui restent finies pour ρ_1 infini. A cet effet, divisons l'équation (7) par $\rho_1^{m_2}$, on obtient

$$U_{m_2}\left(\frac{x_1}{\rho_1}, \rho'_2\right) + \frac{1}{\rho_1} U_{m-2}\left(\frac{x_1}{\rho_1}, \rho'_2\right) + \frac{1}{\rho_1^2} U_{m-2}\left(\frac{x_1}{\rho_1}, \rho'_2\right) + \ldots = 0, \tag{8}$$

---

[1] Il est manifeste, en effet, qu'à toute solution en (x_1, x_2) correspond une *coïncidence*, et à toute *coïncidence* une solution. — La continuité montre, de plus, que si l'une de ces solutions est multiple, son degré de multiplicité doit être précisément égal au nombre des coïncidences confondues au point correspondant.

équation qui se réduit, pour ρ_1 infini, en supposant le rapport

$$\frac{x_1}{\rho_1} = x'_1, \quad \text{d'où} \quad x_1 = x'_1 . \rho_1 \tag{9}$$

fini, à

$$U_{m_1}(x'_1, \rho'_2) = 0, \tag{10}$$

c'est-à-dire à l'équation obtenue en remplaçant dans les termes du plus haut degré de (2) les lettres x_1 et x_2 par x'_1 et ρ'_2.

Nous sommes donc conduit à étudier, au moyen de l'équation (6), les valeurs du rapport $\frac{x_1}{\rho_1} = x'_1$ pour ρ_1 infini. En d'autres termes, on est conduit à résoudre ce problème dont j'ai donné la solution générale dans le tirage à part d'une Note insérée au Compte-rendu du 26 avril 1875 :

PROBLÈME. — *Étant donnée une équation entre les deux variables $x_1 . \rho_1$, trouver les ordres d'infiniment grands des valeurs de x_1 qui deviennent infiniment grandes lorsque ρ_1 devient infini.*

Dans le cas qui nous occupe, d'une équation (6), la plus générale d'ordre m_1, ce problème est très facile à résoudre. En substituant dans (6) à la place de x_1 la valeur tirée de (9), faisant ρ_1 infini, on voit que les valeurs du rapport x'_1 sont déterminées par

$$U_{m_1}(x'_1 . 1) = 0, \tag{11}$$

c'est-à-dire par l'équation obtenue en remplaçant dans les termes du plus haut degré de (1) les lettres x_1, x_2 par x'_1 et l'unité. Toutes les m_1 valeurs du rapport x'_1 pour ρ_1 infini restent donc finies.

Ainsi, en supposant les deux équations proposées les plus générales de leurs degrés, toutes les $m_1 . m_2$ valeurs du rapport ρ'_2 pour ρ_1 infini sont finies et déterminées par les équations

$$(D) \begin{cases} U_{m_1}(x'_1, 1) = 0, & (12) \\ U_{m_2}(x'_1, \rho'_2) = 0, & (13) \end{cases}$$

qui montrent de plus : 1° qu'aucune des valeurs du rapport ρ'_2 n'est nulle, puisque ces deux équations comprennent respectivement un terme indépendant de x'_1 et de ρ'_2; 2° qu'aucune des valeurs du même rapport n'est égale à l'unité, sinon les équations

$$(E) \begin{cases} U_{m_1}(x'_1, 1) = 0, & (14) \\ U_{m_2}(x'_1, 1) = 0, & (15) \end{cases}$$

auraient une solution commune en x'_1, ce qui entraînerait une relation entre les coefficients.

On prouverait de même : 1° que les $m_1.m_2$ valeurs du rapport

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \rho'_1, \tag{16}$$

pour ρ_2 infini, sont déterminées par

$$(\mathrm{F}) \begin{cases} U_{m_1}(x'_1, \rho'_1) = 0, & (17) \\ U_{m_2}(x'_1, 1) = 0; & (18) \end{cases}$$

2° que toutes ces valeurs sont finies et qu'aucune d'elles n'est égale à zéro ou à l'unité.

Conclusion. — Conformément au Principe de correspondance analytique, le nombre N des coïncidences situées à distance finie, c'est-à-dire le nombre de solutions cherchées, est donc égal à

$$N = m_1.m_2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. *Nota.* — Il est très important d'observer que pour pouvoir reproduire sur deux équations données

$$(\mathrm{G}) \begin{cases} H_1(x,y) = 0, & (19) \\ H_2(x,y) = 0, & (20) \end{cases}$$

tous les raisonnements faits sur les équations (1,2), il suffit : 1° *que les termes du degré le plus élevé* $U_{m_1}(x,y), U_{m_2}(x,y)$, *pris dans chacune de ces équations, contiennent respectivement les variables* x, y *avec les exposants* m_1, m_2 ; 2° *que les deux équations* $U_{m_1}(x,y) = 0$, $U_{m_2}(x,y) = 0$ *n'aient pas d'autre solution commune que* ($x = y = 0$). De là cette conséquence importante :

Conséquence. — Deux courbes d'ordre m_1, m_2, *n'ayant pas de directions asymptotiques communes, se coupent toujours en* $m_1.m_2$ *points, situés à distance finie, réels ou imaginaires.*

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer : 1° que pouvant toujours supposer les deux courbes rapportées à des axes de direction arbitraire, les termes

$$x^{m_1}, y^{m_1};\ x^{m_2}, y^{m_2}$$

existent nécessairement; 2° que l'équation représentant l'ensemble des directions asymptotiques d'une courbe s'obtient en égalant à zéro le groupe des termes du degré le plus élevé de l'équation de cette courbe.

4. **Théorème II.** — *Si les termes du plus bas degré de deux équations données*

$$(\mathrm{H})\begin{cases} V_1(x_1, x_2) = 0, & (21)\\ V_2(x_1, x_2) = 0, & (22)\end{cases}$$

représentent respectivement deux fonctions

$$(\mathrm{K})\begin{cases} U_{n_1}(x_1, x_2), & (23)\\ U_{n_2}(x_1, x_2), & (24)\end{cases}$$

les plus générales d'ordres n_1, n_2 par rapport aux inconnues x_1 et x_2, ces équations admettent $n_1.n_2$ solutions communes nulles.

D'après les raisonnements faits dans la démonstration du théorème précédent, la question revient évidemment à chercher le nombre N' des coïncidences confondues avec l'origine dans les deux séries de points définies par les relations

$$(\mathrm{I})\begin{cases} U_{m_1}(x_1, \rho_1) + U_{m_1-1}(x_1, \rho_1) + \ldots + U_{n_1}(x_1, \rho_1) = 0, & (25)\\ U_{m_2}(x_1, \rho_2) + U_{m_2-1}(x_1, \rho_2) + \ldots + U_{n_2}(x_1, \rho_2) = 0, & (26)\end{cases}$$

c'est-à-dire qu'il faut chercher le nombre des valeurs finies nulles et non nulles du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2$ pour ρ_1 nul, et les valeurs nulles et non nulles du rapport inverse pour ρ_2 nul.

Occupons-nous d'abord du rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2$. Nous savons déjà qu'à une valeur finie de ρ_1 correspondent $m_1.m_2$ valeurs finies de ρ'_2; mais comme pour ρ_1 nul la variable ρ_2 n'admet que $n_1.n_2$ valeurs nulles correspondantes, les autres $m_1 m_2 - n_1 n_2$ étant toutes finies non nulles, il en résulte qu'il y a *au plus* $n_1.n_2$ valeurs finies du rapport ρ'_2 pour ρ_1 nul. En posant

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \rho'_2, \qquad \frac{x_1}{\rho_1} = x'_1, \qquad (27)$$

on démontre tout de suite: 1° qu'il y a effectivement, pour ρ_1 nul, $n_1.n_2$ valeurs finies du rapport ρ'_2, valeurs déterminées par

$$(\mathrm{J})\begin{cases} U_{n_1}(x'_1, 1) = 0, & (28)\\ U_{n_2}(x'_1, \rho'_2) = 0; & (29)\end{cases}$$

2° qu'il y a, pour ρ_2 nul, $n_1.n_2$ valeurs finies du rapport ρ'_1, valeurs déterminées par

$$(L) \begin{cases} U_{n_1}(x'_1, \rho'_1) = 0, & (30) \\ U_{n_2}(x'_1, 1) = 0. & (31) \end{cases}$$

Ces équations (J,L) montrant de plus qu'aucune des valeurs des rapports limites ρ'_1, ρ'_2 n'est nulle ni égale à l'unité, il en résulte bien, conformément au Principe de correspondance analytique, que le nombre des coïncidences confondues dans l'origine, c'est-à-dire le nombre des solutions nulles en x_2, est égal à $n_1.n_2$; et comme pour $x_2 = 0$ les deux équations proposées n'ont pas d'autres solutions communes que $x_1 = 0$, il en résulte que le système admet $n_1.n_2$ fois la solution $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 0. \end{cases}$

5. *Nota.* — Il est très important d'observer que, pour pouvoir reproduire sur deux équations données

$$(M) \begin{cases} H_1(x,y) = 0, & (32) \\ H_2(x,y) = 0, & (33) \end{cases}$$

tous les raisonnements faits sur les équations (I), il suffit : 1° *que les termes* $U_{n_1}(x,y)$, $U_{n_2}(x,y)$ *des plus bas degrés de ces équations contiennent respectivement les lettres* x, y *aux puissances* n_1, n_2; 2° *que les deux équations* $U_{n_1}(x,y) = 0$, $U_{n_2}(x,y) = 0$ *n'aient pas d'autres solutions communes que* $(x = y = 0)$; 3° *qu'en supposant* $y = 0$ dans (32, 33), *les deux équations en* x *ainsi obtenues n'aient pas d'autres solutions communes que* $x = 0$.

De là cette conséquence importante :

Conséquence. — Si deux courbes ont en commun un point O, *respectivement multiple d'ordre* n_1, n_2, *et n'ont pas de tangentes communes en ce point, le nombre des points communs confondus avec* O *est égal au produit des degrés de multiplicité de ce point.*

Pour s'en rendre compte, il suffit d'observer : 1° que pouvant toujours supposer les deux courbes rapportées à des axes de directions arbitraires passant par le point O, les termes

$$x^{n_1}, y^{n_1}; \; x^{n_2}, y^{n_2}$$

existent nécessairement, et les deux équations en x obtenues en

faisant $y = 0$ ne doivent pas avoir d'autre solution commune que $x = 0$; 2° que l'équation représentant l'ensemble des tangentes, à l'origine des coordonnées, dans une courbe, s'obtient en égalant à zéro le groupe des termes du plus bas degré de l'équation de cette courbe.

6. *Extension des résultats précédents.* — Le Principe de correspondance analytique (comme on peut s'en convaincre en lisant notre Note insérée au Bulletin du mois d'août 1876 de l'Académie de Belgique) détermine tout aussi facilement dans le cas général, de k équations à k inconnues, les solutions nulles et non nulles, mais finies, qui leur sont communes. En supposant que les équations proposées soient les plus générales de leur espèce, on démontre : 1° *que le nombre des solutions nulles et non nulles, mais finies, est égal au produit des degrés de ces équations;* 2° *que le nombre des solutions nulles est égal au produit des degrés des termes des plus bas degrés de ces mêmes équations.*

Il résulte notamment de là deux conséquences importantes que nous devons rappeler :

1re conséquence. — Si dans trois surfaces d'ordres m_1, m_2, m_3 *les trois cônes asymptotiques, représentés par l'ensemble des termes des plus hauts degrés égalés à zéro, n'ont pas de génératrices communes, ces trois surfaces se coupent toujours en* m_1, m_2, m_3 *points, situés à distance finie, réels ou imaginaires.*

2me conséquence. — Si trois surfaces ont en commun un point O, *respectivement multiple d'ordre* n_1, n_2, n_3, *et sont telles que les trois cônes tangents en ce point* O [1] *n'aient pas de génératrice commune, le nombre des points communs confondus avec* O *est égal à* n_1, n_2, n_3.

7. *Application du Principe de correspondance géométrique, entre k séries de points, à la détermination du nombre des solu-*

---

(1) On obtient, comme on sait, dans une surface donnée, l'équation du cône tangent en un point multiple, pris pour origine des coordonnées, en égalant à zéro le groupe des termes du plus bas degré de l'équation de cette surface.

tions finies communes à un certain système d'équations. — Je me bornerai à indiquer le résultat, renvoyant pour la démonstration à la page 28 de nos *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique.*

Théorème. — *Les solutions finies communes aux équations*

$$H_1(x_1^{\alpha_1}, x_2^{\beta_1}, x_3^{\gamma_1}, \ldots, x_k^{\lambda_1}) = 0,$$
$$H_2(x_1^{\alpha_2}, x_2^{\beta_2}, x_3^{\gamma_2}, \ldots, x_k^{\lambda_2}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$H_k(x_1^{\alpha_k}, x_2^{\beta_k}, x_3^{\gamma_k}, \ldots, x_k^{\lambda_k}) = 0,$$

les plus générales des degrés

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \ldots + \lambda_1),\ (\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \ldots \lambda_2), \ldots,\ (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k + \ldots + \lambda_k),$$

par rapport aux k inconnues $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, *et dans lesquelles*

$$(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \lambda_1),\ (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \ldots, \lambda_2), \ldots\ (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \ldots, \lambda_k)$$

désignent les plus hautes puissances de ces inconnues, est marqué par la valeur du déterminant

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \ldots & \lambda_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \ldots & \lambda_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \ldots & \lambda_3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_k & \beta_k & \gamma_k & \ldots & \lambda_k \end{vmatrix}$$

dans le développement duquel on met, par convention, toujours le signe plus *devant tous les termes.*

TROISIÈME CONFÉRENCE

Applications géométriques de la méthode de correspondance analytique.

I.

Applications de la méthode de correspondance analytique à la détermination de l'ordre d'un lieu géométrique défini par des conditions algébriques.

1. *Notions préliminaires.* — Tout lieu géométrique défini par des conditions algébriques se présente toujours sous la forme de $k+h$ équations

$$
(A)\left\{\begin{array}{l}
U_1(x,y,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
U_2(x,y,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
U_3(x,y,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
U_k(x,y,a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
\quad U_{k+1}(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
\quad U_{k+2}(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,\\
\quad\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\quad U_{k+h}(a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1})=0,
\end{array}\right.
$$

renfermant $k+h-1$ paramètres arbitraires $a_1,a_2,a_3,\dots,a_{k+h-1}$.

Si l'on attribue à $k-1$ de ces $k+h-1$ paramètres des valeurs arbitraires, les autres sont par là même déterminées par les h dernières équations, et les k courbes représentées par les k premières équations sont dites *correspondantes aux valeurs particulières supposées aux $k-1$ paramètres.*

On voit dès lors que k courbes *correspondantes* ne passent généralement pas par un même point I du plan; il n'y a même *généralement* pas plus de deux courbes *correspondantes* se croisant en un même point I. Cest seulement pour *certaines* valeurs des paramètres arbitraires que k courbes *correspondantes* se

coupent en un même point I *dont l'ensemble constitue le lieu* (A).

On obtient d'ailleurs l'équation de ce lieu (A) en substituant, aux relations qui le définissent, les relations équivalentes :

$$(\mathrm{B})\ \left\{\begin{array}{l} V_1(x,y)=0,\\ V_2(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ V_3(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ V_{k+h}(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0, \end{array}\right\}\ (^1)$$

c'est-à-dire les relations obtenues en éliminant les $k+h-1$ paramètres entre les équations (A). On s'en rend compte en observant que :

1° Si $x', y', a'_1, a'_2, a'_3, \ldots, a'_{k+h-1}$ vérifient le système (A), cette solution doit aussi vérifier (B), *puisque les deux systèmes sont équivalents;*

2° Réciproquement si x', y' vérifient la première équation de (B), en substituant ces valeurs dans les $k+h-1$ suivantes, on obtient $k+h-1$ équations déterminant une solution en $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{k+h-1}$, lesquelles, jointes aux valeurs données x', y', constituent une solution complète de (B), et, par suite, de son équivalent (A).

Ainsi, il est bien prouvé que : 1° *tout point de croisement* (x', y') *de k courbes correspondantes se trouve sur la courbe représentée par* V_1; 2° *réciproquement tout point* (x', y') *de la courbe représentée par* V_1, *correspond à un point de croisement de k courbes correspondantes* (²).

2. *Détermination de l'ordre du lieu* (A). — Ces préliminaires établis, voici comment on obtient l'ordre du lieu (A), c'est-à-dire

(¹) *En général*, ces équations sont de la forme

$$\left\{\begin{array}{l} a_1=H_1(x,y),\\ a_2=H_2(x,y,a_1),\\ a_3=H_3(x,y,a_1,a_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{k+h-1}=H_{k+h-1}(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-2}). \end{array}\right.$$

(²) Ces considérations générales concernant les lieux plans s'étendent évidemment d'elles-mêmes aux surfaces.

le nombre de points, situés à distance finie, communs à ce lieu et à une droite arbitraire Δ que l'on peut toujours supposer issue de l'origine des coordonnées [1].

Si l'on suppose cette droite Δ représentée par la relation

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \rho \text{ [2]},$$

dans laquelle p, q sont des nombres arbitraires donnés, les distances, comptées à partir de l'origine des coordonnées, des points communs à cette droite et au lieu, seront manifestement déterminées par les solutions finies en ρ communes au système d'équations

$$(C)\left\{\begin{array}{r} U_1(p\rho, q\rho, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_2(p\rho, q\rho, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_3(p\rho, q\rho, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_k(p\rho, q\rho, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_{k+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_{k+2}(a_1, a_2, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{k+h}(a_1, a_2, \ldots, a_{k+h-1}) = 0, \end{array}\right.$$

contenant les $k+h$ inconnues $\rho, a_1, a_2, \ldots, a_{k+h-1}$. La question est donc ramenée au problème traité dans la conférence précédente [3].

---

[1] Si l'on désirait prendre une droite entièrement arbitraire, on devrait faire usage de l'équation

$$\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \rho.$$

[2] S'il s'agissait d'équations représentant des surfaces, on considèrerait la droite définie par

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \rho.$$

[3] On voit de plus que si, dans les équations (A) de définition, le nombre des paramètres arbitraires était supérieur à $k+h-1$, tous les points de la droite arbitraire Δ feraient partie du lieu; en d'autres termes, le lieu se composerait de tout le *plan*; si, au contraire, sans changer le nombre $k+h-1$ des paramètres arbitraires, on diminuait le nombre des équations d'une ou plusieurs unités, le lieu se composerait, dans le premier cas, d'un certain nombre de points, et serait, dans le second cas, sans solution.

3. *Observation importante.* — Il arrive, dans une foule de problèmes, qu'en substituant au système (C) un système équivalent, on obtient tout de suite la solution demandée. En particulier, il arrive que l'on simplifie presque toujours la question si l'une des équations contient ρ au premier degré, en ayant soin de résoudre cette équation et de porter la valeur de ρ obtenue dans les autres [1].

4. *Première application.* — *Déterminer l'ordre du lieu défini par les équations*

$$U_1(x,y,a_1,a_2)=0,$$
$$U_2(x,y,a_1,a_2)=0,$$
$$U_3(x,y,a_1,a_2)=0,$$

supposées les plus générales d'ordres m_1, m_2, m_3, par rapport à l'ensemble des lettres x, y, a_1, a_2.

La question étant de déterminer le nombre des solutions finies en ρ communes aux équations

$$U_1(p\rho,q\rho,a_1,a_2)=0,$$
$$U_2(p\rho,q\rho,a_1,a_2)=0,$$
$$U_3(p\rho,q\rho,a_1,a_2)=0,$$

on voit tout de suite, *puisque ces équations sont les plus générales* d'ordre m_1, m_2, m_3 *par rapport aux trois inconnues* ρ, a_1, a_2, que le nombre N_0 demandé est égal à

$$N_0 = m_1 . m_2 . m_3 .$$

5. *Seconde application.* — Théorème. — *Le degré* N_0 *du lieu géométrique dont on obtient l'équation en éliminant le paramètre a entre les relations*

$$(1) \qquad U_1(\overset{\delta_1}{\overline{x,y}},a^{\alpha_1})=0, \qquad U_1(\overset{\delta_1}{\overline{x,y,z}},a^{\alpha_1})=0,$$

$$(2) \qquad U_2(\overset{\delta_2}{\overline{x,y}},a^{\alpha_2})=0, \qquad U_2(\overset{\delta_2}{\overline{x,y,z}},a^{\alpha_2})=0,$$

supposées les plus générales des degrés δ_1, δ_2, par rapport aux variables $(x,y),(x,y,z)$, et ayant pour coefficients des fonctions

---

[1] On trouvera notamment des applications de cette remarque dans une Note *Sur les systèmes de coniques*, insérée au *Bulletin* de l'Académie de Belgique, septembre 1876, et dans le Mémoire *Sur un Paradoxe mathématique*.

les plus générales des degrés α_1, α_2 par rapport au paramètre a, est égal à

$$N_0 = \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1.$$

Démonstration. — La question revient évidemment à chercher le nombre des coïncidences, situées à distance finie, dans les séries de points définies par les relations

$$(3) \qquad U_1(\overline{p\rho_1, q\rho_1}^{\delta_1}, a^{\alpha_1}) = 0, \qquad U_1(\overline{p\rho_1, q\rho_1, r\rho_1}^{\delta_1}, a^{\alpha_1}) = 0,$$

$$(4) \qquad U_2(\overline{p\rho_2, q\rho_2}^{\delta_2}, a^{\alpha_2}) = 0, \qquad U_2(\overline{p\rho_2, q\rho_2, r\rho_2}^{\delta_2}, a^{\alpha_2}) = 0,$$

Le principe de correspondance géométrique entre deux séries de points conduit tout de suite au résultat.

Cherchons d'abord le nombre des valeurs de ρ_2 qui correspondent à une valeur arbitrairement finie ou infinie de ρ_1. L'équation (3) étant, pour toute valeur arbitrairement finie ou infinie de ρ_1, de degré α_1, par rapport au paramètre a, il en résulte qu'il y a *toujours*, pour ρ_1 supposé arbitrairement fini ou *infini*, α_1 solutions finies en a_1. D'ailleurs, puisqu'il n'y a pas de relations entre les coefficients des deux équations, aucune des solutions en a_1, résultant de l'hypothèse $\rho_1 = \infty$, substituée dans (4), ne peut rendre nul le coefficient de $\rho_2^{\delta_2}$; donc il y a *toujours*, pour ρ_1 supposé arbitrairement fini ou infini, $\alpha_1\delta_2$ valeurs finies correspondantes pour ρ_2.

On voit tout aussi facilement qu'en supposant ρ_2 arbitrairement fini ou infini, il y a *toujours* $\alpha_2.\delta_1$ valeurs correspondantes finies pour ρ_1; donc, conformément au Principe de correspondance entre deux séries de points, on a bien

$$N_0 = \delta_1\alpha_2 + \delta_2\alpha_1.$$

6. *Troisième application.* — THÉORÈME. — *Le degré* N_0 *du lieu géométrique dont on obtient l'équation en éliminant les paramètres a_1, a_2 entre les relations*

$$(1) \qquad U_1(\overline{x, y}^{\delta_1}, \overline{a_1, a_2}^{\alpha_1}) = 0, \qquad U_1(\overline{x, y, z}^{\delta_1}, \overline{a_1, a_2}^{\alpha_1}) = 0,$$

$$(2)\qquad U_2(\overline{x,y}^{\delta_2},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_2})=0,\qquad U_2(\overline{x,y,z}^{\delta_2},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_2})=0,$$

$$(3)\qquad U_3(\overline{x,y}^{\delta_3},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_3})=0,\qquad U_3(\overline{x,y,z}^{\delta_3},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_3})=0,$$

supposées les plus générales des degrés $\delta_1,\delta_2,\delta_3$, par rapport aux variables $(x,y),(x,y,z)$, et ayant pour coefficients des fonctions les plus générales des degrés $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$, par rapport aux paramètres a_1 et a_2, est égal à

$$N_0=\alpha_1\alpha_2\delta_3+\alpha_2\alpha_3\delta_1+\alpha_3\alpha_1\delta_2.$$

Démonstration. — La question revient évidemment à chercher le nombre des coïncidences, situées à distance finie, dans les trois séries de points définies par les relations

$$(4)\qquad U_1(\overline{p\rho_1,q\rho_1}^{\delta_1},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_1})=0,\qquad U_1(\overline{p\rho_1,q\rho_1,r\rho_1}^{\delta_1},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_1})=0,$$

$$(5)\qquad U_2(\overline{p\rho_2,q\rho_2}^{\delta_2},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_2})=0,\qquad U_2(\overline{p\rho_2,q\rho_2,r\rho_2}^{\delta_2},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_2})=0,$$

$$(6)\qquad U_3(\overline{p\rho_3,q\rho_3}^{\delta_3},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_3})=0,\qquad U_3(\overline{p\rho_3,q\rho_3,r\rho_3}^{\delta_3},\overline{a_1,a_2}^{\alpha_3})=0.$$

Le principe de correspondance entre trois séries de points conduit tout de suite au résultat.

Cherchons d'abord le nombre des valeurs de ρ_3 qui correspondent à des valeurs arbitrairement finies ou infinies de ρ_1 et ρ_2. Les équations (4, 5) étant, pour toutes les valeurs arbitrairement finies ou infinies de ρ_1,ρ_2, les plus générales des degrés α_1,α_2, par rapport aux paramètres a_1,a_2, il en résulte qu'il y a *toujours*, pour ρ_1 et ρ_2 supposés arbitrairement finis ou infinis, $\alpha_1.\alpha_2$ solutions finies en a_1,a_2. D'ailleurs, puisqu'il n'y a pas de relations entre les coefficients des trois équations, aucune des solutions en (a_1,a_2), résultant de la double hypothèse $\begin{cases}\rho_1=\infty,\\ \rho_2=\infty,\end{cases}$ substituées dans (6), ne peut rendre nul le coefficient de $\rho_3^{\delta_3}$; donc il y a *toujours*, pour ρ_1 et ρ_2 supposés arbitrairement finis ou infinis, $\alpha_1.\alpha_2.\delta_3$ valeurs finies correspondantes pour ρ_3.

On voit tout aussi facilement : 1° qu'à des valeurs arbitraire-

ment finies ou infinies de ρ_2 et ρ_3 correspondent $\alpha_2\alpha_3\delta_1$ valeurs finies pour ρ_1; 2° qu'à des valeurs arbitrairement finies ou infinies de ρ_1, ρ_3 correspondent $\alpha_3\alpha_1\delta_2$ valeurs finies pour ρ_2. Donc, conformément au Principe de correspondance entre trois séries de points, on a bien

$$N_0 = \alpha_1\alpha_2\delta_3 + \alpha_2\alpha_3\delta_1 + \alpha_3\alpha_1\delta_2.$$

7. *Nota 1.* — La méthode de correspondance analytique, comme on peut le constater en lisant une Note insérée p. 565 des *Nouvelles annales* de l'année 1873, permet de démontrer immédiatement un nombre indéfini de théorèmes pareils à ceux dont nous venons de nous occuper.

8. *Nota 2.* — Voici encore, parmi les résultats déjà publiés, ceux sur lesquels j'appelle particulièrement l'attention du lecteur:

1° Le problème de la page 18 du Mémoire inséré au *Bulletin* de l'Académie de Belgique, mois d'août 1876. Ce problème met en parfaite évidence les considérations développées p. 29 et 30 dudit mémoire.

2° Les divers problèmes considérés dans la Note *sur les systèmes de coniques,* insérée au *Bulletin* de l'Académie de Belgique, septembre 1876.

3° Le degré du lieu considéré p. 75 dans mes *Recherches sur la méthode de correspondance analytique et sur la loi de décomposition* (1).

4° Le problème traité dans les *Comptes rendus* du 3 janvier et du 4 septembre de l'année 1876. Ce problème a eu surtout pour but d'enseigner à déterminer les degrés des points et lignes multiples des lieux définis par des conditions algébriques.

5° La détermination des degrés des courbes gauches considérées dans mes communications insérées aux *Bulletins* de l'Académie de Belgique : 1° mois de mars 1877; 2° mois d'août 1876; 3° mois de janvier 1877.

---

(1) L'expédient qui permet de déterminer le degré de ce lieu m'a été souvent fort utile.

II.

Loi de génération indiquant les conditions pour que k courbes ou surfaces variables, de position et de forme, suivant des lois déterminées, engendrent un lieu géométrique résultant de l'ensemble des points du plan ou de l'espace où se croisent k courbes ou surfaces correspondantes. — Applications aux recherches de géométrie pure du principe de correspondance géométrique entre k séries de points.

9. Dans toutes les parties des sciences, on se propose de ramener à un petit nombre de principes ou de lois toutes les vérités déjà connues. Voici, au sujet de la génération d'un lieu engendré par le croisement simultané de k courbes ou surfaces, l'énoncé d'une loi dont la fécondité est, pour ainsi dire, inépuisable dans les recherches de géométrie pure :

Loi de génération. — 1° Pour que k courbes ou surfaces variables, de position et de forme, suivant des lois déterminées, engendrent un lieu géométrique, résultant de l'ensemble des points du plan ou de l'espace où se croisent k courbes ou surfaces correspondantes, il faut et il suffit que $k - 1$ d'entre elles étant assujetties à passer respectivement par $k - 1$ points arbitraires, la dernière se trouve par là même déterminée; 2° ces courbes ou surfaces en se mouvant déterminent toujours, sur une droite arbitraire, k séries de points, dont les points de coïncidence représentent les points communs à la droite et au lieu.

Pour démontrer cette loi, il suffit de se rappeler qu'après avoir traduit analytiquement l'énoncé de tout lieu géométrique, il se présente toujours [1] sous la forme de $k + h$ équations contenant

[1] Voir les deux premiers paragraphes de cette Conférence.

$k+h-1$ paramètres arbitraires.

$$(D)\left\{\begin{array}{l} U_1(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ U_2(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ U_3(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ U_k(x,y,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \quad U_{k+1}(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \quad U_{k+2}(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad U_{k+h}(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0. \end{array}\right.$$

Or, l'inspection seule de ces équations montre que $k-1$ des courbes génératrices étant assujetties à passer par $k-1$ points arbitraires, tous les paramètres arbitraires se trouvent déterminés et, par suite, la $k^{ième}$ courbe génératrice. Donc, en se mouvant, ces courbes décrivent toujours sur une droite arbitraire k séries de points dont les points de coïncidence sont les points communs à la droite et au lieu. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on voulait, de plus, définir analytiquement ces séries de points, on procèderait comme il suit :

Il est évident que, sans rien particulariser, on peut supposer que la droite Δ soit représentée par l'équation

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}=\rho.$$

Dans cette hypothèse, on sait que les distances, comptées à partir de l'origine, des points communs à cette droite et au lieu, sont déterminées par les solutions finies en ρ communes aux équations

$$(E)\left\{\begin{array}{l} U_1(p\rho,q\rho,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ U_2(p\rho,q\rho,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ U_3(p\rho,q\rho,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ U_k(p\rho,q\rho,a_1,a_2,a_3,\ldots,a_{k+h-1})=0,\\ \quad U_{k+1}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{k+h-1})=0,\\ \quad U_{k+2}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{k+h-1})=0,\\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \quad U_{k+h}(a_1,a_2,a_3,\ldots a_{k+h-1})=0. \end{array}\right.$$

Or, si l'on prend sur Δ les $k-1$ points arbitraires A_1, A_2, $A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_k$, à des distances de l'origine marquées par des nombres donnés $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_k$, les valeurs correspondantes de la variable ρ_i s'obtiendront en considérant les solutions finies en ρ_i communes aux $k+h$ équations

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} U_1(p\rho_1, q\rho_1, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_2(p\rho_2, q\rho_2, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ U_3(p\rho_3, q\rho_3, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_k(p\rho_k, q\rho_k, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \qquad U_{k+1}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \qquad U_{k+2}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad U_{k+h}(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{k+h-1}) = 0, \end{array} \right.$$

contenant les $k+h$ inconnues $\rho_i, a_1, a_2, \dots, a_{k+h-1}$.

De plus, il est manifeste que la relation

$$U(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_k) = 0,$$

liant les k variables $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i, \dots, \rho_k$, s'obtiendra en éliminant les $k+h-1$ paramètres $a_1, a_2, \dots, a_{k+h-1}$ entre ces $k+h$ dernières équations.

10. *Importance du Principe de correspondance géométrique entre k séries de points mise en évidence par la loi de génération.* — Puisque tout lieu géométrique donne naissance, sur une droite arbitraire, à k séries de points, dont les points de coïncidence sont les points communs à la droite et au lieu, on comprend tout de suite l'importance du Principe de correspondance géométrique entre k séries de points, puisqu'il indique un moyen, *purement géométrique,* fort général, pour déterminer ce nombre de coïncidences, c'est-à-dire l'ordre du lieu. Si l'on se reporte, en effet, à l'énoncé de ce Principe, il conduit immédiatement à cette conclusion :

11. *Conclusion.* — Si un lieu est défini par la variation de

k courbes ou surfaces $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_i, \ldots, A_k$, on saura déterminer son ordre toutes les fois :

1° *Que l'on connaîtra le nombre des courbes ou surfaces* A_i *obtenues en assujettissant les autres* $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_k$ *à passer respectivement par l'un des* $k-1$ *points arbitraires* $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}, P_{i+1}, \ldots, P_k$;

2° *Qu'il existera une droite* Δ *qui ne soit pas direction asymptotique commune à un même groupe de* k *courbes ou surfaces correspondantes.*

12. *Nota.* — Pour les applications, nous renvoyons le lecteur à nos Mémoires : 1° *Considérations générales sur la détermination, sans calcul, de l'ordre d'un lieu géométrique;* 2° *Mélanges de géométrie supérieure* (1); 3° *Compte rendu* du 29 novembre 1875, p. 1047 (2).

ADDITION

Voici les titres des prochaines Conférences que je me propose de publier :

1. Considérations sur les beaux travaux de MM. de Jonquières et Chasles relatifs aux systèmes de courbes et surfaces. — État précis de ce qui a été fait et de ce qui reste à faire.

2. Méthode pour lever l'indétermination, résultant d'un nombre infini de solutions communes, dans divers systèmes d'équations.

3. Sur les formules de Plücker et de M. Cayley.

4. Détermination de toutes les singularités ordinaires d'un lieu défini par des conditions algébriques.

5. Sur un paradoxe mathématique.

---

(1) Voir p. 12, 13 et 14.

(2) Je dois surtout citer, au sujet de l'application du Principe de correspondance géométrique, entre *deux* séries de points, les belles recherches que publie M. Chasles, depuis une vingtaine d'années, dans les *Comptes rendus* de l'Académie des Sciences de Paris.

6. Sur divers caractères de décomposition.

7. Sur la théorie générale des courbes et surfaces considérées comme enveloppes de courbes et surfaces.

8. Sur la théorie générale de k séries de points situées sur une droite (1). Nombreux développements sur les travaux de M. Chasles dans le cas particulier où les séries sont homographiques, c'est-à-dire dans le cas particulier où la relation $U(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_k) = 0$ se réduit à $A\rho_1\rho_2 + B\rho_1 + C\rho_2 + D = 0$.

9. Analyse des travaux de Poncelet et Chasles sur les Principes d'Homographie et de Dualité.

10. Sur le Principe Arguesien.

---

(1) Voir nos *Mélanges de Géométrie supérieure*, p. 1-12.

DÉTERMINATION

EN FONCTION DES COORDONNÉES

DE LA FORCE QUI FAIT MOUVOIR UN POINT MATÉRIEL

SUR UNE SECTION CONIQUE

PAR M. V.-G. IMCHENETSKY,
Professeur à l'Université impériale de Kharkof.

M. Bertrand a inséré, il y a deux ans, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris,* une Note (¹) dont l'intérêt ressort de ce passage du préambule :

« Si Kepler n'avait déduit de l'observation qu'une seule de ses lois : *Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil occupe le foyer,* on aurait pu de ce seul résultat, érigé en principe général, conclure que la force qui les gouverne est dirigée vers le soleil et inversement proportionnelle au carré de la distance. » Après avoir indiqué une ingénieuse solution analytique de ce problème, M. Bertrand a proposé en même temps aux recherches des géomètres la généralisation suivante de la question. Je citerai encore les paroles de l'auteur :

« Il serait intéressant de résoudre la question suivante :

» *En sachant que les planètes décrivent des sections coniques, et sans rien supposer de plus, trouver l'expression des composantes de la force qui les sollicite en fonction des coordonnées de son point d'application.*

» Nous connaissons deux solutions : la force peut être dirigée

---

(¹) Sur la possibilité de déduire d'une seule des lois de Kepler le principe de l'attraction. *Comptes rendus,* 9 avril 1877, p. 671-674.

vers un centre fixe et agir proportionnellement à la distance ou en raison inverse de son carré. En existe-t-il d'autres?...

» La méthode précédente » — celle qu'a employée M. Bertrand pour la solution du cas particulier énoncé plus haut — « pourrait conduire à la solution de ce problème; mais les calculs sont tellement compliqués, qu'aucun géomètre, je crois, ne tentera de les exécuter avant d'avoir trouvé le moyen de les simplifier. »

Je vais chercher à faire voir que la possibilité de cette simplification des calculs, prévue par M. Bertrand, dépend d'un choix convenable de la forme de l'équation générale des sections coniques. Grâce à cette forme, je résous le problème général, en suivant exactement la voie indiquée par M. Bertrand pour la solution du cas particulier; les légères complications qui se présentent dans ce calcul sont aisément écartées à l'aide de certaines propriétés des déterminants.

Supposons un point matériel libre décrivant une section conique, déterminée, à l'aide de coordonnées rectilignes orthogonales x et y, par l'équation de forme générale

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Cette équation pourra se ramener à la forme non moins générale

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = (ax + by + c)^2, \tag{1}$$

en posant

$$c = \sqrt{F}, \qquad b = \frac{E}{\sqrt{F}}, \qquad a = \frac{D}{\sqrt{F}},$$

$$p = \frac{D^2}{F} - A, \qquad q = \frac{E^2}{F} - C, \qquad r = \frac{DE}{F} - B.$$

Le mouvement d'un point matériel libre dans un plan est déterminé par les équations différentielles

$$\frac{dx}{dt} = x', \qquad \frac{dy}{dt} = y', \qquad \frac{dx'}{dt} = X, \qquad \frac{dy'}{dt} = Y, \tag{2}$$

t désignant le temps, et X, Y les composantes de la force accélératrice parallèles aux axes des x et des y.

Il s'agit de déterminer les expressions de X et de Y en x et y, de manière que l'équation (1) soit une des intégrales du système d'équations (2), qui ne renferme aucune des variables x', y', t. Soient a, b, c trois constantes arbitraires entrant dans cette intégrale; il faudra alors considérer les autres coefficients p, q, r de l'équation (1) comme des constantes déterminées, qui peuvent entrer dans les expressions cherchées de X et de Y.

Effectuons maintenant les calculs nécessaires pour l'élimination des constantes arbitraires a, b, c de l'équation (1), ou, en d'autres termes, les calculs qui pourront servir à vérifier que l'équation (1) est une intégrale des équations différentielles (2), si X et Y étaient connus. De cette manière, nous devrons rencontrer la condition nécessaire, à laquelle devront satisfaire X et Y, et au moyen de laquelle on pourra trouver leurs valeurs. Pour cela, mettons l'équation (1) sous la forme

$$u = ax + by + c, \tag{3}$$

en posant

$$u^2 = px^2 + qy^2 + 2rxy. \tag{4}$$

En différentiant par rapport à t, on tire de (3), en vertu de (2) et de (4),

$$ax' + by' = \frac{(px + ry)x' + (rx + qy)y'}{u}. \tag{5}$$

En continuant à différentier par rapport à t, et ayant encore égard aux équations (2) et (4), on aura

$$\begin{aligned} aX + bY = {} & \frac{(px + ry)X + (rx + qy)Y}{u} \\ & + \frac{[(px' + ry')x' + (rx' + qy')y'] [(px + ry)x + (rx + qy)y]}{u^3} \\ & - \frac{[(px + ry)x' + (rx + qy)y']^2}{u^3}. \end{aligned}$$

Dans le second membre de cette équation, le multiplicateur

de $\frac{1}{u^3}$ peut, à l'aide des déterminants, se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} (px+ry)x+(rx+qy)y, & (px+qy)x'+(rx+qy)y' \\ (px+ry)x'+(rx+qy)y', & (px'+qy')x'+(rx'+qy')y' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} p & r \\ r & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}$$
$$= (pq-r^2)(xy'-yx')^2.$$

Par suite, l'équation précédente prend la forme

$$(6)\quad aX+bY = \frac{(px+ry)X+(rx+qy)Y}{u} + \frac{(pq-r^2)(xy'-yx')^2}{u^3}.$$

De plus, on tire des équations (5) et (6)

$$a = \frac{px+ry}{u} + \frac{(pq-r^2)y'(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')},$$
$$b = \frac{rx+qy}{u} + \frac{(pq-r^2)x'(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}.$$

Maintenant, pour l'élimination définitive des constantes arbitraires, il ne reste plus qu'à différentier l'une ou l'autre des deux dernières équations, la première par exemple, par rapport à t, ce qui donne d'abord, en vertu de (2) et de (4),

$$0 = \frac{(px'+qy')[(px+ry)x+(rx+qy)y]}{u^3} - \frac{(px+qy)[(px+ry)x'+(rx+qy)y']}{u^3}$$
$$+ \frac{(pq-r^2)(xy'-yx')^2}{u^3(Xy'-Yx')}\left(\begin{array}{l} Y-3y'\dfrac{(px+ry)x'+(rx+qy)y'}{u^2} \\ -y'\dfrac{\left(\dfrac{\partial X}{\partial x}x'+\dfrac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}x'+\dfrac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'} \end{array}\right)$$
$$+ \frac{2(pq-r^2)y'(xy'-yx')(xY-yX)}{u^3(Xy'-Yx')}.$$

A l'aide de transformations évidentes, les deux premiers termes pourront s'écrire ainsi :

$$-\frac{y'}{u^3}\begin{vmatrix} px+ry, & rx+qy \\ px'+ry', & rx'+qy' \end{vmatrix} = -\frac{y}{u^3}\begin{vmatrix} p & r \\ r & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix};$$

par suite, tous les termes de l'équation contiendront comme facteur commun

$$\frac{pq-r^2}{u^3}(xy'-yx');$$

en supprimant ce facteur, il vient

$$(7)\quad \left\{ 0 = -y + \frac{xy'-yx'}{Xy'-Yx'} \left(\begin{aligned} & Y - 3y'\frac{(px+ry)x'+(rx+qy)y'}{u^2} \\ & -y'\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}x'+\frac{\partial X}{\partial y}y'\right)y'-\left(\frac{\partial Y}{\partial x}x'+\frac{\partial Y}{\partial y}y'\right)x'}{Xy'-Yx'} \end{aligned} \right) + \frac{2y'(xY-yX)}{Xy'-Yx'} \right.$$

Si les expressions cherchées de X, Y en fonction de x, y étaient connues, l'équation (7), comme résultat de la vérification de ce que (1) est une intégrale de (2), devrait avoir lieu pour toutes valeurs de x, y, x', y'. Mais en laissant X et Y indéterminées, et faisant $x=x'$, $y=y'$ dans l'équation (7), on trouve que son terme moyen s'annule évidemment, et les deux termes restants donnent

$$-y-2y=0, \quad \text{ou} \quad -3y=0,$$

équation visiblement absurde. Pour écarter cette contradiction des résultats, il faut nécessairement que X et Y aient des expressions en x et y pour lesquelles le facteur $xy'-yx'$ du terme moyen de l'équation (1) se réduise avec son dénominateur $Xy'-Yx'$. Par conséquent, les composantes de la force accélératrice doivent avoir des expressions de la forme

$$X = V.x, \qquad Y = V.y,$$

V étant une fonction encore inconnue de x et de y. Cette conclusion nous montre que l'on a

$$xY-yX=0,$$

c'est-à-dire que le moment de la force accélératrice par rapport à l'origine des axes coordonnés auxquels est rapportée la section conique, est constamment nul, et par suite que ce point est le centre de la force accélératrice.

En substituant, dans l'équation (7), les expressions (8) de X et de Y, on trouve, après des simplifications,

$$\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y'\right) + \frac{3[(px+ry)x' + (rx+qy)y']}{u^2} = 0,$$

équation qui a lieu pour toutes valeurs de x' et de y'; d'après cela, elle se décomposera dans les deux équations

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{3(px+ry)}{u^2} = 0,$$

$$\frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{3(rx+qy)}{u^2} = 0.$$

Multipliant ces dernières respectivement par dx, dy, et faisant la somme, il vient

$$\frac{dV}{V} + \frac{3[(px+ry)dx + (rx+qy)dy]}{u^2} = 0.$$

Or, la différentiation de (4) donne

$$u\,du = (px+ry)dx + (rx+qy)dy;$$

par conséquent,

$$\frac{dV}{V} + \frac{3du}{u} = 0.$$

En intégrant cette équation, et désignant par μ une constante arbitraire, on a

$$(9) \qquad V = \frac{\mu}{u^3} = \frac{\mu}{(px^2+2rxy+qy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Par suite,

$$X = \frac{\mu x}{(px^2+2rxy+qy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu x}{u^3},$$

$$Y = \frac{\mu y}{(px^2+2rxy+qy^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu y}{u^3}.$$

On a d'après cela, pour la résultante des forces X, Y,

$$(10) \qquad F = \frac{\mu\sqrt{x^2+y^2}}{(px^2+2rxy+qy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin, en introduisant, au lieu de x, y, le rayon R, partant de l'origine, et l'angle θ que ce rayon forme avec l'axe des x, il vient

$$(11) \qquad F = \frac{1}{[\frac{1}{2}(p-q)\cos 2\theta + r\sin 2\theta + \frac{1}{2}(p+q)]^{\frac{3}{2}}}\frac{\mu}{R^2} = \frac{\mu R}{u^3}.$$

Ainsi, du seul fait qu'un corps (un point matériel) libre décrit une section conique, et de l'hypothèse que la force accélératrice agissant sur lui ne varie qu'avec la position du corps, il résulte nécessairement :

1° Que la direction de la force passe toujours par un centre fixe, qui peut être toutefois un point quelconque du plan de la section conique;

2° Que l'intensité de la force F doit venir en général, comme l'indique la formule (11), non seulement avec la distance R du centre de la force au corps mobile, mais aussi avec la direction de son rayon vecteur.

Il reste encore à faire voir comment de cette solution générale on peut tirer les deux cas particuliers connus, où le centre de la force est supposé placé au centre de la section conique ou de son foyer, ce qui rend l'intensité de la force accélératrice indépendante de sa direction, et, dans le premier cas, proportionnelle au rayon vecteur; dans le second cas, inversement proportionnelle au carré de ce rayon.

Si nous supposons le centre de la force au centre de la section conique, et qu'en même temps nous transportions l'origine des coordonnées en ce point, nous aurons

$$D = 0, \qquad E = 0$$

dans la première forme générale de l'équation des sections coniques, et par suite, dans la seconde forme,

$$a = 0, \qquad b = 0,$$

et

$$px^2 + qy^2 + 2rxy = c^2;$$

partant, en vertu de la formule fondamentale (10),

$$F = \frac{\mu}{c^3} \cdot R,$$

c'est-à-dire que l'intensité de la force ne dépend pas de sa direction, et est directement proportionnelle au rayon vecteur.

Si nous supposons le centre de la force au foyer, et que nous prenions ce foyer pour origine des coordonnées, alors le rayon vecteur R, mené de ce point à un point quelconque de la section conique, sera exprimé par une fonction du premier degré des coordonnées de ce point, c'est-à-dire que l'équation (1) prendra la forme

$$R = ax + by + c,$$

et l'on aura en même temps

$$u = R.$$

Donc la formule (11) prendra la forme

$$F = \frac{\mu}{R^2},$$

c'est-à-dire que l'intensité de la force accélératrice se trouvera encore indépendante de sa direction, et variera en raison inverse du carré du rayon vecteur.

Je dois nécessairement ajouter encore quelques mots à la suite de la Note précédente. Je me suis occupé de la résolution du problème de M. Bertrand aussitôt que j'en ai connu seulement l'énoncé. Il ne m'a pas été difficile de prévoir la possibilité de sa solution, parce que j'avais dès auparavant remarqué que les intégrales des équations de la forme générale

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(px^2 + qy^2)x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \varphi(px^2 + qy^2)y$$

s'obtiennent très simplement au moyen de quadratures, et que, dans le cas particulier de

$$\varphi(px^2+qy^2)=\frac{\mu}{(px^2+qy^2)^{\frac{3}{2}}},$$

on trouve pour trajectoire une section conique.

C'est pourquoi, en abordant la solution du problème inverse, proposé par M. Bertrand, j'observai que le succès de ses méthodes dépendait de la forme particulière

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2,$$

à laquelle on peut ramener les équations des sections coniques en coordonnées rectangulaires, quand l'origine de celles-ci est au foyer.

Je choisis, en conséquence, pour la forme de l'équation des sections coniques, celle-ci

$$px^2+qy^2=(ax+by+c)^2.$$

Il se trouve que les méthodes de M. Bertrand étaient parfaitement applicables à cette forme, que la force accélératrice F, dans ce cas aussi, doit passer par l'origine des coordonnées, et s'exprime par la formule

$$F=\frac{\mu R}{(px^2+qy^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mon dessein de faire paraître en son temps la solution précédente dans un des journaux mathématiques français fut empêché par la publication d'un article de M. Darboux ([1]), dans lequel ce géomètre formule en ces termes le problème par lui résolu :

« Sachant qu'un point matériel, soumis à l'action d'une force *centrale*, décrit toujours une conique, trouver l'expression de la force. »

On voit par là que le problème primitif de M. Bertrand a été

([1]) *Recherche de la loi que doit suivre une force* CENTRALE *pour que la trajectoire qu'elle détermine soit toujours une conique.* (*Comptes rendus*, t. 84, 16 avril 1877, p. 760-762.)

modifié par M. Darboux, par l'addition d'une nouvelle condition, qui n'était pas supposée dans le premier énoncé, savoir, la condition que la force fût centrale, c'est-à-dire que la loi des aires eût lieu.

En effet, M. Darboux fonde sa solution sur la formule de Binet relative aux forces centrales,

$$F = \frac{C^2}{R^2}\left(\frac{1}{R} + \frac{d^2\frac{1}{R}}{d\theta^2}\right),$$

où C est le double de l'aire décrite dans l'unité de temps par le rayon vecteur R. Après avoir déterminé la section conique par l'équation

$$\frac{1}{R} = a\cos\theta + b\sin\theta + \sqrt{A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + H},$$

et lui avoir appliqué la formule de Binet, il trouve

$$F = \frac{C^2}{R^2}\frac{H^2 - A^2 B^2}{(A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + H)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il est aisé de voir que ces deux dernières équations, par l'introduction des coordonnées rectangulaires, prennent la forme de l'équation (1) et de la formule (11).

Il me semble d'ailleurs que ma solution ne manque pas d'un certain intérêt, attendu que je n'ai absolument rien changé aux conditions énoncées par l'auteur même du problème, et que j'ai résolu le cas général par les mêmes méthodes que l'auteur a inventées pour la résolution des cas particuliers.

SUR LES

PRINCIPES DU CALCUL INFINITÉSIMAL

PAR F. GOMES TEIXEIRA
Professeur à l'Université de Coimbra.

---

1. Théorème. — Si l'équation

(1) $$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)=0$$

subsiste, quelque petite que soit la grandeur des différences Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$, elle subsiste encore quand ces différences sont nulles, c'est-à-dire que l'on a

(2) $$f(x, y, z, \ldots)=0.$$

En effet, en supposant la fonction f continue, on a

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, \ldots)=f(x, y, z, \ldots)+\Delta f(x, y, z, \ldots),$$

Δf étant une quantité qu'on peut faire aussi petite qu'on voudra, en diminuant convenablement les différences Δx. Δy, $\Delta z, \ldots$.

Si la fonction $f(x, y, z, \ldots)$ n'est pas nulle, elle a une valeur δ indépendante de Δx, Δy, $\Delta z, \ldots$; donc

$$\Delta f(x, y, z, \ldots)=-\delta,$$

résultat absurde, puisque Δf est une quantité variable qu'on peut rendre plus petite que δ.

2. Cela posé, si l'on veut résoudre une question que l'on traduit par l'équation (2), et si l'on ne connaît pas le moyen de trouver directement la solution, on pourra la trouver en cherchant pre-

mièrement à former l'équation (1) et en y faisant ensuite les différences Δx, Δy, Δz,... nulles. On suppose qu'on sache trouver l'équation (1), et pour cette raison ce que nous disons maintenant n'appartient encore qu'à la synthèse et à l'analyse ordinaires. Beaucoup de questions sont dans ce cas, comme, par exemple, toutes celles dont les géomètres se sont occupés avant l'existence du Calcul différentiel et du Calcul intégral.

Mais, au lieu de rendre nulles ces différences seulement dans le résultat final, on peut simplifier le calcul qui mène à l'équation (1) en faisant en chemin les différences Δx, Δy, Δz,... nulles, quand de cette manière on n'arrive pas à des résultats ou à des opérations sans signification. C'est dans cette simplification que consiste l'esprit du calcul infinitésimal.

Alors, au lieu de représenter les différences par la notation Δx, Δy, Δz, ..., on les représente par dx, dy, dz, ..., en convenant ainsi de représenter par dx, dy, dz, ... des différences indéterminées qu'on doit rendre nulles à la fin du calcul ou pendant ce calcul, quand de cette manière on n'arrive pas à des résultats ou à des opérations sans signification. Si, par exemple, dans le calcul apparaît le binôme $a + bdx$, a et b étant indépendantes des différentielles, nous pouvons supprimer le terme bdx. De la même manière, si dans le calcul apparaît $adx^n + bdx^m$ et qu'on ait $m > n$, on peut supprimer le terme bdx^m, parce que ce binôme est égal à $dx^n(a + bdx^p)$. C'est en cela que consiste le principe de Calcul infinitésimal qu'on a l'habitude d'énoncer de la manière suivante : « Une quantité infinitésimale doit être négligée quand elle se trouve additionnée à une quantité finie ou à une quantité d'ordre infinitésimal inférieur. »

Au contraire, si dans le calcul on rencontre, par exemple, l'expression $\frac{dy}{dx}$, on ne peut pas annuler dy et dx, parce que l'on arriverait au symbole $\frac{0}{0}$, et par conséquent nous continuerons à considérer dx et dy comme indéterminées tant qu'on ne peut pas les rendre nulles.

Si l'équation (1) contient des différences de second ordre $\Delta^2 x$,

$\Delta^2 y$, $\Delta^2 z$, ..., comme ces différences représentent des accroissements arbitraires de Δx, Δy, Δz, ..., cette équation doit subsister aussi, quand ces différences sont nulles, sans que les différences du premier ordre soient nulles. On peut donc les annuler pendant le calcul, quand cela est possible sans introduire des résultats insignifiants, en considérant toujours les différences du premier ordre comme arbitraires, et on peut convenir de les représenter dans ce cas par d^2x, d^2y, d^2z,.... Ainsi, par exemple, dans $ad^2x + bdx$, on doit supprimer ad^2x, si le terme bdx ne doit pas disparaître lui-même.

On arrive ainsi à une équation qui contient seulement dx, dy, dz,..., dont on déduit (2), comme nous avons déjà dit.

On considère de la même manière le cas où (1) pourra contenir des différences d'un ordre supérieur.

3. Nous avons supposé jusqu'ici que la question qu'on voulait résoudre menait à l'équation (1); mais on déduit de (1) et (2) que

$$(3) \qquad \Delta f(x, y, z, \ldots) = 0,$$

équation qui représente une relation entre les différences Δx, Δy, Δz, ... et les variables x, y, z. Souvent la question qu'on veut résoudre mène à l'équation (3), et, à cause de cela, il est nécessaire, pour la résoudre, d'avoir des moyens pour passer de l'équation (3) à l'équation (2). L'étude de ces moyens appartient au *Calcul inverse des différences*, qui sert ainsi à trouver une fonction (2) quand on connaît la relation entre les différences des variables.

Si dans (3) on égale à zéro toutes les différences qu'on peut annuler sans introduire des résultats ou des opérations insignifiants, et qu'on représente les autres par dx, dy, dz, ..., l'équation (3) se change en

$$(4) \qquad df(x, y, z, \ldots) = 0,$$

et, par conséquent, quand la question qu'on veut résoudre mène à cette équation, comme il arrive ordinairement, il faut chercher des moyens pour passer de cette équation à l'équation (2). L'étude

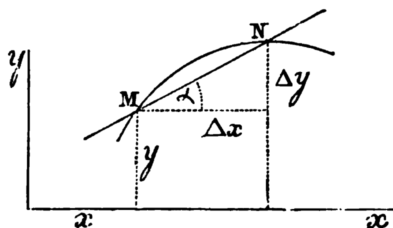
de ces moyens appartient au *Calcul intégral,* qui s'occupe ainsi de trouver la relation entre les variables x, y, z, ..., quand on connaît la relation dans laquelle se change la relation entre les différences Δx, Δy, Δz, ..., lorsqu'on égale à zéro celles qu'on peut annuler sans introduire des résultats insignifiants.

4. Nous allons donner un exemple des deux cas considérés au n° 3 et au n° 2.

Soit donnée l'équation

$$y = x^m,$$

m étant entier, et cherchons la valeur de tang α correspondante à la position de la droite MN au moment où N, qui s'approche indéfiniment de M, viendra coïncider avec M.



Comme nous voulons seulement le résultat correspondant à Δx et Δy nulles, nous emploierons dx et dy, que nous égalerons à zéro, suivant ce qu'on a dit au n° 2.

Nous avons donc

$$dy = \text{tang}\,\alpha . dx,$$

où l'on doit substituer par dy sa valeur donnée par l'équation de la courbe.

Elle donne

$$y + dy = (x + dx)^m = x^m + mx^{m-1} . dx,$$

en annulant les termes qui contiennent dx^2, dx^3, ...; donc

$$dy = mx^{m-1} dx$$

et

$$\text{tang}\,\alpha = mx^{m-1}.$$

Si l'on veut résoudre la question inverse, c'est-à-dire si l'on veut chercher la courbe dont la tangente fait l'angle mx^{m-1} avec l'axe des x, il faut chercher la valeur de y qui satisfait à l'équation

$$dy + mx^{m-1}dx,$$

c'est-à-dire qu'il faut chercher une relation entre x et y telle que, en faisant varier x et y de Δx et Δy, et supposant ensuite les différences Δx et Δy nulles dans tous les termes où cela est possible, suivant ce qu'on a dit au n° 2, on ait l'équation précédente.

Cette relation est

$$y = x^m + a,$$

qui donne, en effet,

$$y + \Delta y = x^m + m\Delta x x^{m-1} + \dots$$

ou

$$dy = mx^{m-1}dx.$$

Coimbra, 6 novembre 1879.

PHAKOMÈTRE ET OPTOMÈTRE

PAR LE D[r] G. SOUS

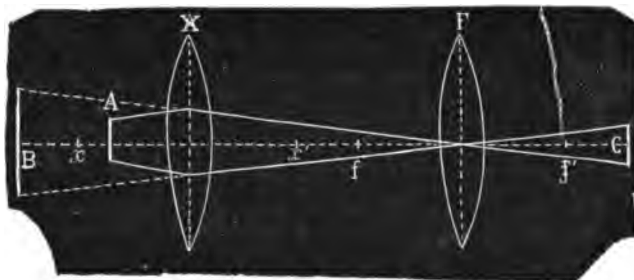
Les phakomètres sont des instruments destinés à mesurer la distance focale d'une lentille quelconque. De tous ceux qui ont été imaginés, les plus précis sont ceux de Silbermann et de Snellen, basés tous deux sur le principe suivant : Quand un objet est placé au double de la distance focale d'une lentille convergente, l'image réelle, de même grandeur que l'objet, est située aussi au double de la distance focale de la lentille.

Ces phakomètres sont constitués par deux plaques de verre, l'une *a*, représentant un dessin quelconque, et l'autre *b*, en verre dépoli, sur laquelle est gravée en grandeur égale le dessin de la plaque *a*. La lentille dont on veut connaître le foyer est placée au milieu des deux plaques, qui, par un mécanisme spécial, peuvent s'approcher ou s'éloigner de la lentille d'une quantité toujours égale. L'observateur meut les plaques jusqu'à ce que l'image réelle de la plaque *a*, fournie par la lentille, vienne coïncider avec le dessin gravé sur la plaque *b*. Cette coïncidence obtenue, il ne reste plus qu'à lire sur la graduation le résultat cherché, le foyer de la lentille étant la moitié de la distance de l'une des plaques à cette lentille.

Quoique cet instrument soit d'une très grande précision, il a deux inconvénients : le premier, sa longueur, qui le rend peu portatif, et le second, qui est plus grave, l'impossibilité de l'appliquer aux lentilles divergentes, car ces lentilles ne donnent pas d'images réelles.

Le phakomètre que nous avons fait disposer, en utilisant le

même système de plaque, n'a aucun de ces inconvénients; il s'applique aussi bien aux lentilles convergentes qu'aux lentilles divergentes et il est basé sur une théorie physique qui n'a pas encore été employée dans la construction des divers phakomètres. Voici cette théorie :



(Fig. 1.)

Soient deux lentilles centrées sur le même axe (*fig.* 1), l'une convergente F, dont le foyer est connu, et l'autre X, dont on veut connaître la distance focale. Pour la facilité de l'exposition, nous admettrons que cette lentille inconnue X est convergente.

Supposons un objet quelconque A placé à une distance de la lentille X, inférieure à sa distance focale; cette lentille étant convexe, il se formera une image virtuelle en B. En désignant par l la distance de l'objet A au foyer antérieur x de la lentille X, nous avons pour la relation entre la position de l'objet A et celle de son image virtuelle B, Bx' étant la distance de l'image B au foyer postérieur x' de la lentille X,

$$l(Bx') = X^2. \quad (1)$$

Le rapport entre la grandeur de l'image virtuelle B et celle de l'objet A est

$$\frac{B}{A} = \frac{X}{l}. \quad (2)$$

Les rayons lumineux qui, après avoir traversé la lentille X, arrivent sur la lentille F, sont comme s'ils partaient de l'image B et ils viennent se réunir en C, à une distance l' du foyer posté-

rieur f' de cette lentille. La distance de l'image B au foyer antérieur f de la lentille F étant $Bx' - X + d - F$, on a

$$(Bx' - X + d - F)l' = F^2.$$

En remplaçant dans cette équation Bx' par sa valeur tirée de l'équation (1), on a

$$(3) \qquad l' = \frac{lF^2}{X^2 + l(d - X - F)}$$

Le rapport entre la grandeur de l'image C et celle de l'image B est

$$(4) \qquad \frac{C}{B} = \frac{l'}{F}.$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (4) et en remplaçant dans l'équation (4) l' par sa valeur donnée par l'équation (3), on a pour le rapport entre l'image C et l'objet A l'équation suivante :

$$(5) \qquad \frac{C}{A} = \frac{XF}{X^2 + l(d - X - F)}.$$

Si l'on place l'objet A à une distance de la lentille X, égale à la distance focale de la lentille F, l devient égal à $X - F$, et si, en outre, la lentille X est placée au foyer antérieur de la lentille F, $d = F$, les équations (3) et (5) prennent les formes suivantes :

$$l' = \frac{(X - F)F}{X}.$$

D'où nous tirons pour la valeur de X :

$$(6) \qquad X = \frac{F^2}{F - l'}.$$

Le grossissement devient

$$(7) \qquad \frac{C}{A} = 1.$$

Il résulte de cette dernière équation (7) que l'image formée au

point C est toujours égale à l'objet A, quelle que soit la valeur de l' et quelle que soit la distance focale de la lentille X. Cette égalité constante nous permet d'utiliser le système des plaques des phakomètres de Silbermann et de Snellen et par suite d'obtenir le même degré de précision que ces instruments.

Voyons maintenant comment nous pourrons déterminer le foyer de la lentille inconnue X. Cette lentille a pour valeur $\frac{1}{X}$. En divisant l'unité par chacun des termes de l'équation (6), nous aurons pour la valeur de la lentille inconnue

$$(8) \qquad \frac{1}{X} = \frac{F - l'}{F^2} = \frac{1}{F} - \frac{l'}{F^2}.$$

La lentille F de notre phakomètre a 5 centimètres de distance focale; elle est égale à une lentille + 20 dioptries du système métrique. Son carré F^2 égale 2 millimètres $^1/_2$ ($0,05^2 = 0,0025$). En désignant par D dioptries la lentille inconnue X, l'équation précédente (8) devient

$$D = 20 - \frac{l'}{0,0025}.$$

Si à partir du foyer postérieur f' de la lentille F, nous établissons une graduation procédant par 2mm5, en un mot si nous faisons successivement l', 0, 1, 2, 3, x fois 2mm5, nous obtiendrons sur un parcours de dix centimètres toutes les valeurs comprises entre + 20 et — 20 dioptries en passant par ∞. Le zéro de la graduation se trouvera à 5 centimètres du foyer postérieur de la lentille F ou à 10 centimètres de cette lentille. Si $l' = 0$, c'est-à-dire si la plaque C se trouve au foyer de la lentille F, la lentille inconnue = + 20 dioptries. En effet, dans ce cas, l'objet A est placé à son foyer, les rayons qui le traversent sortent parallèles, et ces rayons parallèles, la lentille F les réunit à son foyer. Si la lentille X n'existe pas, comme l'objet A est placé à 10 centimètres de la lentille F, c'est-à-dire au double de sa distance focale, l'image C se formera aussi au double de la distance focale de la lentille F, c'est-à-dire à 10 centimètres où se trouve le zéro de la graduation,

ainsi que nous l'avons dit. Dans ce cas, qui permet de contrôler la parfaite graduation de l'instrument, nous sommes placé dans les mêmes conditions que présentent les phakomètres de Silbermann et de Snellen. Si nous éloignons la plaque C, à partir du zéro de la graduation, nous obtenons la série de valeurs convenables aux lentilles divergentes. Si la plaque C se trouve à 10 centimètres du foyer postérieur f' de la lentille F, l' est alors égal à 40 fois $2^{mm}5$, on a donc $D = 20 - 40 = -20$. La lentille inconnue est dans ce cas une lentille négative de 20 dioptries, ou une lentille concave de 5 centimètres de foyer.

Ainsi disposé, notre phakomètre aura la précision de ceux de Silbermann et de Snellen, puisque l'image étant constamment égale à l'objet, la mise au point de la plaque C sera toujours facile à obtenir; mais il n'en aura pas les inconvénients, car sa longueur invariable n'est que de 25 centimètres, et il pourra servir à déterminer aussi bien les lentilles convexes que les lentilles concaves.

Si cet instrument permet de mesurer la distance focale d'une lentille inconnue, il n'est pas difficile d'en faire l'application à la détermination de la réfraction de l'œil, en un mot de convertir le phakomètre en optomètre; c'est ce que nous avons fait, en conservant la même graduation, la même lentille F, avec ou sans addition de lentilles supplémentaires, ce qui nous a permis d'obtenir facilement trois optomètres pouvant se contrôler les uns les autres.

Avant de passer à la description, il est bon de rappeler que la réfraction de l'œil ne se détermine pas comme celle des lentilles ordinaires. Pour l'œil normal, les rayons parallèles se réunissent au foyer postérieur, où se trouve la rétine. Si l'œil est myope, la rétine est située en arrière de ce foyer postérieur, c'est le contraire pour l'œil hypermétrope. La lentille qui corrige l'amétropie, c'est-à-dire celle qui permet aux rayons parallèles d'avoir leur foyer sur la rétine, est considérée comme représentant la réfraction de cet œil. Si l'on désigne par φ' le foyer antérieur de l'œil, par φ'' son foyer postérieur, par η la distance entre la rétine et le foyer

postérieur, valeur positive ou négative suivant la nature de l'amétropie, et par D, la lentille métrique qui corrige l'amétropie, on a

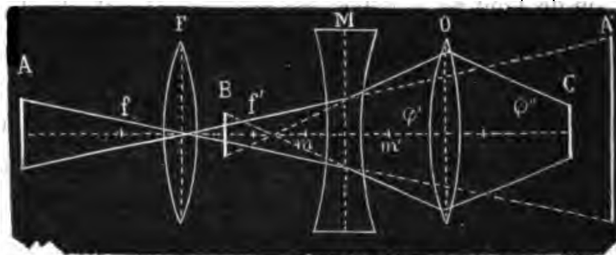
$$\eta = D\varphi'\varphi''.$$

Pour l'intelligence de ce qui va suivre, nous tenions à signaler cette équation, dont on trouvera la démonstration dans notre *Traité d'optique*.

Pour mesurer la réfraction de l'œil à l'aide de notre phakomètre, nous n'avons qu'à placer l'œil à observer du côté où était mise la lentille dont on voulait connaître le foyer. Nous aurons trois combinaisons qui nous permettront d'obtenir le résultat demandé. De ces trois combinaisons, qui pourront se contrôler les unes les autres, deux nous donneront aussi la mesure de l'acuité de la vision.

Première combinaison. Notre première combinaison n'est autre que la lunette de Galilée. Les deux lentilles ont la même distance focale, 5 centimètres, et la distance qui les sépare est constante, elle est égale aussi à 5 centimètres. L'œil est placé à une distance de 12 millimètres de l'oculaire concave, de manière à ce que cet œil en soit distant d'une quantité égale à son foyer antérieur φ'.

Pour démontrer qu'une pareille combinaison donnera à la fois l'acuité de la vision et la mesure de la réfraction, supposons un système de trois lentilles, centrées sur le même axe, les deux



(Fig. 2.)

extrêmes étant convexes et l'intermédiaire concave. Les deux premières F et M (*fig.* 2) représentant les lentilles de l'instrument

et la lentille O, ayant pour distances focales principales antérieure et postérieure, φ' et φ'', représente l'œil observé.

L'objet A, situé au delà de la distance focale antérieure f de la lentille F a son image réelle en A', à une distance l du foyer postérieur f', l' étant la distance de l'objet A au foyer antérieur f, on a

$$(1) \qquad ll' = F^2.$$

Le rapport entre l'image A' et l'objet A est le suivant :

$$(2) \qquad \frac{A'}{A} = \frac{F}{l'}.$$

Les rayons qui ont traversé la lentille F, en rencontrant la lentille M, deviennent divergents, et ces rayons prolongés en avant forment l'image B. Supposons que cette image B soit distante du foyer antérieur m de la lentille M, d'une quantité e, la distance de l'image A' au foyer postérieur m' de cette lentille étant $l + F - d - M$, on a

$$e(l + F - d - M) = M^2.$$

En remplaçant, dans cette équation, l par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient :

$$(3) \qquad e = \frac{l'M^2}{F^2 + l'(F - d - M)}.$$

Le rapport entre les deux images B et A' est le suivant :

$$(4) \qquad \frac{B}{A'} = \frac{e}{M}.$$

Les rayons, après avoir traversé la lentille M, rencontrent la lentille O et viennent former l'image C, distante du foyer postérieur φ'' d'une quantité η. La distance de l'image B au foyer antérieur φ' étant $e + M + x - \varphi'$, on a

$$\eta(e + M + x - \varphi') = \varphi'\varphi''.$$

En transportant dans cette équation la valeur de e, donnée par l'équation (3), on a

$$(5) \qquad \eta = \varphi'\varphi'' \frac{F^2 + l'(F - d - M)}{l'M^2 + (M + x - \varphi')[F^2 + l'(F - d - M)]}.$$

Le rapport entre les images C et B est le suivant :

$$(6) \qquad \frac{C}{B} = \frac{\eta}{\varphi''}.$$

En multipliant membre à membre les équations (2), (4), (6), nous avons, toutes substitutions faites, pour le rapport entre l'image C et l'objet A, la relation suivante :

$$(7) \qquad \frac{C}{A} = \frac{\varphi' F M}{l' M^2 + (M + x - \varphi')[F^2 + l'(F - d - M)]}.$$

Si dans les deux équations (5) et (7) on fait $F = M = d$ et $x = \varphi'$, conditions réalisées par l'instrument, on a

$$\eta = \varphi'\varphi'' \frac{F - l'}{F^2}.$$

Comme $\eta = \varphi'\varphi''D$, ainsi que nous l'avons dit, il vient, en remplaçant, dans l'équation précédente, η par cette valeur,

$$D = \frac{F - l'}{F^2} = \frac{1}{F} - \frac{l'}{F^2},$$

c'est-à-dire la même graduation que pour le phakomètre.

Le rapport entre l'image C et l'objet A devient

$$\frac{C}{A} = \frac{\varphi'}{F},$$

c'est-à-dire constant, ce qui nous permettra de mesurer l'acuité de la vision.

Seconde combinaison. L'œil restant à la même place que dans l'expérience précédente, la lentille concave M est enlevée, la lentille F du phakomètre est conservée, et à la place de l'objet A, on met une lentille convexe F′ qui se meut et qui a la même distance focale que la lentille F. L'œil vise un objet distant, qui peut être considéré comme étant situé à l'infini. Cette combinaison, quoique donnant des images de grandeur constante, ne peut servir à la mesure de l'acuité de la vision.

Si nous désignons par F′ la lentille mobile, par F la lentille fixe du phakomètre, par d la distance variable entre ces deux lentilles, et par x la distance de l'œil à la lentille F, on a

$$\eta = \varphi'\varphi'' \frac{d - F - F'}{FF' + (d - F - F')(F + \varphi' - x)}.$$

Le rapport entre l'image rétinienne C et l'image A fournie par la lentille F′ est le suivant :

$$\frac{C}{A} = \frac{F\varphi'}{FF' + (d - F - F')(F + \varphi' - x)}.$$

Si, dans ces deux équations, on fait $F = F'$ et $x = F + \varphi'$, conditions réalisées dans cette seconde combinaison, on a

$$\eta = \varphi'\varphi'' \frac{d - 2F}{F^2}.$$

Comme $\eta = \varphi'\varphi'' D$, en remplaçant dans l'équation précédente η par cette valeur, on a

$$D = \frac{d}{F^2} - 2\frac{1}{F} = \frac{d}{F^2} - 40.$$

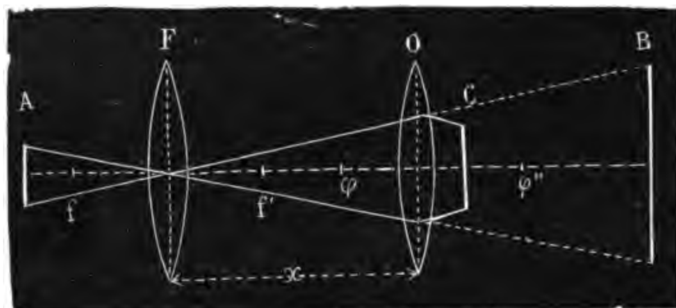
Quand $d = F$, c'est-à-dire quand la lentille F′ est au foyer antérieur de la lentille F, ce qui correspond à $l' = 0$ de la formule de la première combinaison, $D = -20$ dioptries. Quand $d = 2F$, on a $D = 0$, et quand $d = 3F$, on a $D = +20$ dioptries. La graduation est la même que celle du phakomètre, procédant dans ce cas d'une dioptrie métrique par chaque course de $2^{mm}5$ de lentille mobile F′.

L'image A, fournie par la lentille F′ étant constante, puisque l'œil fixe un même objet situé à l'infini, le grossissement procuré par l'instrument est constant, car on a

$$\frac{C}{A} = \frac{\varphi'}{F}.$$

Troisième combinaison. L'œil conserve la même position que dans les expériences précédentes, la lentille F est seule conservée.

Supposons un système centré de deux lentilles, l'une F représentant celle de l'instrument et l'autre O représentant l'œil (*fig.* 3).



(Fig. 3.)

L'objet A est situé à une distance l' du foyer antérieur f de la lentille F, et l'image réelle B est à une distance l du foyer postérieur f' de cette lentille, on a

$$(1) \qquad ll' = F^2.$$

Le grossissement est le suivant :

$$(2) \qquad \frac{B}{A} = \frac{F}{l'}.$$

Les rayons, en traversant la lentille O, viennent former une image C qui est distante du foyer postérieur φ'' d'une quantité η. L'image B étant distante du foyer antérieur φ' d'une quantité égale à $l + F - x + \varphi'$, on a

$$\eta(l + F - x + \varphi') = \varphi'\varphi''.$$

En remplaçant dans cette équation l par sa valeur tirée de l'équation (1), il vient

$$(3) \qquad \eta = \varphi'\varphi'' \frac{l'}{F^2 + l'(F - x + \varphi')}.$$

Le rapport entre les images C et B est le suivant :

$$(4) \qquad \frac{C}{B} = \frac{\eta}{\varphi''}.$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (4) et en remplaçant dans l'équation (4) η par sa valeur donnée par l'équation (3), on a, pour le rapport entre l'image C et l'objet A, la relation suivante :

$$(5) \qquad \frac{C}{A} = \frac{\varphi' F}{F^2 + l'(F - x + \varphi')}.$$

Si dans les équations (3) et (5) on fait $x = F + \varphi'$, condition réalisée par l'instrument, on a

$$\eta = \varphi'\varphi' \frac{l'}{F^2} \quad \text{et} \quad D = \frac{l'}{F^2}.$$

Le grossissement devient constant, car il est égal à

$$\frac{C}{A} = \frac{\varphi'}{F}.$$

La graduation pour la détermination de la réfraction de l'œil procèdera d'une dioptrie métrique par chaque $2^{mm}5$ de déplacement de l'objet A ; mais le zéro de la graduation ne se trouvera pas comme pour les cas précédents au double de la distance focale de la lentille F, mais bien au foyer même de cette lentille.

Dans ces trois combinaisons, la marche vers la lentille F, à partir du zéro de la graduation, donnera les degrés de la myopie et en sens inverse ceux de l'hypermétropie, c'est-à-dire tous les degrés de réfraction positive ou négative de l'œil, depuis — 5 centimètres jusqu'à + 5 centimètres, en passant par l'infini. La seconde combinaison permet en outre la mesure de la myopie jusqu'à — 40 dioptries, c'est-à-dire celle dont le punctum remotum est situé à 25 millimètres.

L'image rétinienne C étant constante, il devient possible de mesurer l'acuité de la vision en même temps que la réfraction. Pour obtenir ce résultat, il suffit que ce que nous avons considéré

comme étant l'objet A soit une plaque de verre dépoli sur laquelle soient gravées des lettres à lire ou des signes pour les personnes illettrées.

Quelle doit être la grandeur à donner à ces lettres ou à ces signes, pour que l'œil qui les lira ou verra très distinctement soit considéré comme ayant une acuité normale?

Dans la première et la troisième combinaison, nous avons trouvé que le rapport entre l'image C et l'objet A était le suivant :

$$\frac{C}{A} = \frac{\varphi'}{F}.$$

Dans cette équation, φ' est le foyer antérieur de l'œil dont la valeur est de 15 millimètres et, dans notre instrument, la lentille F est une lentille convergente de 5 centimètres ou 50 millimètres de distance focale. L'équation précédente devient

$$\frac{C}{A} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}.$$

La plus petite image rétinienne perceptible par un œil normalement constitué, par un œil emmétrope, est généralement soustendue par un angle d'une minute, et cette image a une étendue de $0^{mm}0045$. L'œil qui perçoit un objet, ayant sur la rétine une pareille image, est considéré comme ayant une acuité normale, l'acuité 1. En admettant cette valeur pour celle qu'il faut donner à C dans l'équation précédente, nous avons l'équation suivante :

$$\frac{0,0045}{A} = \frac{3}{10}.$$

Il est facile de déduire de cette équation quelle doit être la valeur de A ou des lettres pour que l'acuité soit 1. On a

$$A = \frac{0,0045 . 10}{3} = 0,015.$$

Il résulte de là que pour l'acuité 1, le caractère gravé sur la plaque A devra avoir une grandeur de $0^{mm}015$. Pour l'acuité $^1/_2$,

le caractère sera d'une grandeur double, etc. On aura pour les dimensions à graver sur la plaque de verre, par le procédé photographique, les valeurs suivantes :

Acuité	1............ grandeur.	$0^{mm}015$
—	1/2....................	0 030
—	1/3....................	0 045
—	1/4....................	0 060
—	1/5....................	0 075
—	1/10...................	0 150
—	1/20...................	0 300

Telle sera la grandeur à donner aux signes ou aux lettres pour mesurer l'acuité de la vision, en même temps que la réfraction de l'œil.

L'objection que l'on pourrait faire à notre instrument, c'est qu'étant constitué par une lentille à court foyer, il y aura une certaine déperdition de la lumière et des caustiques par réfraction. Le dernier de ces inconvénients pourra être pallié à l'aide d'un diaphragme qui permettra d'arrêter les rayons trop éloignés de l'axe. Quant au premier, la disposition de l'optomètre de Loiseau en est la meilleure réfutation. En effet, dans cet optomètre, la lentille fixe a 5 centimètres de distance focale, et à cette lentille viennent se juxtaposer des lentilles de foyer variable.

Nous avions prévu ces deux objections, et dès le début nous nous étions proposé de n'employer pour lentille fixe F qu'une lentille de 10 centimètres de distance focale. La graduation aurait procédé d'une dioptrie métrique par chaque course d'un centimètre, au lieu de $2^{mm}5$, comme nous l'avons obtenu. Mais, dans ce cas, l'instrument cessait d'être portatif, car il aurait fallu donner à notre phakomètre une longueur de 60 centimètres, et à l'optomètre une longueur de 52 centimètres. Nous avons mieux aimé réduire la longueur de l'instrument, ce qui nous a engagé à choisir une lentille de 5 centimètres de distance focale.

En adoptant une lentille de 10 centimètres, on pourrait facilement mesurer les fractions de dioptrie; mais dans la pratique

ophthalmologique, on n'a pas en général besoin d'une aussi grande précision.

Nous pensons que notre instrument sera amplement suffisant pour obtenir la solution des divers problèmes que le médecin est appelé à rechercher pour diriger le traitement des malades atteints d'anomalies de la réfraction.

MORPHOLOGIE

DE LA

MEMBRANE DE SCHRAPNELL

PAR M. LE D[r] COŸNE
Professeur à la Faculté de médecine de Bordeaux.

Tous les anatomistes français décrivent la membrane du tympan comme étant constituée par un feuillet mince et résistant, et également tendu dans toutes les parties de la paroi de la caisse qu'elle limite en dehors. Il n'en est rien, et tous ces auteurs ont laissé de côté une disposition anatomique intéressante déjà signalée en Angleterre et en Allemagne par Schrapnell, et sur laquelle l'attention, à notre avis, n'a pas été suffisamment attirée.

Il s'agit de l'existence d'une zone très limitée, dont la forme, le degré de tension et la force de résistance sont différentes de toutes les autres parties de la membrane tympanique. Cette zone limitée est connue sous le nom de *membrane flaccide de Schrapnell,* et correspond comme siège à ce que quelques anatomistes admettent ou combattent sous le nom de *trou de Rivinus*.

Cette portion de la membrane tympanique correspond au pôle supérieur de la membrane du tympan et est située au-dessus de la saillie fermée par l'apophyse grosse et courte du manche du marteau. Elle a une forme triangulaire, représente un segment de triangle sphérique dont la base serait constituée par la partie manquante de l'anneau tympanal et le sommet par cette apophyse grosse et courte du manche du marteau.

On sait que la membrane du tympan est insérée dans une rainure creusée dans le bord supérieur de l'anneau tympanal et y est fixée solidement par une formation fibreuse résistante, connue sous le nom d'anneau tendineux de la membrane du tympan.

L'anneau tympanal osseux est incomplet à sa partie supérieure dans une partie qui correspond environ au sixième de sa circonférence. Cette partie manquante du cadre osseux est connue sous le nom de segment de Rivinus.

L'anneau tendineux arrivé au niveau d'une des pointes de l'anneau tympanal osseux passe directement à l'autre pointe en s'insérant sur l'apophyse grosse et courte du manche du marteau et forme ainsi une sorte de corde qui sous-tend la portion de circonférence appartenant au segment de Rivinus. Il résulte de cette disposition que toute la partie de la membrane tympanique qui est contenue entre l'anneau tympanal osseux et ce cordon fibreux forme la membrane tympanique proprement dite tendue, résistante et soumise à l'action modératrice des muscles moteurs de la chaîne des osselets. La partie qui est au-dessus de cette corde fibreuse est plus molle, moins résistante, présente une structure différente et constitue le segment flaccide de Schrapnell.

Cette membrane flaccide a, avons-nous dit, une forme triangulaire; sa base est représentée par le segment de Rivinus; son bord postérieur est formé par la partie du ligament fibreux qui va de la corne postérieure de l'anneau tympanal osseux à l'apophyse courte du manche du marteau; son bord antérieur par le même ligament prolongé partant de cette apophyse pour aller rejoindre la corne antérieure. Au niveau de la membrane flaccide, la membrane du tympan présente des différences de structure essentielle. Au lieu des trois couches, on ne trouve que la couche cutanée et la couche muqueuse, la couche intermédiaire ou membrane propre manque complètement. En outre, par suite de la disposition de l'anneau tendineux au niveau du segment de Rivinus, la membrane flaccide ne présente plus, dans son bord supérieur, qu'une adhérence relativement peu résistante. En effet, en dehors elle n'est fixée que par la continuité de la couche cutanée avec la couche similaire de la partie supérieure du conduit auditif externe et en dedans par l'adhérence assez intime qui unit la couche muqueuse au périoste au niveau du segment de Rivinus.

Cette disposition anatomique est indubitablement un vestige de l'état embryonnaire. On sait en effet que la membrane du tympan et l'anneau tympanal dont elle dépend s'élèvent du fond de la première fente branchiale formée par la trompe d'Eustache, la caisse et le conduit auditif externe, et c'est l'arrêt de développement de l'anneau tympanal osseux resté incomplet à sa partie supérieure qui explique la disposition spéciale que présente, à ce niveau, la cloison transversale. Ces données embryologiques sont corroborées par un certain nombre de faits où l'on a constaté en même temps que des arrêts de développement considérables de la voûte palatine et du voile du palais, l'existence d'orifices symétriquement placés pour les deux oreilles et occupant la place de la membrane flaccide, alors que rien n'autorisait à considérer ces perforations comme pathologiques.

ÉTUDES

D'OPTIQUE PHYSIOLOGIQUE

INFLUENCE DU DIAMÈTRE DE LA PUPILLE ET DES CERCLES DE DIFFUSION SUR L'ACUITÉ VISUELLE

PAR LE Dr BADAL
Chargé du cours théorique et clinique d'ophtalmologie à la Faculté de Bordeaux.

Les travaux modernes sur le rôle du cristallin et du muscle ciliaire, dans l'accommodation de l'œil aux distances, ont fait perdre de vue presque complètement l'influence exercée par le diamètre de la pupille, sur la netteté de la vision. C'est à peine si, dans les traités classiques d'ophtalmologie, quelques lignes sont consacrées à cette question. Pourtant la pupille, on le sait depuis longtemps, exerce une influence considérable sur l'acuité visuelle, par ce seul fait qu'elle tient sous sa dépendance la grandeur des cercles de diffusion. C'est ainsi que de deux amétropes de degré différent, et au fond de même acuité, deux myopes, par exemple, le plus myope sera peut-être celui qui verra le moins mal à distance, si sa pupille est suffisamment étroite par rapport à celle de l'autre.

Dans ce travail, je me propose de rechercher plus complètement qu'on ne l'a fait jusqu'ici, quel est, dans l'acte de la vision, le rôle de la pupille considérée simplement comme ouverture réglant le diamètre des cercles de diffusion, sans m'occuper du rôle possible de l'iris, en tant que modificateur des courbures du cristallin.

On sait que l'œil le plus parfait n'est pas exempt d'aberrations de sphéricité et de réfrangibilité, ni même d'aberration de cour-

bure (astigmatisme). Il en résulte qu'un point lumineux, malgré un ajustement de l'appareil dioptrique, aussi exact que possible, pour la distance à laquelle se trouve placé ce point, ne se peint jamais sur la rétine par un point mathématique, mais bien par une infinité de petits cercles de diffusion dont le diamètre croît avec la largeur de la pupille. Déjà, sous ce rapport, le rôle de l'iris n'est pas complètement négligeable, et il serait intéressant de rechercher quelle est la part d'action, en sens contraire, qu'exercent sur l'acuité visuelle, d'un côté, l'augmentation d'éclairement des images rétiniennes qui résulte de l'élargissement de la pupille, et, d'un autre côté, l'amoindrissement des cercles de diffusion par aberrations de sphéricité, de réfrangibilité, ou de courbure, qui est le fait de son rétrécissement.

Toutefois si l'on tient compte de ces deux faits : 1° que dans les conditions ordinaires de la vision, un œil exactement accommodé n'éprouve aucune gêne de ces sortes d'aberrations (1); 2° que, même dans l'état de non-accommodation, l'œil symétrique, c'est-à-dire à peu près exempt d'astigmatisme, n'a nullement conscience de son chromatisme, on voit qu'au point de vue purement pratique, on peut négliger certains côtés de la question pour s'en tenir à l'étude des cercles de diffusion, qui résultent de ce que, dans l'œil inexactement accommodé, le foyer des rayons lumineux tombe en avant, ou en arrière de la rétine (aberration de parallaxe), en considérant ces rayons comme appartenant à la partie moyenne du spectre.

Dans ce qui va suivre, je supposerai tout d'abord : 1° que l'appareil dioptrique est normal, même dans l'œil myope ou hypermétrope; en d'autres termes, que ces anomalies sont uniquement le résultat d'un excès ou d'un défaut de longueur de l'axe

(1) Je veux dire par là, simplement, que nous ne voyons pas les cercles de diffusion par aberrations de sphéricité ou de réfrangibilité, tandis que nous voyons parfaitement les cercles de diffusion par défaut de mise au point. Mais il n'en faudrait pas conclure que les premiers n'abaissent pas le chiffre de l'acuité visuelle; il est fort probable au contraire que, sans eux, l'angle visuel minimum, au lieu d'être de 60″ en moyenne, serait plus petit encore; toutefois nous ne savons rien de précis à cet égard.

antéro-postérieur de l'œil, l'appareil réfringent proprement dit restant identique à celui de l'œil emmétrope type, ce qui, du reste, est le cas habituel; 2° que les milieux de l'œil, d'une transparence parfaite, laissent passer les rayons lumineux sans les diffuser.

Les troubles visuels résultant de ce que la rétine ne se trouve pas au foyer des rayons lumineux réfractés, seront d'autant plus prononcés, on le conçoit, que les images rétiniennes seront plus petites et les cercles de diffusion plus grands. Avant de chercher à apprécier rigoureusement le rôle de chacun de ces facteurs, grandeur de l'image et grandeur des cercles de diffusion, il nous faut d'abord apprendre à calculer ces grandeurs, étant donné : 1° le diamètre de l'objet dont l'image va se peindre sur la rétine; 2° la distance de cet objet à l'œil; 3° l'état de la réfraction statique exprimé en dioptries (d); 4° le diamètre de la pupille.

Calcul du diamètre des cercles de diffusion.

Soit A un point lumineux;

a l'image de ce point, en l'absence de toute accommodation;

$mn = P$ le diamètre de la pupille;

F et F′ les foyers antérieur et postérieur de l'œil;

$f = 15^{mm}$ et $f' = 20^{mm}$ les longueurs focales correspondantes;

l la distance connue du point A au foyer antérieur F;

l' la distance de l'image a au foyer postérieur F′;

$rs = C$ le diamètre du cercle de diffusion;

$oF' = D$ la distance du centre de la pupille au foyer postérieur;

x la distance de la rétine à ce même foyer.

Les rayons lumineux qui, après avoir été réfractés par la cornée, se trouvent tangents à la circonférence de la pupille, sont réfractés une seconde fois par le cristallin, de telle sorte que les rayons ra, sa (*fig.* 1), paraissent venir, non pas des points m et n, mais des points m' et n'. Si l'on considère que les cercles de

diffusion qui se forment sur la rétine, sont bien autrement petits que ceux très exagérés représentés sur la figure et que, par conséquent, l'arc rs, diamètre de ces cercles, diffère peu de la corde qui le sous-tend, on voit qu'on peut écrire :

$$\frac{rs}{m'n'} = \frac{l'+x}{oa} = \frac{l'+x}{l'+oF'}.$$

La distance oF' du centre de la pupille, ou ce qui revient au même, de la face antérieure du cristallin au foyer postérieur

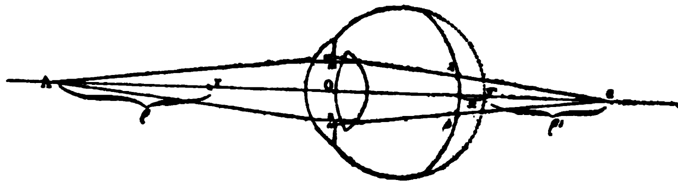


Fig. 1.

de l'appareil réfringent, est sensiblement égale à 19 millimètres. D'un autre côté, on démontre par le calcul que mn ne diffère de $m'n'$ que d'une quantité très faible. On peut donc, sans erreur notable, remplacer $m'n'$ par mn. Dès lors on a :

$$\frac{C}{P} = \frac{l'+x}{l'+D}.$$

Ceci posé, considérant que :

$$ll' = ff', \qquad \text{d'où :} \quad l' = \frac{ff'}{l},$$

et que si on désigne par N le numéro du verre métrique qui, mis au foyer antérieur de l'œil, corrige l'amétropie, on a : $x = ff'N$ [1]; on obtient, en portant ces valeurs de l et de x dans la première équation, pour l'œil hypermétrope, c'est le cas de la figure :

$$\text{(1)} \qquad C = \frac{Pff'(1+Nl)}{ff'+Dl}.$$

---

[1] V. Badal, *Clinique ophtalmologique*, p. 111.

On démontrerait, par un calcul analogue, qu'on a, pour l'œil myope, si le point lumineux est placé en deçà du punctum remotum :

$$C = \frac{Pff'(1 - Nl)}{ff' + Dl}, \tag{2}$$

et si l'objet est placé au delà :

$$C = \frac{Pff'(Nl - 1)}{ff' + Dl}. \tag{2 bis}$$

Pour l'œil emmétrope, puisque $N = o$, il reste :

$$C = \frac{Pff'}{ff' + Dl}. \tag{3}$$

On voit par là que :

Pour une même distance de l'objet, la grandeur des cercles de diffusion est en raison directe du diamètre de la pupille; ce qui, du reste, était facile à prévoir.

On voit de plus, en comparant ces formules entre elles, que :

Toutes choses égales d'ailleurs, le diamètre des cercles de diffusion est plus grand dans l'œil hypermétrope que dans l'œil emmétrope, et plus grand dans ce dernier que dans l'œil myope.

Établissons maintenant la formule qui donne la grandeur des images rétiniennes.

Calcul du diamètre des images rétiniennes.

Soit $AB = \beta$ la grandeur de l'objet (*fig.* 2);

$ab = \beta'$ la grandeur de l'image au foyer conjugué.

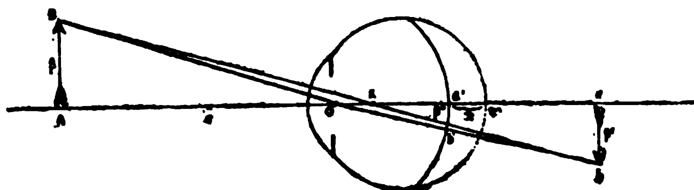


Fig. 2.

On entend par grandeur d'une image diffuse, la distance qui

sépare les centres a' et b' des cercles de diffusion suivant lesquels les deux points extrêmes A et B de l'objet se peignent sur la rétine. On sait que les centres de ces cercles se trouvent sur les lignes oa, ob, menées du centre de la pupille [1] aux foyers a et b.

Désignant par β'' la grandeur $a'\,b'$ de cette image diffuse, nous aurons :

$$\frac{\beta''}{\beta'} = \frac{oa'}{oa} = \frac{D-x}{D+l'},$$

tenant compte de ce que :

$$x = ff'N, \quad l' = \frac{ff'}{l} \quad \text{et} \quad \beta' = \beta\,\frac{f}{l},$$

il vient, après simplification, pour l'œil hypermétrope :

(4) $$\beta'' = \frac{\beta f(D-ff'N)}{Dl+ff'};$$

pour l'œil myope :

(5) $$\beta'' = \frac{\beta f(D+ff'N)}{Dl+ff'};$$

pour l'œil emmétrope :

(6) $$\beta'' = \frac{\beta f D}{Dl+ff'};$$

On peut avoir besoin, comme nous le verrons, d'exprimer β'' en fonction de β' ; on a dans ce cas :
pour l'œil hypermétrope :

(4 *bis*) $$\beta'' = \frac{\beta' l(D-ff'N)}{Dl+ff'};$$

pour l'œil myope :

(5 *bis*) $$\beta'' = \frac{\beta' l(D+ff'N)}{Dl+ff'};$$

---

[1] *V.* Helmholtz, *Optique physiologique*, p. 127 et 184.—En réalité : *du centre de l'image de la pupille donnée par le cristallin ;* mais la différence est si peu considérable, qu'il est permis de ne pas en tenir compte.

pour l'œil emmétrope :

$$\beta' = \frac{\beta' l D}{D l + f f'}. \qquad (6\ bis)$$

Ces formules montrent que, toutes choses égales d'ailleurs, et contrairement à ce qui a lieu pour les cercles de diffusion :

L'image d'un même objet est plus grande dans l'œil myope que dans l'œil emmétrope, et plus grande dans ce dernier que dans l'œil hypermétrope.

Elles montrent en outre que :

L'image, au lieu de croître en raison directe du rapprochement de l'objet, croît un peu moins vite et d'autant moins vite, que la puissance de l'appareil dioptrique est plus élevée.

Calcul du rapport suivant lequel croissent ou décroissent les images rétiniennes et les cercles de diffusion.

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour établir suivant quelle proportion relative, croissent ou décroissent les images rétiniennes et les cercles de diffusion dans l'œil emmétrope, myope ou hypermétrope, lorsqu'un même objet se rapproche ou s'éloigne, en supposant, je le répète, l'accommodation paralysée, inactive, ou disparue par suite des progrès de l'âge.

Pour l'œil emmétrope, cette proportion est donnée par le rapport des équations (6) et (3). Supprimant le dénominateur commun, on a, après réduction :

$$\frac{\beta'}{C} = \frac{D\beta}{Pf'}, \qquad (7)$$

d'où cette loi remarquablement simple :

Dans l'œil emmétrope privé d'accommodation, le rapport entre la grandeur des images et celle des cercles de diffusion est constant, toutes choses égales d'ailleurs, et indépendant de la distance des objets.

Il en résulte que si, à une certaine distance, la grandeur de l'image égale celle des cercles de diffusion, il en sera de même à toute distance.

Pour l'œil hypermétrope, les équations (4) et (1) donnent :

$$(8) \qquad \frac{\beta'}{C} = \frac{\beta(D - ff'N)}{Pf'(1 + Nl)}.$$

Quand l, c'est-à-dire la distance de l'objet à l'œil, diminue, le rapport $\frac{\beta}{C}$ augmente, et cela d'autant plus que N est plus élevé. Donc :

Chez l'hypermétrope, la grandeur des images, quand l'objet se rapproche, croît proportionnellement plus vite que celle des cercles de diffusion et d'autant plus vite que l'hypermétropie est plus élevée.

Dans l'œil myope, il est clair que les cercles de diffusion iront en décroissant de l'infini au punctum remotum, tandis qu'au contraire, l'image d'un même objet d'épreuve croîtra sans cesse. Il ne peut y avoir de difficulté qu'en deçà du punctum remotum, alors que les cercles de diffusion recommencent à croître. Les formules (5) et (2) donnent lieu alors au rapport suivant :

$$(9) \qquad \frac{\beta'}{C} = \frac{\beta(D + ff'N)}{Pf'(1 - Nl)}.$$

Appelons R la distance du punctum remotum à l'œil. Puisque le numéro N du verre métrique qui mesure la myopie est égale à $\frac{1}{R}$, il en résulte que si l est plus petit que R, le produit Nl sera plus petit que 1 ; le dénominateur restera positif et sera d'autant plus grand que l sera plus petit. Donc, lorsque l'objet est placé en deçà du punctum remotum, le rapport décroît avec l, et cela d'autant plus vite que N est plus grand.

En résumé :

Dans l'œil myope privé d'accommodation, la grandeur de l'image va en croissant constamment, à mesure que l'objet se rapproche. Les cercles de diffusion décroissent à mesure que l'objet se transporte de l'infini au punctum remotum où ils se réduisent à 0; ils réapparaissent à partir de ce point et croissent alors proportionnellement plus vite que les images, et d'autant plus vite que la myopie est plus élevée.

Pour faire l'application de ces données à la vision des emmétropes et des amétropes, il est nécessaire de savoir quelles conditions doivent remplir une série d'images rétiniennes diffuses pour être distinguées les unes des autres.

Limites à la faculté de distinguer des images rétiniennes.

On sait que l'acuité d'un œil a pour mesure, en pratique, l'angle visuel correspondant aux plus petits objets qui peuvent être vus nettement, c'est-à-dire distingués d'objets de même grandeur, séparés par des intervalles de même grandeur que ces objets. Comme exemple, prenons une série de bandes blanches séparées par des bandes noires, toutes ces bandes étant de même largeur. Si l'œil, que nous supposerons d'abord avoir une acuité normale, est exactement accommodé pour la distance à laquelle se trouve le tableau, chacune des bandes claires donnera sur la rétine une image parfaitement nette, séparée des images voisines par une bande obscure de même largeur, et si la largeur des images est un peu supérieure à celle des éléments sensibles de la rétine, il s'ensuivra que deux images voisines, séparées par un intervalle obscur, viendront se former sur des éléments rétiniens différents, séparés l'un de l'autre par un élément qui ne recevra pas de lumière, ou bien sur deux portions d'éléments contigus qui, se trouvant moins éclairés que les éléments voisins, donneront lieu, par l'effet du contraste, à deux sensations dissemblables. Dans un cas comme dans l'autre, l'œil étant supposé avoir une acuité visuelle normale, les images provoqueront deux impressions lumineuses distinctes (1).

Si les images en question, au lieu d'être parfaitement nettes, s'entourent de cercles de diffusion, à quel moment cesseront-elles d'être distinctes ?

Les plus nuisibles des cercles de diffusion, au point de vue de la faculté de distinguer l'une de l'autre deux images voisines, sont

(1) V. Helmholtz, *loc. cit.*, p. 298.

évidemment ceux qui sont situés à la périphérie des images. Aussi longtemps que deux de ces cercles, appartenant à deux images voisines, et les plus rapprochés possible l'un de l'autre, n'arriveront pas au contact, ou, ce qui revient au même, aussi longtemps qu'ils resteront plus petits que la largeur des images, l'élément sensible intermédiaire à ces images sera moins éclairé que les deux éléments voisins. Il y aura donc encore deux sensations lumineuses distinctes. Mais à partir du moment où les cercles de diffusion se touchent, il est clair que les impressions doivent se confondre (1).

Si l'acuité visuelle, au lieu d'être normale, c'est-à-dire égale à 1, comme je viens de le supposer, est inférieure à l'unité, le même raisonnement conduit à une conclusion analogue. Pour fixer les idées, considérons un œil dont l'acuité est égale à 1/3 seulement. Cela signifie que trois éléments rétiniens, *pris dans le sens linéaire*, doivent être comptés pour un seul, de grandeur triple, que j'appellerai élément *composé*. Si, dans cet œil exactement accommodé, deux images voisines, séparées par une bande obscure de même étendue, ont chacune une largeur supérieure à celle de trois éléments, ces deux images provoqueront deux sensations distinctes, et il en sera encore de même s'il se produit des cercles de diffusion, aussi longtemps que le diamètre de ces cercles sera moindre que la largeur des images, puisque deux éléments composés se trouveront encore séparés par un troisième qui recevra moins de lumière.

Supposons maintenant que les images rétiniennes, au lieu d'avoir la dimension minimum qui leur permet d'être distinguées par un œil jouissant d'un certain degré d'acuité, aient une dimension supérieure. Si l'œil est exactement accommodé, la largeur des bandes obscures restera la même que celle des bandes claires et les images seront vues encore plus distinctes que précé-

(1) Voyez à ce sujet l'observation très juste faite par M. Javal (*Annales d'oculistique*, juillet-août 1879, p. 76), et qui déjà s'était présentée à mon esprit. Malheureusement, dans l'état actuel de nos connaissances, il me serait impossible de prendre une autre base de démonstration que celle sur laquelle je m'appuie en ce moment.

demment, puisqu'il se trouvera entre elles plusieurs éléments sensibles, non impressionnés. S'il se produit des cercles de diffusion, il suffira, ici encore, que ces cercles aient une largeur moindre que celle des images, pour que les plus rapprochés d'entre eux, appartenant à deux images voisines, n'arrivent pas au contact. Entre les deux images diffuses, il se trouvera donc un élément au moins, non éclairé ou moins éclairé que les autres, et les images resteront distinctes.

On peut donc poser cette loi générale :

Pour qu'une série d'objets d'épreuve puissent être distingués les uns des autres, il faut : 1° que la grandeur de l'angle visuel correspondant à chaque objet soit au moins égale à celle de l'angle qui représente le degré d'acuité de l'œil; 2° que le diamètre des cercles de diffusion soit moindre que la largeur des images.

J'ai dit précédemment que, dans l'œil d'acuité normale, deux images séparées par un intervalle obscur de même étendue sont distinguées l'une de l'autre lorsque leur largeur est supérieure, ou au moins égale, à celle des éléments sensibles de la rétine. La largeur des cônes de la *fovea centralis* est notablement inférieure à $0^{mm}00438$, ce qui correspond, dans l'œil emmétrope type, à un angle visuel d'*une minute;* aussi un bon œil distingue-t-il aisément des images rétiniennes un peu plus petites encore. D'après une convention généralement adoptée, cet angle, qui représente l'acuité de la vision vers l'âge moyen de la vie, a été pris comme unité, et c'est là-dessus que sont basées les déterminations optométriques (1).

On sait que les échelles typographiques qui servent à cet usage

---

(1) Par cela même que cet angle d'une minute correspond à l'intervalle existant entre deux bandes obscures séparées par une bande claire de même étendue, il s'en suit que l'angle correspondant à la partie moyenne de deux bandes voisines, mesure, lui, deux minutes. Aussi, lorsqu'au lieu de se servir d'objets figurés, pour mesurer l'acuité visuelle, on se sert de points lumineux, sans dimensions appréciables, on trouve que deux points ne peuvent être distingués l'un de l'autre, qu'autant qu'ils sont vus sous un angle visuel minimum de 2' en moyenne. Et, en effet, ce n'est qu'à cette condition que les deux images peuvent se former sur des éléments rétiniens *toujours* séparés par un élément non-impressionné.

(les plus connues sont celles de Snellen et de Giraud-Teulon) sont formées de lettres dont les traits constitutifs ont entre eux des *clairs*, de même épaisseur que les traits, autant que possible, et que le numéro de chaque série indique la distance à laquelle les traits constitutifs de chaque lettre et les blancs entre ces traits sont vus sous un angle de 1′.

Il résulte de là que, d'une façon générale, chaque lettre, considérée isolément, cessera de pouvoir être lue lorsque le diamètre des cercles de diffusion égalera en largeur l'image du trait.

S'appuyant sur ces considérations, il devient facile de déterminer la grandeur β des plus petites lettres qui pourront être lues à une distance déterminée l, sans aucun effort d'accommodation, par un œil dont la pupille aurait un diamètre égal à P millimètres. Nous ferons cette détermination successivement pour l'emmétropie, la myopie, l'hypermétropie et l'aphakie.

I. — ŒIL EMMÉTROPE

Détermination des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil emmétrope privé d'accommodation.

Puisque la grandeur β' des images rétiniennes pouvant être distinguées les unes des autres, doit être supérieure au diamètre C des cercles de diffusion, on devra avoir, en remplaçant β' et C par leur valeur, tirée des équations (6) et (3) :

$$\beta' > \frac{Pf'}{D}, \tag{10}$$

formule dans laquelle ne figure plus la distance l de l'objet à l'œil ; d'où cette loi paradoxale et pourtant mathématiquement vraie :

La grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres, par un œil emmétrope privé d'accommodation, est indépendante de la distance de l'objet à l'œil, et dépend uniquement de la largeur de la pupille.

Il en résulte que, pour une pupille de 4 millimètres de diamè-

tre, β, c'est-à-dire la grandeur de l'objet, doit être supérieur ou au moins égal à :

$$\frac{4f}{D}=\frac{4\times 20}{19}=4^{mm}21,$$

ce qui est, à peu de chose près, le diamètre de la pupille.

Il doit être bien entendu, s'il s'agit de caractères typographiques, que β représente, non pas la grandeur de la lettre, mais bien la largeur des traits qui la constituent et qui, dans les échelles de Snellen, est cinq fois moindre que celle de la lettre entière. D'après cela :

Un emmétrope entièrement privé d'accommodation ne pourrait lire que des lettres ayant au moins cinq fois le diamètre de la pupille (1).

Puisque l'acuité est dite d'autant plus grande qu'un même objet peut être distingué à une distance plus considérable, une conséquence de la loi qui précède, c'est que :

L'acuité sans correction d'un œil emmétrope privé d'accommodation, croît en raison directe de la distance, en raison inverse du diamètre de la pupille.

Tenons-nous à connaître non pas la valeur absolue de β, c'est-à-dire la grandeur des plus petits objets pouvant être distingués, mais bien le chiffre d'acuité que cela représente? La marche à suivre est tout indiquée.

Acuité correspondant aux plus petits objets qui peuvent être distingués à une distance l par un œil emmétrope privé d'accommodation.

Appelons x la largeur du trait qui, dans les échelles pour la mesure de l'acuité, représente une acuité normale, à une distance l. On sait que, dans ces échelles, la grandeur des caractères a été

(1) Ceci ne s'applique évidemment qu'aux lettres latines généralement en usage pour la mesure de l'acuité. Pour toute autre forme de caractères, cette règle souffrirait de nombreuses exceptions. — Voir à ce sujet les derniers articles de MM. Javal et Giraud-Teulon dans les *Annales d'oculistique* (1879).

calculée de telle sorte que ceux qui mesurent $V = 1$, correspondent à un angle visuel de 5' pour la lettre entière et de 1' pour la largeur du trait qui constitue la lettre, et que ce trait donne sur la rétine, ou plus exactement au foyer conjugué, si l'œil n'est pas accommodé pour la distance à laquelle se trouve le tableau, une image dont la grandeur est égale à 0mm00438. Si l'on considère que ce chiffre, de l'aveu de tous les auteurs, est un peu fort, et que celui de 0mm004 se rapproche beaucoup plus de l'acuité moyenne, on voit que la valeur de x est donnée par la proportion suivante :

$$\frac{x}{0,004} = \frac{l}{f}, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{0,004\,l}{f}.$$

Le nombre de fois dont cette dernière valeur sera contenue dans la grandeur du plus petit objet pouvant être distingué à la distance l, c'est-à-dire dans $\beta = \frac{\mathrm{P}f'}{\mathrm{D}}$, donnera le dénominateur de la fraction qui exprime le chiffre de l'acuité cherchée. Appelons n ce dénominateur, on aura donc :

$$n = \frac{\mathrm{P}ff'}{0,004\mathrm{D}l},$$

tenant compte de ce que $ff' = 0^{mm}3$, $\mathrm{D} = 19^{mm}$, et désignant l'acuité $\frac{1}{n}$ par V', il vient, après réduction :

$$(11) \qquad \mathrm{V}' = \frac{l}{4\mathrm{P}},$$

ce qui peut s'exprimer ainsi :

L'acuité, sans verre correcteur, d'un œil emmétrope privé d'accommodation et au fond d'acuité normale, a pour mesure une fraction dont le numérateur est la distance en mètres à laquelle se pratique l'examen, et le dénominateur, le quadruple du diamètre de la pupille, exprimé en millimètres (1).

Il est à peine besoin d'ajouter que cette acuité a forcément pour

(1) Se rappeler que dans nos formules, et pour simplifier les calculs, la distance est comptée en mètres, tandis que pour les autres valeurs, le millimètre a été pris comme unité.

limites l'acuité du sujet avec correction, c'est-à-dire à l'aide du verre qui corrigerait le défaut d'accommodation; cela est évident.

Poussons plus loin cette étude. Désignons par $\frac{1}{m}$ l'acuité que possède réellement l'œil examiné, c'est-à-dire l'acuité avec des images exemptes de cercles de diffusion, comme le seraient celles d'objets placés à une distance infinie, puisqu'il s'agit d'un œil emmétrope. (Si $V = 1$, il est clair que $m = 1$.)

Aussi longtemps que $\frac{l}{4p}$ restera plus petit que $\frac{1}{m}$, le chiffre de l'acuité vraie se trouvera abaissé. Si c'est le contraire qui a lieu, l'acuité restera intacte, ce qui signifie que le diamètre des cercles de diffusion est alors plus petit que la largeur des images. Cela ne veut pas dire que ces images sont vues aussi nettement que si elles étaient exemptes de cercles de diffusion, mais enfin elles peuvent être distinguées les unes des autres, c'est-à-dire reconnues, et, s'il s'agit de lettres, *nommées*.

Exemple : Avec une pupille de 4 millimètres et à 6 mètres, distance à laquelle se pratique assez habituellement la mesure de l'acuité, on a :

$$V' = \frac{6}{4 \times 4} = \frac{3}{8}.$$

Si l'œil examiné possède, au fond, une acuité normale, les cercles de diffusion résultant de ce que l'examen se pratique à 6 mètres au lieu de se pratiquer à une distance infinie, ont donc abaissé l'acuité dans la proportion de 3 à 8.

L'acuité se trouvera encore abaissée, mais dans une proportion moindre, si tout en étant, au fond, inférieure à 1, elle est supérieure à 3/8; enfin, si elle est égale ou inférieure à ce dernier chiffre, les cercles de diffusion n'ont plus, à 6 mètres, aucune influence sur l'acuité. Pour une acuité moindre encore, les images deviennent plus grandes que les cercles de diffusion; ces derniers ne peuvent donc s'opposer à la lecture.

De là résulte cette conséquence assez bizarre que si l'on cherche à mesurer par la méthode ordinaire, dite *de Donders*, l'acuité d'un emmétrope absolument privé d'accommodation, et placé à 6 mètres

de l'échelle, on trouvera *constamment* comme chiffre de l'acuité, pour une pupille de 4 millimètres de diamètre : V = 3/8, à moins que le sujet n'ait une acuité inférieure encore. Dans ce dernier cas seulement, les déterminations deviennent exactes.

A une distance moindre, les cercles de diffusion augmentant de diamètre, l'acuité se trouverait encore réduite. Par exemple, à 0^m33, distance moyenne pour la lecture, des lettres de 2 centimètres de hauteur qui sont, comme je l'ai montré, les plus petites pouvant être lues par l'emmétrope privé d'accommodation, ne représenteraient plus qu'une acuité de 2/100 environ. Si l'on a fait usage d'atropine, si par conséquent la pupille est fortement dilatée, l'acuité se trouvera encore réduite.

Comment se fait-il donc qu'à 6 mètres, la plupart des personnes que nous considérons comme emmétropes, puissent lire, après paralysie de l'accommodation par l'atropine, la série de l'échelle qui correspond à une acuité 1 ? Cela est facile à expliquer.

D'abord quelques-unes de ces personnes peuvent être des myopes dont le punctum remotum est à 6 mètres ou à peu près, chez lesquelles par conséquent il ne se forme pas, à cette distance, de cercles de diffusion. Les autres, et c'est le plus grand nombre, ont une myopie inférieure à 1/6 de dioptrie, sont exactement emmétropes, ou bien légèrement hypermétropes. L'absence ou la tolérance des cercles de diffusion tient tout simplement alors à ce que l'accommodation n'est jamais complètement paralysée; le peu qui reste entre en jeu, dès que le sujet cherche à lire, et suffit à rendre les images nettes. Il n'en serait plus de même si l'accommodation était paralysée d'une façon absolue.

Il peut donc ne pas être indifférent, dans les recherches délicates relatives à l'acuité visuelle, de pratiquer l'examen à 6 mètres ou à une distance plus grande. Pour être assuré de n'avoir aucune erreur avec un œil emmétrope dont la pupille aurait 4 millimètres, il faudrait, comme on le verra plus loin, placer le sujet à 16 mètres au moins du tableau. Le plus sûr moyen d'être à l'abri de toute erreur est de se servir d'un optomètre permettant d'envoyer à l'œil des rayons exactement parallèles.

Ce que je viens de dire de l'affaiblissement que subit l'acuité à distance, chez les emmétropes privés d'accommodation, pourra peut-être rendre compte de certaines particularités qui ont dû embarrasser les meilleurs observateurs.

Il n'est pas rare, comme on le sait, d'observer des paralysies syphilitiques de l'accommodation qui deviennent rapidement complètes. Or, il m'est arrivé, dans deux cas de ce genre, de ne pouvoir jamais obtenir une acuité visuelle égale à 1, à 6 mètres de distance, malgré une correction aussi parfaite que possible à l'aide des verres de la boîte d'essai, alors que cette acuité était trouvée normale à l'optomètre et, plus tard, après la guérison, était trouvée normale également. Le second de ces malades, âgé de vingt-deux ans, et que j'ai observé tout récemment, était atteint de mydriase avec paralysie absolue de l'accommodation; on constatait à l'optomètre une acuité = 11/10, et une hypermétropie comprise entre 1,25 et 1,50 *d*. Or, aucun verre, aussi longtemps qu'a duré la paralysie, ne permettait la lecture du n° 6 de l'échelle de Snellen, à 6 mètres de distance. L'acuité devenait meilleure, grâce à l'emploi de l'ésérine qui, pendant plusieurs semaines, a eu pour effet de rétrécir momentanément la pupille, sans agir sur le muscle ciliaire; maintenant que le sujet est guéri, l'acuité se montre à distance ce qu'elle est réellement, sans qu'il soit besoin de recourir à aucun artifice. La diminution apparente de la vision tenait donc certainement à ce que le verre d'essai, placé au devant de l'œil, était constamment ou trop fort, ou au contraire insuffisant (l'écart entre ces verres est, comme on le sait, de 1/4 de dioptrie, pour les numéros faibles.) Dans le premier cas, l'œil était rendu myope; dans le second cas, il restait encore hypermétrope; il persistait donc des cercles de diffusion assez grands pour abaisser le chiffre de l'acuité. Au contraire, à l'aide de mon optomètre, la correction était parfaite, par cette raison bien simple que le déplacement de la plaque d'épreuve se fait par un mouvement insensible permettant une mise au point mathématiquement exacte. C'est là, pour le dire en passant, un des avantages de cet instrument sur les optomètres dans lesquels la mesure de la

réfraction est obtenue par le jeu d'un certain nombre de lentilles se succédant les unes aux autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé celle qui corrige *approximativement* la réfraction.

Il y aurait lieu aussi de rechercher si l'affaiblissement considérable de l'acuité chez les vieillards, au lieu d'être dû exclusivement, comme on le croit, à la moindre transparence des milieux réfringents, ne résulte pas, au moins en partie, de l'impossibilité où se trouvent les personnes âgées d'obtenir une mise au point très exacte, même avec le secours de verres, par suite de la diminution de plus en plus marquée du pouvoir d'accommodation.

Considérations générales sur la vision des emmétropes, presbytes ou non-presbytes.

Les considérations qui précèdent vont nous permettre de résoudre un certain nombre de problèmes intéressants.

A quelle distance un emmétrope se placera-t-il de préférence pour voir le plus distinctement possible un objet?

A cet égard, il y a lieu de distinguer entre l'emmétrope presbyte et l'emmétrope non presbyte.

Supposons d'abord que l'accommodation fasse entièrement défaut. En pareil cas, d'après ce que nous avons vu, le rapport entre la grandeur des cercles de diffusion et la grandeur des images reste constant pour un même diamètre de la pupille, quelle que soit la distance de l'objet. Il s'ensuit qu'un emmétrope privé d'accommodation verrait de la même façon à toutes distances, et l'éloignement des objets n'aurait d'autre limite que celle au delà de laquelle la grandeur des images rétiniennes deviendrait inférieure au diamètre des plus petites images perceptibles, eu égard à l'acuité vraie. Mais il est d'autres facteurs dont il faut tenir compte ; deux surtout jouent un rôle important : ce sont les variations dans le diamètre de la pupille et l'éclairement des images.

On sait, il est vrai que, par un éclairage de jour, et par un temps clair, ces différences influent peu sur l'acuité visuelle, quand l'œil reçoit des images bien nettes, mais il n'en est plus

de même par un temps sombre, ou avec un mauvais éclairage; encore moins, selon toute probabilité, avec des images diffuses.

L'influence exercée sur l'acuité visuelle par le rétrécissement de la pupille, est surtout difficile à apprécier exactement. Chez les vieillards fort âgés, et par conséquent privés à peu près complètement d'accommodation, l'iris est peu mobile, cependant il se contracte encore par l'effet d'une lumière vive et sous l'influence de la convergence des axes optiques, en diminuant par là l'étendue des cercles de diffusion, mais en diminuant aussi, par contre, l'éclairement des images rétiniennes.

En raison de leur extrême mobilité, le rôle de ces différents facteurs ne peut évidemment être mis en équation; pourtant il est probable que, dans les conditions ordinaires de la vision, et avec un bon éclairage, tout ce qui tend à la netteté des images par l'amoindrissement des cercles de diffusion, doit exercer une influence prépondérante sur le choix de la distance à laquelle le sujet placera l'objet, pour voir le mieux possible.

Il semblerait donc que l'emmétrope privé d'accommodation, entre les mains duquel on met un livre, dût le rapprocher de ses yeux le plus possible, et n'être arrêté en cela que par l'impossibilité de converger en deçà d'une certaine limite, encore cet obstacle n'existerait-il que pour la vision binoculaire. En effet, par suite du rétrécissement graduel de la pupille qui accompagne la convergence des axes optiques, la grandeur des images augmente sans que la grandeur des cercles de diffusion croisse dans la même proportion. Quant à la diminution d'éclairage qui est le fait de ce rétrécissement, elle est beaucoup plus que compensée par l'effet en sens contraire, qui résulte du rapprochement de l'objet.

Comment se fait-il donc que les emmétropes presbytes, de même que ceux dont l'accommodation a été paralysée par l'atropine, éloignent au contraire leur livre pour lire? La raison en est bien simple : c'est qu'il n'est guère de presbyte qui n'ait encore un peu d'accommodation à son service, et il en est de même pour les sujets jeunes soumis à l'action de l'atropine. Or, la quantité de réfraction dynamique nécessaire pour faire disparaître ou pour

amoindrir les cercles de diffusion, étant d'autant plus faible que la vision s'exerce à une plus grande distance, il s'ensuit que l'emmétrope presbyte devra éloigner son livre d'autant plus qu'il aura moins d'accommodation à son service, et c'est en effet ce qui a lieu.

La grandeur des images décroît bien aussi, mais elle décroît moins vite que celle des cercles de diffusion, et le sujet se trouve placé, à peu de chose près, dans les mêmes conditions qu'un myope dont l'excès de réfraction statique aurait pour mesure l'amplitude d'accommodation du presbyte en question, et qui placerait le livre à son punctum remotum.

A partir de quelle distance les cercles de diffusion deviennent-ils assez petits, dans un œil emmétrope privé d'accommodation, pour que des images dont la grandeur mesure l'acuité vraie du sujet, ou bien une acuité moindre, puissent être distinguées les unes des autres?

Cela est facile. De l'équation (11), on tire :

(13) $$l = 4PV'.$$

Si l'œil possède une acuité normale, et si l'on désire que cette acuité ne soit pas abaissée par la présence des cercles de diffusion, on n'a qu'à faire dans l'équation précédente : $V' = 1$; il vient alors :

(13 *bis*) $$l = 4P.$$

Ce qui, pour $P = 4^{mm}$, donne $l = 16^{m}$.

Donc :

Un œil parfaitement emmétrope et entièrement privé d'accommodation, ne peut distinguer les uns des autres, des objets dont chacun est compris sous un angle de 1', qu'autant que la distance de ces objets est supérieure, ou au moins égale, à autant de fois 4 mètres que la pupille compte de millimètres.

Si l'œil a une acuité réduite à $1/m$, c'est-à-dire inférieure à 1, ou encore si, tout en possédant une acuité normale, il lui suffit de

distinguer à la distance l, des objets dont la grandeur correspond à une acuité $1/m$, on devra avoir :

$$l > \frac{4P}{m}.$$

Exemple : Si l'acuité vraie est réduite à 1/20, ou si une acuité semblable est suffisante pour le travail, alors très grossier, auquel se livre le sujet, on trouve que la distance cherchée doit être supérieure, ou au moins égale à : $\frac{4P}{20} = \frac{P}{5}$, ce qui, pour une pupille de 4 millimètres, donne : $l = 0^m80$.

Vision des emmétropes non-presbytes.

S'il est possible de résoudre avec quelque approximation la plupart des problèmes qui se rattachent à la vision des emmétropes entièrement privés d'accommodation, ou du moins très presbytes, il n'en est plus de même pour ceux qui disposent d'une bonne amplitude d'accommodation. Ici, la distance à laquelle s'exerce la vision distincte, dépend de tant de circonstances diverses, variables au gré du sujet, qu'il devient à peu près impossible de formuler des règles précises qui, d'ailleurs, ne trouveraient nulle part leur application. Je me bornerai donc à quelques indications générales, en supposant, pour fixer les idées, qu'il s'agit de la lecture d'un livre ou d'un journal imprimé en caractères de grandeur moyenne.

La plupart des livres et des journaux peuvent encore être lus par un œil doué d'une acuité normale, à une distance qui varie de 0^m80 à 1^m50, suivant la grandeur des caractères, la forme des types, la qualité du papier, le soigné de l'impression, etc. Le numéro 1,25 des *Test types* de Snellen me paraît une bonne moyenne.

Vers trente-cinq ans, âge moyen de la vie, un emmétrope doué d'une bonne acuité, lit très aisément un livre imprimé en caractères semblables, à 0^m30, c'est-à-dire à une distance qui nécessite la mise en jeu de la moitié environ de son amplitude d'accommo-

dation, et pour laquelle les images rétiniennes ont à peu près quatre fois les dimensions des plus petites images pouvant être distinguées les unes des autres. Ce sont là, je crois, les meilleures conditions que l'on puisse désirer pour la lecture, l'écriture et, d'une façon générale, pour la vision des petits objets tenus à la main et que le sujet peut, par conséquent, placer à la distance en question.

Un emmétrope jeune, disposant par cela même d'une amplitude d'accommodation considérable, peut voir nettement à une distance moindre que 0m30; l'œil reçoit ainsi de plus grandes images et peut distinguer, par ce moyen, de plus fins détails; mais alors les muscles de la convergence ne tardent pas à se fatiguer.

D'autre part, il est bien évident que, pour lire à 0m30, des caractères dont les images rétiniennes sont quatre fois plus grandes qu'il n'est besoin, pour un œil d'acuité normale, il faut que le sujet n'ait pas une acuité inférieure à 1/4. Dans le cas contraire, il sera naturellement conduit à diminuer la distance, pour grandir les images, jusqu'à ce que ces dernières se trouvent en rapport avec son acuité. Telle est la raison pour laquelle les emmétropes non presbytes, dont l'acuité se trouve notablement amoindrie par suite d'opacités de la cornée, de maladies des membranes profondes, etc., sont obligés de travailler de très près, malgré la fatigue des muscles droits internes; telle est aussi la raison pour laquelle ces personnes sont contraintes de réclamer des verres de presbyte beaucoup plus tôt que les autres, non point tant parce qu'elles bénéficient du faible grossissement qui résulte de l'emploi des verres convexes, que parce qu'elles peuvent, grâce à ces verres, continuer à lire à une courte distance.

Exemple : Un emmétrope dont l'acuité = 1/5 ne pourra distinguer des caractères d'impression qui, à 0m30, exigeraient une acuité d'au moins 1/4, qu'en plaçant le livre à 0m25 au plus (25 : 30 :: 5 : 6); il est même probable qu'il cherchera à diminuer encore cette distance, de manière à ne pas avoir besoin, pour lire couramment, de déployer cette attention constante que nécessite la mise en jeu de *toute* l'acuité, si je puis m'exprimer

ainsi. Or, pour lire à une distance moindre que 0^m25, une amplitude d'accommodation supérieure à 5 dioptries est nécessaire ; à partir de trente-cinq ans, le sujet se trouvera donc en déficit sous ce rapport, en admettant qu'il ait une puissance de réfraction dynamique moyenne ; il devra, par conséquent, commencer à porter lunettes, bien que l'expression de presbyte ne lui soit point applicable.

A propos de la vision des emmétropes jouissant encore d'une certaine amplitude d'accommodation $= Nd$, il y aurait lieu de rechercher quelle est l'influence exercée sur l'acuité par les cercles de diffusion qui se forment, après que l'œil a épuisé toute son accommodation, celle-ci étant insuffisante pour voir distinctement à une certaine distance l. Mais il est évident que l'emmétrope se trouve alors placé dans les mêmes conditions qu'un myope par excès de pouvoir réfringent, dont le punctum remotum se trouverait à une distance $= \frac{1}{N}$, et dont la vision devrait s'exercer à la distance l, sans le secours de l'accommodation. Cette étude viendra naturellement, lorsqu'il sera question des cercles de diffusion dans la myopie par excès de courbure.

II. — ŒIL HYPERMÉTROPE

Détermination des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil hypermétrope privé d'accommodation.

D'après ce que nous savons, la grandeur β' des images rétiniennes doit être supérieure au diamètre l du cercle de diffusion ; nous devrons donc avoir, en remplaçant β' et C par leur valeur, tirée des équations (4) et (1), et en réduisant :

$$\beta > \frac{Pf'(1 + Nl)}{D - ff'N}. \qquad (14)$$

On voit qu'ici, contrairement à ce qui a lieu pour l'œil emmétrope, la dimension des objets doit être d'autant plus considérable que la distance est plus grande ; inversement, la distance devra

être d'autant plus petite que l'objet sera plus petit. Si l'on veut que β soit le plus petit possible, il faut que l, distance de l'obj au foyer antérieur de l'œil, se réduise à 0. On a alors :

$$\beta = \frac{Pf'}{D - ff'N}. \quad (14\,bis)$$

En résumé :

Pour voir le mieux possible, un hypermétrope entièrement privé d'accommodation, sera conduit à placer l'objet tout près du foyer antérieur de l'œil (1).

La vision binoculaire n'est plus possible évidemment; toutefois la difficulté de bien éclairer l'objet à une si courte distance, fait qu'en général un sujet placé dans de semblables conditions, rapproche un peu moins les objets que la théorie ne l'indique.

Voyons ce que devient en pareil cas l'acuité visuelle.

Acuité correspondant aux plus petits objets qui peuvent être distingués à une distance l, par un œil hypermétrope privé d'accommodation.

Puisque à la distance l, la grandeur des objets d'épreuve qui correspondent à une acuité visuelle normale, est égale à : $\frac{0{,}004\,l}{f}$, le nombre de fois dont cette dernière valeur sera contenue dans β, donnera le dénominateur de la fraction $\frac{1}{n}$ qui exprime le chiffre de l'acuité cherchée. On aura donc, après réduction :

$$n = \frac{Pff'(1 + Nl)}{0{,}004\,l(D - ff'N)},$$

et, en désignant l'acuité $\frac{1}{n}$ par V' :

$$V' = \frac{0{,}004\,l(D - ff'N)}{Pff'(1 + Nl)}. \quad (15)$$

Donc :

L'acuité de l'hypermétrope privé d'accommodation, sera d'au-

(1) A 18 millimètres environ de la face antérieure de la cornée.

tant moins mauvaise que la distance sera plus grande, la pupille plus étroite et l'amétropie plus faible.

Mais de ce que l'acuité diminue dans la vision de près, il n'en faut pas conclure qu'un même objet, rapproché de l'œil, sera vu moins distinctement qu'à une distance plus éloignée. C'est tout le contraire qui a lieu : l'angle visuel correspondant à l'objet grandit à mesure que cet objet se rapproche, et par conséquent le chiffre d'acuité qu'il représente diminue; mais l'image rétinienne grandit aussi et relativement plus vite que les cercles de diffusion; l'objet devient donc plus distinct.

A ce sujet, on peut se poser le problème suivant :

Quelle est, pour un œil hypermétrope privé d'accommodation, la distance maximum à laquelle une série d'objets d'épreuve, de grandeur déterminée, apparaîtront encore distincts les uns des autres?

Il suffit, pour résoudre la question, de se reporter à l'équation (14), qui donne pour la valeur cherchée :

$$(16) \qquad l > \frac{\beta(D - ff'N) - Pf'}{f'NP}.$$

Cette formule montre que la distance l ne pourra être une quantité positive, c'est-à-dire réelle, qu'autant que le numérateur sera positif; il faudra donc que l'on ait :

$$(14\ bis) \qquad \beta > \frac{Pf'}{D - ff'N}.$$

Comme nous l'avons vu précédemment, cette valeur de β représente la grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres, lorsque l se réduit à 0, c'est-à-dire lorsque les objets sont placés au foyer antérieur de l'œil. Des objets de dimensions plus grandes pourront seuls être placés à une certaine distance au delà. Exemple, pour $H = 5\,d$ et $P = 4^{mm}$, la plus petite valeur que l'on puisse donner à β est égale à :

$$\frac{4 \times 20}{19 - 0,3 \times 5} = \frac{80}{17,50} = 4^{mm}5.$$

S'il s'agit de lettres, leur hauteur totale devra donc être, au minimum, égale à : $5 \times 4{,}5 = 22^{mm}$. Comme on le voit, ce chiffre diffère assez peu de celui trouvé pour l'œil emmétrope et, en effet, l'équation (14 *bis*) ne diffère par son dénominateur de l'équation (11) que d'une quantité (ff' N) sans grande influence sur la valeur de la fraction; c'est le diamètre de la pupille qui joue le principal rôle.

Si les objets ont une grandeur supérieure à celle indiquée par l'équation (14 *bis*), ils pourront être placés à une certaine distance l, donnée par l'équation (16). Par exemple, des lettres de 2 centimètres de hauteur, dans lesquelles la largeur du trait est de 10 millimètres, pourront être lues, avec $H \doteq 5d$ et $P = 4^{mm}$, à une distance de 23 centimètres 1/2 environ.

En résumé :

L'hypermétrope privé d'accommodation peut arriver à voir des objets presque aussi petits que l'emmétrope qui se trouve dans le même cas, mais à la condition de placer ces objets très près de l'œil; dès que la distance augmente, la grandeur des objets doit augmenter également.

Il résulte de là que l'acuité de l'hypermétrope privé d'accommodation sera à peu près la même que celle de l'emmétrope, si l'objet d'épreuve se trouve placé très près de l'œil, mais qu'elle lui deviendra inférieure si l'objet s'éloigne, et cela d'autant plus que l'éloignement sera plus grand.

III. — ŒIL MYOPE

Considérons d'abord le cas où les objets d'épreuve sont placés au delà du punctum remotum.

Grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil myope, ces objets étant placés au delà du punctum remotum.

On doit avoir : $\beta' > C$. Les équations (5) et (2 *bis*) donnent, après réduction :

$$(17) \qquad \beta > \frac{Pf'(Nl-1)}{D+ff'N}.$$

Cette formule montre que la dimension des objets devra être d'autant plus considérable que la distance sera plus grande; inversement, la distance devra être d'autant plus petite que les objets seront plus petits.

Les choses se passent donc à peu près comme chez l'hypermétrope, mais avec cette différence que ce dernier doit placer les objets au foyer antérieur de l'œil, pour les voir le plus distinctement possible, tandis que le myope doit les placer au punctum remotum. Il est clair, en effet, que β devient le plus petit possible lorsque l se rapproche de $\frac{1}{N}$, puisque en pareil cas, Nl se rapproche de 1.

Si l est exactement égal à $\frac{1}{N}$, c'est-à-dire si l'objet se trouve placé au punctum remotum, le numérateur de la fraction ci-dessus se réduit à 0; il semble donc que β puisse devenir infiniment petit; mais il ne faut pas perdre de vue qu'en définitive il s'agit simplement, dans nos calculs, d'un rapport entre la grandeur des images rétiniennes et celle des cercles de diffusion. Ces derniers se réduisent à néant pour la position en question, mais cela ne suffit pas pour que les images rétiniennes puissent être distinguées les unes des autres, il faut encore que la grandeur de ces images soit en rapport avec l'acuité visuelle du sujet.

Acuité correspondant aux plus petits objets placés au delà du punctum remotum qui peuvent être distingués à une distance l, par un œil myope.

Le nombre de fois dont $\frac{0{,}004\,l}{f}$ sera contenu dans β, donnera le dénominateur de la fraction $\frac{1}{n}$ qui exprime le chiffre de l'acuité. Désignant cette acuité par V′, on aura, après réduction :

$$V' < \frac{0{,}004\,l(D + ff'N)}{Pff'(Nl - 1)}. \tag{18}$$

Donc, contrairement à ce qui a lieu chez l'hypermétrope :

Pour les objets placés au delà du punctum remotum, l'acuité

du myope augmente avec le rapprochement des objets, et au punctum remotum elle se montre ce qu'elle est réellement, puisqu'il n'y a plus de cercles de diffusion. Tout cela pouvait être prévu.

Les formules (17) et (18) montrent que, dans la vision au loin, l'acuité doit être considérablement réduite, même pour des degrés peu élevés de myopie ou d'hypermétropie. Par exemple, à 6 mètres de distance, pour $N = 1\,d$, et avec une pupille de 4 millimètres, on trouve pour l'œil myope : $V' = 8/100$, et pour l'œil hypermétrope : $V' = 6/100$ environ. Déjà la différence est en faveur du myope ; de plus, ce dernier, en rapprochant les objets du punctum remotum, gagnera doublement au point de vue de la faculté de distinguer les objets, puisque la grandeur des images rétiniennes croîtra à mesure que les cercles de diffusion iront au contraire en décroissant ; tandis que, chez l'hypermétrope, les cercles de diffusion croissent avec la grandeur de l'image, mais proportionnellement moins vite.

Tout cela ne s'applique, bien entendu, qu'aux cas où l'accommodation fait entièrement défaut ; dans le cas contraire, l'hypermétrope reprend l'avantage en accommodant, tandis que l'accommodation du myope ne peut lui être d'aucun secours pour diminuer la grandeur des cercles de diffusion, dans la vision à distance.

Quelle est, pour un œil myope, la distance maximum à laquelle une série d'objets d'épreuve, de grandeur déterminée, et placés au delà du punctum remotum, apparaîtront encore distincts les uns des autres?

La formule (17) donne :

$$(19) \qquad l < \frac{\beta(D + ff' - N) + Pf'}{f'NP}.$$

Exemple : Pour $N = 3\,d$, $P = 4^{mm}$ et $\beta = 2^{mm}$, ce qui suppose des lettres de 1 centimètre de hauteur, on trouve que la distance doit être de 0^m50 au minimum, à partir du foyer antérieur de l'œil.

Considérons maintenant le cas où l'objet est placé en deçà du punctum remotum.

Grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres, par un œil myope, ces objets étant placés en deçà du punctum remotum et l'accommodation faisant absolument défaut.

Des équations (5) et (2) on tire, après réduction :

$$\beta > \frac{Pf'(1-Nl)}{D+ff'N}. \tag{20}$$

Toutes choses égales, d'ailleurs, la dimension des objets devra donc être d'autant plus considérable qu'ils s'éloigneront davantage du punctum remotum, pour se rapprocher du foyer antérieur de l'œil.

Acuité correspondant aux plus petits objets placés en deçà du punctum remotum, qui peuvent être distingués à une distance l, par un œil myope privé d'accommodation.

Un calcul analogue à ceux que nous avons déjà faits pour les cas de ce genre, donnerait :

$$V' < \frac{0{,}004\,l(D-ff'N)}{Pff'(1-Nl)}. \tag{21}$$

L'acuité sera donc d'autant moindre que les objets d'épreuve s'éloigneront davantage du punctum remotum, pour se rapprocher du foyer antérieur de l'œil.

Quelle est pour un œil myope privé d'accommodation, la distance maximum à laquelle une série d'objets d'épreuve, de grandeur déterminée, et placés en deçà du punctum remotum, apparaîtront encore distincts les uns des autres?

De l'avant-dernière formule on tire :

$$l > \frac{Pf'-\beta(D+ff'N)}{f'NP}. \tag{22}$$

En comparant à la formule (19), il est facile de voir que pour une même valeur de β, de N et de P, les deux distances, en avant et en arrière du punctum remotum, sont égales entre elles. Donc :

Il existe pour chaque œil myope, privé d'accommodation, deux

points placés à égale distance du punctum remotum, l'un en deçà, l'autre au delà, pour lesquels une même série d'objets d'épreuve présente le même degré de visibilité.

Par exemple, pour $N = 3d$, $P = 4^{mm}$ et $\beta = 2^{mm}$, on trouve que la distance maximum, en avant du foyer antérieur de l'œil, doit être de 0^m50, et la distance minimum : 0^m166. Or, pour une myopie de $3d$, le punctum remotum est à 0^m33; dans les deux cas, la distance est donc la même, à partir de ce point, puisque $50 - 33{,}3 = 33{,}3 - 16{,}6$.

Si, dans la formule (22), on fait : $l = 0$, ce qui suppose l'objet placé au foyer antérieur de l'œil, on voit que la plus petite valeur que l'on puisse donner à B est égale à : $\dfrac{Pf'}{D + ff'N}$.

Dans ce cas, la grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres, se rapproche beaucoup de celle des plus petits objets pouvant être distingués, à toute distance, par un œil emmétrope, et au foyer antérieur, par l'œil hypermétrope.

Proportion dans laquelle, par suite de la présence des cercles de diffusion, se trouve abaissée l'acuité des myopes et des hypermétropes privés d'accommodation.

Ce que j'ai dit ailleurs, de l'abaissement de l'acuité chez l'emmétrope, par suite de la diffusion des images, peut être répété ici de point en point, et on arrive encore à cette conclusion que si l'on désigne par $\dfrac{1}{m}$ l'acuité vraie, c'est-à-dire celle que l'on obtiendrait en corrigeant à la fois la réfraction statique et la réfraction dynamique, cette acuité ne pourra se trouver abaissée, par suite de la présence des cercles de diffusion, qu'autant qu'elle sera supérieure à la valeur de V' qui représente l'acuité sans correction, à la distance où se pratique l'examen.

Exemple : Nous avons vu qu'avec une myopie de $1\,d$, et une pupille de 4 millimètres, un œil n'avait à 6 mètres de distance, qu'une acuité de 8/100. Tout myope, placé dans le même cas, se trouvera donc avoir à 6 mètres, une acuité réduite à 8/100, quelle

que puisse être d'ailleurs son acuité vraie, à la condition cependant qu'elle soit supérieure au chiffre ci-dessus. Ce n'est que dans le cas où cette acuité serait inférieure à 8/100, qu'on trouverait un chiffre moindre encore. Alors seulement, le chiffre obtenu donnerait bien la mesure de l'acuité vraie, puisque, en pareil cas, les cercles de diffusion n'ont plus aucune influence sur la faculté de distinguer l'une de l'autre les images rétiniennes.

Il suit de là que deux sujets, ayant chacun une myopie de 1 *d*, mais dont l'un aurait une acuité normale, tandis que l'autre aurait son acuité réduite à 1/5, par exemple, verraient également mal tous les deux, à 6 mètres de distance, puisque dans les deux cas l'acuité se trouverait abaissée à 8/100. Il pourra même arriver, l'acuité avec des images diffuses étant en raison inverse du diamètre de la pupille, que si le myope dont l'acuité est foncièrement mauvaise, a une pupille plus étroite que celle de l'autre, sa vision à distance se trouve relativement meilleure. Par exemple, avec une pupille de 3 millimètres au lieu de 4, l'acuité augmentant dans la proportion de 4 à 3, l'œil myope le plus mauvais aura une acuité de 10/100 environ; meilleure par conséquent que celle de l'autre sujet.

Ainsi s'explique ce fait, en apparence bizarre, que les myopes dont l'acuité est mauvaise ne paraissent pas voir à distance plus mal que ceux dont l'acuité est restée bonne, contrairement à ce qui a lieu pour les hypermétropes. En effet, chez le myope, l'accommodation ne peut en aucune façon faire disparaître ou amoindrir les cercles de diffusion, dans la vision à distance; au contraire, chez l'hypermétrope, l'accommodation, pour peu qu'elle existe, atténue les cercles de diffusion et, par suite, met en évidence les différences d'acuité qui existent d'un sujet à l'autre.

Nous pourrions répéter, au sujet de la mesure de la réfraction chez le myope et l'hypermétrope, ce que nous avons dit des inconvénients de la méthode de Donders, dans les cas de paralysie complète de l'accommodation, et des avantages que présente alors l'emploi de l'optomètre.

Considérations générales sur la vision des hypermétropes, presbytes ou non-presbytes.

Des considérations dans lesquelles nous sommes entré précédemment, sur la vision des hypermétropes, il résulte que ceux d'entre eux chez lesquels l'accommodation se trouverait paralysée, ou bien aurait disparu complètement, par suite des progrès de l'âge, seraient conduits à rapprocher du foyer antérieur de l'œil, les objets qu'ils voudraient voir le mieux possible. Mais il est bien rare que l'accommodation fasse entièrement défaut, même après l'emploi de l'atropine. D'une façon générale, l'hypermétrope possède la même amplitude d'accommodation que l'emmétrope de son âge.

Plusieurs cas peuvent se présenter :

1° *L'amplitude d'accommodation est suffisante pour permettre une mise au point exacte, à une distance en rapport avec les exigences de la vision distincte.*

Il est évident qu'en pareil cas, le sujet accommodera et placera l'objet à une distance qui permette de recevoir sur la rétine des images nettes et suffisamment grandes. Par exemple, un hypermétrope de 3*d*, disposant d'une amplitude d'accommodation de 5*d*, peut avoir des images nettes pour toutes les distances comprises entre l'infini et 0^m50. Il est donc certain, s'il s'agit de la lecture, que le sujet placera le livre à une distance voisine de 0^m50, et probablement un peu au delà, de manière à ne pas être obligé de mettre en jeu toute son accommodation, chose fatigante.

Mais il peut se présenter des exceptions. Supposons, pour fixer les idées, que les caractères à déchiffrer nécessitent, pour être lus à 0^m50, une acuité visuelle de 1/2 au moins, et que l'hypermétrope en question ait seulement une acuité de 1/4. Il est évident que, tout en ayant des images parfaitement nettes à 0^m50, il ne pourra pas lire. D'un autre côté, s'il place l'objet plus près, c'est-à-dire en deçà du punctum remotum, les images grandissent

mais les cercles de diffusion apparaissent. Il y a donc lieu de rechercher si, en pareil cas, le rapprochement de l'objet présente quelque avantage au point de vue de la visibilité. C'est ce que nous allons examiner.

Les caractères qui, pour être lus à 0^m50, exigent une acuité de 1/2, n'exigeraient plus à 0^m25 qu'une acuité de 1/4, qui est celle du sujet; mais cela ne suffit pas pour que la lecture soit possible, il faut en outre que les cercles de diffusion soient moins grands que les images. Or, on remarquera que le punctum proximum de l'œil en question peut être considéré comme le punctum remotum d'un œil myope privé d'accommodation, dont la myopie serait égale à $\frac{1}{0,50} = 2\,d$. Puisque, d'après ce qui a été dit précédemment le myope privé d'accommodation, quelle que soit sa vision à la distance du punctum remotum, voit plus mal encore en deçà de ce point, il en résulte que notre hypermétrope, s'il ne peut lire à la distance qui correspond à son punctum proximum, ne verra pas mieux, bien au contraire, en rapprochant le livre, à moins de porter des lunettes d'un numéro assez élevé pour compenser son insuffisance relative d'accommodation.

2° *L'amplitude d'accommodation est insuffisante pour permettre une mise au point exacte, à une distance en rapport avec les exigences de la vision distincte.*

Si le punctum proximum de l'œil hypermétrope est à une distance plus considérable que celle qui représente la distance habituelle de la vision distincte, pour la lecture, l'écriture, etc., il s'en suivra que le sujet, pour voir le mieux ou plutôt le moins mal possible, éloignera les objets de manière à les rapprocher, autant que faire se pourra, du point en question, à la manière des emmétropes presbytes. Si ce punctum proximum est trop éloigné, il faudra des lunettes, et si l'acuité est mauvaise, il les faudra assez fortes pour permettre le travail à une courte distance. C'est le cas des hypermétropes de degré élevé et de ceux devenus presbytes. Exemple : Avec $H = 3d$ et $A = 3,75d$, la distance de la vision distincte se trouvera être de : $\frac{1}{3,75 - 3} = 1^m33$, trop consi-

dérable par conséquent pour permettre le travail de près. Il faudra donc des verres de presbyte, et pour lire à 0m33, le numéro minimum de ces verres serait donné par la formule :

$$\frac{1}{0,33} - 0,75 = 2,25\,d.$$

Mais on sait qu'en pratique il faut toujours aller au delà, de telle sorte que le sujet ait en réserve une certaine quantité d'accommodation qni ne doit guère être inférieure à 1 *d*, un peu plus ou un peu moins, suivant les individus.

A côté de ces cas extrêmement fréquents, viennent se placer ceux, infiniment plus rares, dans lesquels l'insuffisance de l'accommodation est telle que l'hypermétropie devient absolue, ce qui signifie, comme on le sait, que l'accommodation est en déficit même pour la vision au loin. Supposons, par exemple, que $H = 6$ et $A = 4$, il est évident que le sujet se trouvera à peu près dans les mêmes conditions qu'un hypermétrope de 1 *d*, privé d'accommodation. Pour voir le moins mal possible, il fera donc comme ce dernier : il rapprochera de plus en plus l'objet jusqu'à le placer tout près du foyer antérieur de l'œil. Aussi ces sujets sont-ils invariablement pris pour des myopes, par les personnes qui n'ont pas fait de l'ophtalmologie une étude spéciale. Ils s'en distinguent cependant de la façon la plus nette, en ce que l'acuité visuelle, même sans correction, est meilleure dans la vision à distance que dans la vision de près, tandis que le contraire a lieu pour les myopes.

Dans ces cas d'hypermétropie absolue, le sujet n'a d'autre ressource, avons-nous dit, pour voir le moins mal possible, que le rapprochement extrême de l'objet. De l'examen de la formule (14), il résulte alors — et ce point a été développé — que le chiffre de l'hypermétropie a peu d'influence sur la grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres, ou ce qui revient au même, sur le plus ou moins de visibilité des détails d'un objet donné. Par suite, il devient à peu près indifférent pour le malade d'employer, ou non, ce qu'il possède d'accom-

modation. Exemple : Si, dans le cas dont il vient d'être question, ($H = 5$, $A = 4$), le sujet n'accommode pas, la grandeur des plus petits objets sera égale, pour une pupille de 4 millimètres, à :

$$\frac{Pf'}{D-ff'N} = \frac{4 \times 20}{19 - 0{,}3 \times 5} = 4^{mm}6;$$

si, au contraire, il met en jeu toute sa puissance d'accommodation, de manière à réduire en quelque sorte son hypermétropie à $1d$, on aura :

$$\beta = \frac{4 \times 18{,}8}{19 - 0{,}26} = 4^{mm}.$$

Pourquoi, dans cette dernière équation, avons-nous attribué à f et à f' des valeurs différentes de celles que nous avons admises jusqu'ici : 15 et 20 millimètres? Ceci demande explication.

Par suite de l'intervention de la réfraction dynamique, la valeur des distances focales antérieure et postérieure de l'œil a changé. En effet, en accommodant de $3d$, l'œil a produit le même effet que si l'on avait placé à son foyer antérieur une lentille convexe de $3d$; le foyer postérieur s'est donc rapproché de la rétine d'une quantité égale à : $0^{m}3 \times 4 = 1{,}2$ (1). La longueur focale postérieure, au lieu d'être de 20 millimètres, se trouve donc réduite à $18^{mm}8$, et la longueur focale antérieure, qui est à cette dernière comme 3 est à 4, devient égale à $14^{mm}1$. Donc :

$$ff' = 18{,}8 \times 14{,}1 = 0^{mm}26.$$

La différence qui en résulte pour la grandeur des plus petits objets perceptibles, $4^{mm}6$ dans un cas, 4 millimètres dans l'autre, est, en somme, peu considérable, eu égard aux dimensions des objets, car il ne faut pas oublier, s'il s'agit de caractères d'impression, que leur hauteur est environ cinq fois plus grande que la largeur du trait. Dès lors, on comprend très bien qu'un sujet qui,

(1) Nous supposons, pour simplifier le calcul, que le point principal à partir duquel sont comptées les longueurs focales, ne se déplace pas pendant l'accommodation, et l'on sait qu'il se déplace en effet fort peu.

même en regardant de très près, ne peut distinguer les unes des autres que les lettres ayant 20 millimètres de hauteur, s'il accommode, et 23 millimètres s'il n'accommode pas, — qui, de toutes façons, verra fort confusément les fins détails d'un objet, ne se donnera pas la peine d'accommoder pour si peu, mais à la condition qu'il n'y ait pas de vision binoculaire, car, dans le cas contraire, la convergence extrême des axes optiques entraîne forcément la mise en jeu de la réfraction dynamique.

3° L'hypermétropie est considérable et l'amplitude d'accommodation en excès.

Il est fréquent de voir des enfants fortement hypermétropes travailler de très près, à la façon des myopes de degré élevé. Les médecins peu au courant des questions d'optométrie et les opticiens, que souvent on se borne à consulter en pareil cas, ne manquent pas de prendre ces sujets pour des myopes, et bon nombre ont été condamnés à porter des verres concaves qui ne pouvaient qu'aggraver leur situation. C'est en effet quelque chose de paradoxal et de bien fait pour induire en erreur, qu'un œil atteint d'un déficit de réfraction statique et qui, par cela même, se comporte comme s'il avait de la réfraction en excès. Quelques auteurs disent, à ce propos, que les sujets en question n'accommodent pas et rapprochent les objets simplement pour bénéficier de ce que les images croissent plus vite que les cercles de diffusion. Cela n'est pas du tout exact; ces enfants accommodent parfaitement : ils mettent au point, et c'est même parce qu'ils sont obligés de déployer pour cela une puissance d'accommodation excessive, que les symptômes de l'asthénopie sont portés chez eux à un si haut degré. Quant aux causes pour lesquelles ils travaillent d'aussi près, elles sont de deux ordres :

1° Ces hypermétropes de degré élevé ont souvent une acuité mauvaise; pour grandir les images rétiniennes, ils sont donc obligés de placer les objets à une très faible distance de l'œil;

2° L'effort d'accommodation qu'exige cette vision de près, étant d'autant plus considérable que l'hypermétropie est plus élevée, entraîne une convergence des axes optiques hors de proportion

avec la distance de l'objet. Il faut donc rapprocher encore cet objet; de là un nouvel effort d'accommodation, suivi d'une exagération de la convergence, etc.; si bien que souvent la vision binoculaire devient impossible et que l'enfant se met en strabisme interne, pour lire plus commodément de très près, à l'aide d'un seul œil (1).

Les choses se passent donc à peu près comme chez certains myopes, avec cette aggravation, pour l'hypermétrope, qu'obligé d'accommoder plus fortement, pour voir de près, il est porté par là même à converger davantage. Il existe bien, il est vrai, entre l'accommodation et la convergence, une certaine indépendance qui fait que, chez l'hypermétrope surtout, à une convergence donnée des axes optiques, peut correspondre un effort d'accommodation plus considérable que celui qui serait nécessaire à un emmétrope, pour passer de l'infini au point de convergence en question; mais si le déficit de réfraction statique est très élevé, l'écart entre le degré de convergence qui correspond à un point donné de l'espace et l'effort d'accommodation nécessaire pour avoir des images nettes à cette distance, est parfois trop considérable pour que l'équilibre puisse s'établir. C'est précisément ce qui se présente chez certains hypermétropes d'acuité mauvaise. Un exemple le fera comprendre.

Un sujet de dix ans, dont l'hypermétropie totale est égale à environ $5d$, possède une amplitude d'accommodation égale à $15d$. Ce sujet peut voir distinctement, binoculairement et sans verre, depuis l'infini jusqu'à 0m20. A ce moment, il a employé $5d$ d'accommodation pour neutraliser son hypermétropie, puis cinq

(1) Je considère comme absolument inexacte cette assertion que, parmi les hypermétropes, les plus exposés au strabisme ne sont pas ceux qui présentent les plus hauts degrés de cette anomalie de réfraction, mais bien ceux chez lesquels elle existe à un degré moyen. (De Wecker. — *Traité des Maladies des yeux*, 2e édition, tome II, p. 1003.)

Si les cas de strabisme associés à une forte hypermétropie se présentent rarement à l'observation, cela tient tout simplement à ce que les hypermétropes de degré élevé sont en fort petit nombre; mais la proportion des strabiques, chez eux, est bien autrement considérable que chez les hypermétropes de degré léger ou moyen.

autres pour passer de l'infini à 0^m20, en tout $10d$. Il lui en reste donc cinq en réserve, mais qu'il ne peut en aucune façon utiliser pour la vision binoculaire, car s'il essaie de lire en deçà de 0^m20, le nouvel effort qu'il est obligé de faire, entraîne une convergence des axes optiques supérieure à ce qu'elle devrait être, et il survient de la diplopie. Il en résulte que le sujet, obligé par suite de sa mauvaise acuité, de lire à 0^m15, tourne la difficulté, en déviant de préférence l'œil dont l'acuité est la moins bonne, et lit désormais de très près avec l'autre œil, en inclinant la tête du côté opposé, de manière à ne pas avoir à contracter le muscle droit interne et à éviter ainsi l'asthénopie musculaire qui accompagne toute convergence excessive.

Ces cas sont relativement fréquents; le diagnostic différentiel d'avec la myopie est toujours facile, puisque, ainsi que je l'ai dit précédemment, l'acuité visuelle à distance, sans correction, est toujours dans l'hypermétropie, supérieure à l'acuité de près, tandis que c'est le contraire qui a lieu chez le myope. Il est bon d'ajouter que très souvent ces hypermétropies élevées s'accompagnent d'un certain degré d'astigmatisme qui vient compliquer la question.

A mesure que, par les progrès de l'âge, la puissance de la réfraction dynamique s'affaiblit, le punctum proximum s'éloigne de l'œil. Chez le sujet qui nous a servi d'exemple, l'amplitude d'accommodation se trouvera réduite à $10d$ vers vingt ans. Le punctum proximum, puisque $H = 5$, sera donc à 0^m20 de l'œil. Nous avons vu qu'en raison de sa mauvaise acuité, le sujet ne pouvait lire à pareille distance; mais supposons qu'on place en ce point des caractères suffisamment grands pour que les images rétiniennes deviennent perceptibles, la vision binoculaire qui, à dix ans, était possible à 0^m20, sera-t-elle encore possible à cette distance, à l'âge de vingt ans? Au premier abord, la réponse paraît devoir être affirmative, et pourtant il n'en est rien. Donders a, depuis longtemps, appelé l'attention sur ce point et montré que toute personne chez laquelle la vision binoculaire a été impossible pendant le jeune âge, en raison de la désharmonie entre l'accommodation et la convergence, ne peut jamais, à plus forte raison,

voir binoculairement à un âge plus avancé [1]. L'exposé de Donders manque un peu de clarté, et il serait désirable qu'une loi physiologique basée sur des observations nombreuses, permît de résoudre, au moins approximativement, le problème ci-après :

Étant donné : *Le degré d'amétropie, l'amplitude d'accommodation et l'acuité visuelle, déterminer le point le plus rapproché de la vision binoculaire distincte, c'est-à-dire sans cercles de diffusion.*

Pour en revenir à notre hypermétrope, que se passera-t-il lorsque la réfraction dynamique s'affaiblissant peu à peu, par l'effet de l'âge, le punctum proximum se trouvera transporté successivement à des distances de plus en plus grandes : $0^{m}20$, $0^{m}30$, etc.? Le sujet ne placera certainement pas en deçà du punctum remotum les objets qu'il voudra voir le mieux possible, puisque la vision deviendrait au contraire plus mauvaise; la théorie, d'accord en cela avec l'observation, montre qu'il les placera en ce point, ou du moins le plus près possible, et voici pourquoi :

Si le strabisme est un fait acquis, l'hypermétrope, n'ayant aucun souci de la vision binoculaire, déploiera toute sa puissance de réfraction dynamique, de manière à obtenir des images rétiniennes parfaitement nettes. Si, au contraire, le strabisme n'est pas devenu permanent, le sujet pourra recouvrer l'usage de la vision binoculaire, *mais à la condition de ne pas accommoder exactement*, de manière à établir entre l'accommodation et la convergence des axes optiques, ce qu'on pourrait appeler un *modus vivendi*. Les images rétiniennes sont alors diffuses, mais il n'en résulte pas forcément que l'acuité visuelle se trouve abaissée. Cela n'a lieu, en effet, d'après ce que nous avons vu, qu'autant que l'acuité avec correction est supérieure à l'acuité sans correction, pour la distance à laquelle s'exerce la vision.

Il pourra donc se faire qu'à partir du moment où l'hypermétrope

---

[1] V. Donders, *Anomalies de la réfraction et de l'accommodation*. (*Traité des Maladies des yeux*, de Wecker, 2e édition, p. 515 et 609.)

(d'amétropie élevée et d'acuité très mauvaise, ne l'oublions pas) ne pourra plus, même en se réduisant à la vision binoculaire, avoir une perception nette des objets, par suite de l'affaiblissement du pouvoir d'accommodation et de la distance relativement considérable à laquelle il est obligé de travailler, — il pourra se faire, dis-je, que cet hypermétrope, ayant à choisir entre la vision monoculaire avec des images nettes, mais trop petites eu égard à son acuité, et la vision binoculaire avec des images diffuses, mais sans que ces images lui apparaissent pour cela non distinctes les unes des autres, — se décide instinctivement pour la vision binoculaire, en raison des avantages de toutes sortes qu'elle présente [1].

Mais on remarquera que cela ne peut avoir lieu qu'à la condition de renoncer en quelque sorte à la lecture, à l'écriture, etc.

Aussi les cas de ce genre ne s'observent-ils guère que chez les enfants auxquels on a fait interrompre leurs études, par suite de l'impossibilité où ils se trouvent de supporter le travail de près.

Lorsque l'acuité n'est pas trop mauvaise, des verres fortement convexes peuvent remédier, dans une certaine mesure, à ce fâcheux état de choses, mais on sait combien il est parfois difficile de convaincre les parents de l'utilité des lunettes de presbyte contre une affection qu'ils qualifient de myopie, par cela seul que les enfants ont la vue basse.

Je laisse de côté, pour le moment, la question des verres sphéro-prismatiques, qui m'entraînerait beaucoup trop loin.

Ce qui précède s'applique uniquement à la vision de près, la seule qui présente de sérieuses difficultés d'interprétation. Quant à la vision à distance, il est clair qu'elle sera d'autant moins mauvaise que l'amétropie sera moins élevée. De plus, le sujet a, ici, tout intérêt à accommoder, même si l'hypermétropie est absolue; en effet, par ce moyen, il diminue d'autant son hyper-

---

[1] La cessation du strabisme implique ici le retour à la vision binoculaire, contrairement à ce qui se passe chez les hypermétropes de degré léger ou moyen, dont le strabisme devient de moins en moins prononcé avec les années, par suite de l'amblyopie de l'œil exclu.

métropie, en quelque sorte. Or, l'acuité à distance des hypermétropes est très différente, suivant le déficit de réfraction. Par exemple, avec $H = 5$ et $A = 4$, on trouve que, sans accommodation, $V = 5/100$ seulement, tandis qu'en réduisant l'hypermétropie à $1\,d$, au moyen des $4\,d$ d'amplitude d'accommodation, l'acuité s'élève à 8/100. Ces chiffres ont été obtenus en faisant dans la formule (15), $l = \infty$ et $P = 4^{mm}$.

Considérations générales sur la vision des myopes, presbytes ou non-presbytes.

La vision au loin ne peut donner lieu, pour les myopes, à aucune considération de quelque importance. Qu'il y ait de l'accommodation, ou qu'il n'y en ait pas, le résultat sera toujours le même, puisque la réfraction dynamique ne joue chez eux aucun rôle, dans la vision à distance. Dans chaque cas particulier, l'acuité visuelle sera donnée par la formule (18).

Les chiffres obtenus semblent, au premier abord, pouvoir être vérifiés expérimentalement, de la façon la plus simple, en mesurant l'acuité sans correction des myopes de même degré : soit à l'aide de mon optomètre, en plaçant la plaque d'épreuve au 0 de l'échelle, de telle sorte que les rayons lumineux arrivent à l'œil en parallélisme; soit par la méthode de Donders, mais en ayant soin alors, de se mettre à l'abri de la cause d'erreur résultant de ce que le tableau d'épreuve ne se trouve pas à l'infini. Le mieux, pour cela, est de suspendre l'échelle à une distance de 4 mètres, et de placer au-devant de l'œil un verre de 1/4 de dioptrie.

Mais je ferai remarquer que mes calculs s'appliquent seulement à la myopie axile. Or, nous ne savons jamais, lorsque nous mesurons la réfraction d'un œil, à quelle sorte de myopie nous avons affaire. Cet état peut être dû à un excès de courbure des surfaces réfringentes, à une situation anormale de ces surfaces les unes par rapport aux autres, etc. En second lieu, il est très difficile de savoir quel est exactement le diamètre de la pupille, au moment précis de l'expérience. Sous l'influence de causes très diverses, ce diamètre varie d'un instant à l'autre, dans des

proportions relativement considérables; de là résultent des changegements proportionnels dans le diamètre des cercles de diffusion. Enfin, il ne faut pas oublier que par « degré de myopie » et, d'une façon générale par « mesure de réfraction », nous entendons ici la mesure de l'amétropie vraie, c'est-à-dire le chiffre que l'on obtiendrait si l'on pouvait placer le verre au point nodal, de manière à ne pas modifier la grandeur des images rétiniennes. C'est ce à quoi l'on arrive, par un artifice d'optique, lorsqu'on mesure l'amétropie à l'aide de mon optomètre, en enlevant l'œilleton et en enfonçant le globe dans le tube, de manière à faire coïncider le point nodal avec le foyer antérieur de la lentille de l'instrument (1).

Si, au contraire, on a recours à lamétho de de Donders, laquelle donne, non pas la mesure exacte de la réfraction, mais bien le numéro du verre qui, mis au foyer antérieur de l'œil, corrige l'amétropie, il faut faire la correction indiquée par cet auteur (2), en ayant soin de faire porter cette correction, non pas sur la distance du foyer antérieur à la cornée (13 millimètres), mais bien sur la distance de ce foyer au point nodal (20 millimètres).

Lorsque des déterminations de ce genre, faites avec toutes les précautions désirables, ne conduisent pas à des résultats qui se rapprochent de ceux obtenus par le calcul, on doit en conclure: ou bien que l'appareil réfringent de l'œil examiné n'est pas semblable de tous points à celui de l'œil emmétrope type, ou bien qu'on a commis quelque erreur dans la mesure de la pupille.

Pour la vision de près, quatre cas sont à considérer :

1° *L'accommodation fait entièrement défaut.* — En pareille

(1) V. Badal, *Clinique ophtalmologique*, p. 10 et suivantes.

(2) V. Donders, *loc. cit.*, t. II, p. 607 et 706. — On obtient *identiquement* le même résultat à l'aide de mon optomètre, en plaçant alors l'œil à un demi-pouce environ de l'œilleton. Contrairement à ce que dit M. Landolt (*Traité d'Ophtalmologie*, p. 499), l'instrument a été construit spécialement pour cet usage. Si, au contraire, on veut avoir la mesure *exacte* de la réfraction, chose rarement utile en pratique, il faut dévisser l'œilleton, de manière à pouvoir enfoncer le globe de l'œil dans le tube; c'est seulement par ce moyen que l'on peut avoir aussi la mesure exacte de l'acuité. Je me propose, du reste, de reprendre cette question.

circonstance, le myope s'efforce de placer l'objet le plus près possible du punctum remotum; en aucun cas, dût-il renoncer à la vision binoculaire, il ne le placera au delà, quelque rapproché de l'œil que puisse être ce point; à moins cependant qu'il ne s'agisse d'objets volumineux et pouvant être distingués malgré une certaine diffusion.

Si l'acuité est mauvaise et le punctum remotum éloigné, le sujet ne gagnerait rien à travailler de près, dans le but de grandir les images rétiniennes, car l'accroissement proportionnellement plus rapide des cercles de diffusion rendrait la vision moins bonne encore. Au contraire, il devra éloigner les objets, de manière à les rapprocher le plus possible du punctum remotum. Le plus souvent, en pareil cas, des verres fortement convexes deviennent nécessaires pour suppléer au manque d'accommodation.

2° *L'accommodation subsiste.* — Plusieurs cas sont à considérer.

a. Si la myopie est faible, le sujet accommodera de manière à placer l'objet en deçà du punctum remotum, à la distance moyenne de la vision distincte, ou plus près encore, si l'acuité est mauvaise.

b. Si la myopie est comprise entre 2 et 5 *d* environ, de telle sorte que le punctum remotum soit entre 0m50 et 0m20; si d'autre part, l'amplitude d'accommodation est peu élevée (sujets âgés), le myope placera l'objet au voisinage du punctum remotum. En pareil cas, la convergence des axes optiques n'entraîne pas nécessairement un effort d'accommodation.

c. Si la myopie est élevée et l'accommodation puissante (sujets jeunes), la convergence extrême des axes optiques sera suivie d'un effort synergique d'accommodation qui provoquera, à son tour, une exagération de la convergence, jusqu'à ce qu'enfin l'équilibre ait pu s'établir entre les deux fonctions. C'est ce qui fait que les jeunes myopes de degré élevé sont conduits à travailler en deçà du punctum remotum. Si l'acuité est mauvaise, ils y sont encore sollicités par le besoin d'avoir de grandes images rétiniennes; souvent alors le rapprochement des objets est tel, que la vision

binoculaire devient impossible; mais à mesure que les sujets avancent en âge et que l'amplitude d'accommodation diminue, cette exagération apparente de la myopie devient de moins en moins marquée. De là cette croyance, chez les gens du monde, que la myopie peut diminuer par suite du progrès des années; erreur encore entretenue par cette circonstance que le rétrécissement de la pupille permet aux vieillards myopes de voir au loin, moins mal que par le passé (1). Et l'on conçoit très bien que l'amélioration de l'acuité à distance puisse être considérable. On sait que les jeunes myopes ont la pupille relativement large; supposons que le diamètre de cette ouverture soit de 5 millimètres, pendant les premières années de la vie, et se réduise à 2 millimètres dans la vieillesse; l'acuité à distance se trouvera accrue dans la proportion de 5 à 2. Aussi n'est-il pas rare de voir des myopes âgés diminuer le numéro de leurs verres concaves, se passer même de verres, dans la vision à distance, et se contenter de la vision désormais passable qu'ils se trouvent avoir, sans le secours de lunettes.

IV. — APHAKIE.

Si nous admettons, avec la généralité des auteurs, que l'œil privé de cristallin a perdu complètement la faculté de modifier son pouvoir réfringent, il en résulte que cet œil peut être assimilé à un œil fortement hypermétrope, privé d'accommodation. Mais en raison des modifications survenues dans l'appareil dioptrique, il va nous falloir apporter quelques changements aux formules que nous avons établies.

Puisque la cornée est la seule surface réfringente, le point *nodal* se trouve au centre de courbure de cette membrane, par conséquent à 8 millimètres de sa face antérieure. La situation de

(1) Disons cependant que si, avec Donders (De Wecker, *loc. cit.*, t. II, p. 577), on admet qu'à partir de quarante ans, il se produit, dans tous les yeux, une légère diminution de la réfraction statique, due à une densité plus uniforme des différentes couches du cristallin et à un aplatissement de cette lentille, il en résulte alors bien réellement que la myopie diminue un peu avec les progrès de l'âge. Mais ce point ne me semble pas absolument démontré.

ce point est donc restée à peu près la même que dans l'œil pourvu de cristallin; mais le point *principal*, à partir duquel se comptent les longueurs focales, est maintenant au sommet de la cornée; de plus ces longueurs focales se sont modifiées. Dans un travail sur l'aphakie [1], j'ai obtenu pour ces distances les valeurs suivantes : $f = 23^{mm}7$ et $f' = 31^{mm}7$, ce qui donne : $ff' = 0^{mm}75$. La distance de la pupille au foyer postérieur de l'appareil réfringent est donc égale à : $31^{mm}7 - 4 = 27^{mm}7$. Si nous transportons cette valeur dans les équations (1) et (4), relatives à l'œil hypermétrope, nous aurons :

$$C = \frac{0,75\,P(1 + Nl)}{0,75 + 27,7\,l}, \tag{23}$$

$$\beta' = \frac{\beta f(27,7 - 0,75N)}{0,75 + 27,7\,l}, \tag{24}$$

formules dans lesquelles N représente le numéro du verre qui, placé au foyer antérieur, c'est-à-dire à 23 millimètres de la cornée, fait converger sur la rétine les rayons parallèles.

Dans le travail que je viens de citer, j'ai montré que si l'on désigne par R le degré de myopie ou d'hypermétropie, avant l'aphakie, il existe entre le numéro du verre correcteur, avant et après, la relation suivante :

$$R = 28 - 2,5N. \tag{25}$$

Si, avant la perte du cristallin, l'œil était emmétrope, on doit avoir, dans l'équation précédente : $R = 0$, c'est-à-dire :

$$N = \frac{28}{2,5} = 11,2 \text{ dioptries.}$$

Ceci va nous permettre de calculer quelle est, après l'extraction du cristallin, l'acuité d'un œil primitivement emmétrope.

Dans la formule (15), qui donne l'acuité de l'œil hypermétrope,

---

[1] Badal, *Méthode nouvelle pour le diagnostic rétrospectif de la réfraction, après l'extraction du cristallin, et d'une façon générale, dans l'aphakie.* (Annales d'oculistique, 1878.)

remplaçons 19 millimètres par $27^{mm}7$, faisons : $ff' = 0^{mm}75$ et : $N = 11\, d$, nous aurons :

$$V' = \frac{0,0041(27,7 - 0,75 \times 11)}{0,75P(1 + 11l)}, \tag{26}$$

Avec une pupille de 4 millimètres et à 6 mètres de distance, on obtient :

$$V' < \frac{1}{400} \text{ environ.}$$

Or, nous avons vu que l'œil emmétrope avait encore, dans les mêmes conditions, une acuité de 3/8 = 15/40. Donc :

La vision à distance, d'un œil opéré de cataracte, est environ 150 fois plus mauvaise que celle du même œil pourvu de son cristallin, mais entièrement privé d'accommodation.

On peut prévoir que l'écart diminue dans la vision de près, puisqu'il a été établi que l'hypermétrope privé d'accommodation rapproche les objets pour mieux les voir. Nous avons montré qu'un emmétrope, se trouvant dans le même cas, ne peut arriver à lire, qu'autant que les lettres ont une hauteur au moins cinq fois égale au diamètre de la pupille; si l'on applique à l'œil atteint d'aphakie la formule (14 *bis*), dans laquelle on suppose l'objet placé au foyer antérieur, c'est-à-dire très près de l'œil, on trouve, pour la grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres :

$$\beta = \frac{31,P}{27,7 - 0,75 \times 11} = 1,6P.$$

S'il s'agit de caractères d'impression, la hauteur des lettres, ici encore, doit être cinq fois plus grande que la largeur du trait, c'est-à-dire égale à 8 fois le diamètre de la pupille. Il s'ensuit qu'un œil emmétrope, opéré de cataracte, dont la pupille serait circulaire et aurait un diamètre de 3 millimètres, ce qui est la moyenne, pour les vieillards, pourrait lire, en les plaçant très près de la cornée, des lettres de 2 centimètres 1/2 de hauteur environ.

Mais si, au lieu de lettres, il s'agit simplement de distinguer

l'une de l'autre, des bandes noires séparées par des bandes blanches, toutes de même largeur, il suffira que ces bandes aient les 16/10 du diamètre de la pupille, c'est-à-dire une fois et demi environ ce diamètre.

Partant du même principe, il est facile de calculer la distance maximum à laquelle un opéré de cataracte primitivement emmétrope peut, sans lunettes, compter les doigts. La formule (16), adaptée à l'œil privé de cristallin, donne :

$$l < \frac{\beta(27,7 - 0,75 \times 11) - P \times 31,7}{31,7 \times 11 \times P}.$$

Les doigts d'une main d'homme, un peu forte, ont environ 20 millimètres de largeur; si l'on suppose $P = 3^{mm}$, on trouve : $l = 0^m28$. Il ne faut pas oublier que cette distance est comptée à partir du foyer antérieur de l'œil; lequel foyer, dans l'aphakie, est situé à 23 millimètres de la cornée. C'est donc, en chiffres ronds, 30 centimètres. Pour $P = 2^{mm}$, on trouverait : $l = 0^m50$, et pour $P = 1$, $l = 1$ mètre.

On remarquera que l'acuité vraie du sujet est à peu près sans influence sur la distance à laquelle un opéré de cataracte peut compter les doigts. J'ai montré, en effet, que l'acuité, sans correction, d'un œil privé de cristallin, ne peut se trouver abaissée au-dessous du chiffre donné par la formule (26) qu'autant que l'acuité avec correction, serait elle-même inférieure à ce chiffre. Or, nous avons vu que cette dernière est de 1/400 à 6 mètres, et qu'en deçà de cette distance elle est bien moindre encore. Dès lors, on comprend que tous les opérés de cataracte, ayant même diamètre pupillaire, et même déficit de réfraction, doivent pouvoir compter les doigts à la même distance, à moins d'insuccès opératoire à peu près complet, ou d'amblyopie préexistante.

Les chiffres qui précèdent ne sont applicables qu'à l'œil primitivement emmétrope; l'œil myope, toutes choses égales d'ailleurs, pourrait compter les doigts à une distance plus grande; l'œil hypermétrope ne pourrait le faire qu'à une distance moindre. Par exemple, un opéré de cataracte chez lequel la vision à distance se

trouverait corrigée par un verre + 6 (au lieu de + 11), ce qui suppose une myopie antérieure de 13 *d*, devrait pouvoir compter les doigts à 0m65, au lieu de 0m28. La différence est considérable.

Le diamètre de la pupille joue, comme on le voit, un rôle des plus importants dans la vision des opérés de cataracte non pourvus de lunettes; j'ajoute que l'emploi des verres les mieux choisis ne remédie pas d'une manière complète aux inconvénients d'une large pupille. On sait en effet que, par suite de la perte du pouvoir d'accommodation, il faut un verre différent pour chaque distance; mais on ne peut guère prescrire aux opérés que deux paires de lunettes, l'une pour la vision au loin, l'autre pour la vision de près à une distance déterminée. Il en résulte qu'en deçà et au delà de ce point, il se produit des cercles de diffusion, et le sujet voit d'autant plus confusément que la pupille est plus large. A ce point de vue, l'iridectomie est certainement une chose fâcheuse, surtout lorsqu'elle est pratiquée à la partie inférieure.

V. — AMÉTROPIE PAR ANOMALIE DU SYSTÈME RÉFRINGENT.

Le lecteur a été prévenu, dès le début, que nous avions surtout en vue, dans ce travail, les yeux dont l'appareil réfringent est normal, c'est-à-dire identique à celui de l'œil schématique de Listing. Nos calculs, sauf en ce qui concerne l'aphakie, s'appliquent donc uniquement à l'emmétropie et à l'amétropie axiles.

Nous pourrions nous en tenir là. Il est admis, en effet, que la puissance de l'appareil dioptrique varie très peu d'un œil à l'autre, et que, le plus souvent, ce qu'on est convenu d'appeler excès ou déficit de réfraction statique, tient uniquement à une disproportion entre la distance focale postérieure du système réfringent et la longueur de l'axe antéro-postérieur du globe, d'où le nom d'amétropie axile donné à ces anomalies.

Pourtant il m'a paru utile de faire ressortir les différences que peuvent présenter entre eux, au point de vue de la diffusion des images, deux yeux myopes ou hypermétropes au même degré, mais

dont l'un présenterait de l'amétropie axile, tandis que chez l'autre l'amétropie serait due bien réellement à une structure particulière du système lenticulaire.

La puissance de l'appareil réfringent dépend à la fois de l'indice de réfraction des milieux, de la courbure des surfaces et de la situation de ces surfaces les unes par rapport aux autres. Chacune de ces causes peut agir isolément, ou s'unir aux deux autres pour modifier les longueurs focales du système. Il est passé en habitude de baser tous les calculs sur une simple modification de courbure des surfaces réfringentes; c'est faire là une chose tout à fait arbitraire et dont il est impossible de tirer aucune conclusion pratique.

Le mieux, à mon avis, est de se borner à considérer simplement les longueurs focales, sans se préoccuper des causes qui font que ces longueurs ne sont pas les mêmes que dans l'œil type.

Qu'est-ce, en effet, qu'un œil amétrope par anomalie du système dioptrique? C'est un œil dont la longueur focale postérieure f' n'est plus égale à 20 millimètres, dans lequel par conséquent, ce foyer ne tombe plus sur la rétine, bien que la longueur de l'axe antéro-postérieur du globe soit la même que dans l'œil schématique.

Supposons que : $f' = 16^{mm}$, cette seule donnée nous suffit pour calculer le degré d'amétropie ou plus exactement le numéro N du verre métrique qui, placé au foyer antérieur de l'œil, corrigerait la réfraction. En effet, la distance x de la rétine au foyer postérieur est égale, dans le cas actuel, à : $0^m020 - 0^m016 = 0^m004$. D'autre part : $f = 3/4\, f' = 0^m012$. Puisque, d'après une formule connue, $x = \mathrm{N} ff'$, on a : $0{,}004 = \mathrm{N} \times 0{,}016 \times 0{,}012$; d'où :

$$\mathrm{N} - \frac{4}{0{,}2} = 20\, d.$$

Nous avons donc affaire à une myopie de 20 d. Dès lors, dans les formules relativès à la myopie, il faudrait faire : $\mathrm{N} = 20, f' = 16$, $f = 12$, et remplacer le chiffre 19, distance de la pupille au foyer postérieur de l'œil type, par $19 - 4 = 15$. Nous sommes, il est

vrai, obligés d'admettre pour cela, que le point principal reste à peu près à la même distance de la cornée que dans l'œil emmétrope; mais cela paraît fort probable, étant donnée la situation de ce point entre la cornée et le cristallin. On sait d'ailleurs, que les modifications de courbure du cristallin, d'où résulte l'accommodation de l'œil aux distances, ne changent guère la situation des points principaux et des points nodaux.

On remarquera combien, dans cette variété d'amétropie, les calculs deviennent compliqués, puisqu'il faut, pour chaque degré de myopie ou d'hypermétropie, établir à nouveau les différentes valeurs que nous venons de calculer.

Pour terminer, cherchons quelle est, à la distance de 1 mètre, l'acuité visuelle de deux myopes de 20 *d*, dont l'un aurait une myopie axile, et l'autre une myopie par excès de pouvoir réfringent. Nous supposerons que la pupille a 4 millimètres de diamètre.

La formule (18) donne, pour le premier œil :

$$V' = \frac{0,004\,(19 + 0,3 \times 20)}{4 \times 0,3\,(20 - 1)} = \frac{1}{230} \text{ environ,}$$

et pour le second :

$$V' = \frac{0,004\,(15 + 0,2 \times 20)}{4 \times 0,2\,(20 - 1)} = \frac{1}{200} \text{ environ.}$$

La différence est peu considérable, bien que nous ayons pris comme exemple un degré d'amétropie extrêmement élevé et pour lequel, par conséquent, l'écart s'accentue entre les deux sortes de myopie.

On arriverait, pour l'hypermétropie, à un résultat analogue.

Ce fait est important; il montre que l'erreur commise en appliquant les formules établies au début de ce travail, à un œil dont l'amétropie n'est pas uniquement axile, que cette erreur, dis-je, est, en somme, négligeable.

REMARQUE

Nous avons supposé constamment, dans le cours de ce travail, que la pupille était libre. Par là nous entendons : 1° que le cris-

tallin, transparent dans toute son étendue, ne forme pas, en arrière de l'iris, un second diaphragme pouvant diminuer l'étendue des cercles de diffusion, ou donner lieu à de la polyopie; 2° que les paupières laissent la pupille complètement à découvert; 3° que chez les opérés de cataracte, le champ pupillaire ne se trouve rétréci ni par des débris de cristalloïde, ni par des exsudats, etc.

Il est donc indispensable, dans toutes les expériences relatives à la diffusion des images, de s'assurer au préalable que la pupille représente bien réellement la base du cône formé par les rayons lumineux qui vont jusqu'à la rétine.

Le clignement est le moyen habituellement mis en usage par les amétropes pour rétrécir l'ouverture pupillaire. Je me bornerai à ce sujet à une simple remarque.

Tout œil dans lequel, par l'effet du clignement, la pupille se trouve rétrécie suivant sa hauteur, devient en quelque sorte astigmate au point de vue de la diffusion des images. En effet, la réfraction se trouve corrigée dans le sens vertical, et d'autant plus que les paupières se rapprochent davantage l'une de l'autre; au contraire, la diffusion persiste pour la nappe de rayons qui frappe la cornée suivant un plan horizontal. L'image rétinienne d'un point lumineux n'est donc pas un cercle de diffusion, mais bien une ligne droite, dont la longueur est en rapport avec le diamètre réel de la pupille, et la largeur, avec la hauteur de la portion de cornée restée à découvert.

Partant de ces données, on pourrait tenter de calculer quelle est l'influence du clignement sur la netteté des images reçues par la rétine. Mais on comprend qu'un calcul de ce genre ne pourrait être fait qu'à la condition de prendre comme objet d'épreuve, des groupes de lignes parallèles, diversement inclinées, et il est probable que l'on n'arriverait, en fin de compte, à aucune conclusion véritablement pratique.

CONCLUSIONS

A. — *Grandeur des cercles de diffusion et des images rétiniennes.*

Toutes choses égales d'ailleurs :

I. La grandeur des cercles de diffusion est en raison directe du diamètre de la pupille.

II. Le diamètre des cercles de diffusion est plus grand dans l'œil hypermétrope que dans l'œil emmétrope, et plus grand dans ce dernier que dans l'œil myope.

III. Au contraire, l'image d'un même objet est plus grande dans l'œil myope que dans l'œil emmétrope, et plus grande dans ce dernier que dans l'œil hypermétrope.

B. — *Rapport entre la grandeur des images et celle des cercles de diffusion. dans les yeux privés d'accommodation.*

IV. Dans l'œil emmétrope, le rapport entre la grandeur des images et celle des cercles de diffusion est indépendant de la distance de l'objet. Ce rapport est constant, pour un même objet et un même diamètre de la pupille. Il peut être formulé approximativement de la manière suivante : La grandeur de l'image d'un objet est au diamètre des cercles de diffusion, comme la grandeur de l'objet est au diamètre de la pupille.

V. Dans l'œil hypermétrope, la grandeur des images, à mesure que l'objet se rapproche, croît proportionnellement plus vite que celle des cercles de diffusion, et d'autant plus vite que l'hypermétropie est plus élevée.

VI. Dans l'œil myope, les cercles de diffusion décroissent à mesure que l'objet se transporte de l'infini au punctum remotum, où ils se réduisent à 0; ils réapparaissent à partir de ce point, et croissent alors proportionnellement plus vite que les images, et d'autant plus vite la myopie est plus élevée.

C. — *Limites à la faculté de distinguer l'une de l'autre des images rétiniennes, par un œil privé d'accommodation.*

VII. Pour qu'une série d'objets, ou ce qui revient au même,

pour que les différents détails d'un même objet puissent être distingués les uns des autres, il faut : 1° que le diamètre des cercles de diffusion soit moindre que la largeur des images; 2° que l'angle visuel sous lequel sont vus ces objets soit au moins égal à celui qui représente le degré d'acuité de l'œil (1′ pour V = 1, 2′ pour V = 1/2, etc.).

D. — *Vision des emmétropes presbytes ou non-presbytes.*

VIII. La grandeur des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil emmétrope est indépendante de la distance de l'objet, et dépend uniquement de la largeur de la pupille. Cette grandeur est approximativement égale au diamètre de la pupille.

S'il s'agit des caractères en usage pour la mesure de l'acuité visuelle, on devra se rappeler que par « grandeur de l'objet », il faut entendre la largeur du trait qui constitue les lettres, et non pas la hauteur de la lettre entière.

IX. L'acuité sans correction d'un œil emmétrope privé d'accommodation, croît en raison directe de la distance, en raison inverse du diamètre de la pupille. Cette acuité a pour mesure une fraction dont le numérateur est la distance à laquelle se trouve placé l'objet, le mètre étant pris comme unité de longueur, et le dénominateur, le quadruple du diamètre de la pupille, le millimètre étant pris comme unité.

X. Tous les yeux emmétropes privés d'accommodation, dont l'acuité est, en réalité, supérieure au chiffre ainsi obtenu se trouvent avoir, à la même distance et pour un même diamètre de la pupille, le même degré d'acuité, à moins de faire usage de verres correcteurs qui suppléent l'accommodation. C'est seulement lorsque l'acuité vraie est inférieure au chiffre en question, que les cercles de diffusion sont sans influence sur la mesure de l'acuité.

XI. Pour être assuré de n'avoir aucune erreur dans la mesure de l'acuité d'un œil emmétrope privé d'accommodation, il faut, si l'on a recours à la méthode de Donders, pratiquer l'examen à

autant de fois 4 mètres de distance que la pupille compte de millimètres de diamètre.

XII. Un emmétrope, absolument dépourvu d'accommodation, verrait également mal à toutes distances, et n'aurait aucun intérêt à éloigner ou à rapprocher les objets. L'éloignement ne deviendrait préjudiciable qu'à partir du point au delà duquel la grandeur des images se trouverait inférieure à celle des plus petites images perceptibles, eu égard à l'acuité vraie.

XIII. Si faible que soit l'amplitude d'accommodation, l'emmétrope presbyte a tout intérêt à éloigner les objets, puisque alors les cercles de diffusion décroissent plus vite que la grandeur des images. L'éloignement devra être d'autant plus considérable que l'amplitude d'accommodation sera plus faible.

XIV. Une mauvaise acuité, en obligeant l'emmétrope à travailler de très près, de manière à obtenir de grandes images rétiniennes, a pour conséquence une presbytie prématurée; le besoin des verres convexes se fait sentir avant l'âge, et d'autant plus vite que l'acuité est moins bonne, à moins cependant qu'un certain degré de myopie n'ait été la conséquence des efforts excessifs d'accommodation et de convergence, ce qui n'est pas rare.

E. — *Vision des hypermétropes.*

XV. Contrairement à ce qui a lieu pour l'emmétrope, la dimension des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil hypermétrope privé d'accommodation, doit être d'autant plus considérable que la distance est plus grande; inversement la distance devra être d'autant plus petite que l'objet sera plus petit.

XVI. L'hypermétrope privé d'accommodation peut arriver à voir des objets presque aussi petits que l'emmétrope placé dans le même cas, mais à la condition que la vision s'exerce à très courte distance.

XVII. Pour voir le moins mal possible, l'hypermétrope privé d'accommodation est conduit à placer les objets au voisinage du foyer antérieur de l'œil; en effet, à mesure que la distance

diminue, les images croissent plus vite que les cercles de diffusion.

XVIII. L'acuité de l'hypermétrope privé d'accommodation est d'autant plus mauvaise que la distance est plus grande, la pupille plus large et l'amétropie plus élevée. Toutes choses égales d'ailleurs, elle est à peu près la même que celle de l'emmétrope, si l'objet d'épreuve se trouve placé très près de l'œil. Elle est moindre proportionnellement à distance, et d'autant moindre que la distance est plus grande.

XIX. L'hypermétrope de degré moyen, possédant une amplitude d'accommodation suffisante pour permettre le travail de près, à la distance habituelle de la vision distincte, lira comme l'emmétrope s'il possède une bonne acuité, mais toujours avec une certaine fatigue de l'accommodation.

XX. Si l'acuité est trop mauvaise pour que le sujet puisse avoir des images perceptibles à la distance du punctum proximum, il ne cherchera pas à placer les objets en deçà de ce point, puisque la vision deviendrait encore moins distincte; des lunettes pourront seules améliorer l'état de la vue.

XXI. L'hypermétrope devenu presbyte éloignera les objets, de manière à les rapprocher du punctum proximum, autant que le permettront la nature du travail et l'état de l'acuité. Le sujet demandera de bonne heure des lunettes et les verres devront être d'autant plus forts que l'acuité sera plus mauvaise, que, par conséquent, la vision devra s'exercer à plus courte distance.

XXII. L'hypermétrope de degré élevé, possédant une amplitude d'accommodation considérable, supérieure en tous cas au déficit de la réfraction statique, sera conduit : 1° par la synergie qui existe entre la convergence et l'accommodation; 2° par le besoin d'avoir de grandes images, si l'acuité est mauvaise, ce qui est fréquent en pareil cas, — à placer les objets très près de l'œil, et à travailler à la façon des myopes, mais toujours en mettant au point, ce qui suppose un effort d'accommodation considérable, d'où asthénopie à la fois accommodative et musculaire, si la vision binoculaire est encore possible. Jamais ces sujets, même lorsque le rapprochement extrême rend la vision binoculaire impossible,

n'arrivent à placer les objets en deçà du punctum remotum, comme on serait tenté de le croire.

XXIII. Dans l'hypermétropie absolue, soit que l'accommodation se trouve diminuée par l'effet de l'âge, soit que le déficit de la réfraction statique atteigne un chiffre élevé, le sujet est conduit, pour voir de près, le moins mal possible, à placer les objets au voisinage du foyer antérieur de l'œil, et l'accommodation n'exerçant plus alors qu'une faible influence sur la grandeur des plus petits images qui peuvent être distinguées les unes des autres, il en résulte que si la vision est devenue monoculaire, l'hypermétrope ne se donne même pas la peine d'accommoder.

XXIV. Il n'en est pas de même dans la vision à distance; le sujet améliore notablement son acuité en compensant, le plus possible, son déficit de réfraction statique, par la mise en jeu de son aptitude d'accommodation.

F. — *Vision des myopes.*

XXV. Au delà du punctum remotum, la dimension des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil myope doit être d'autant plus considérable que la distance est plus grande. Inversement, la distance doit être d'autant plus petite que les objets sont plus petits.

XXVI. Pour les objets placés au delà du punctum remotum, l'acuité des myopes privés d'accommodation est d'autant plus mauvaise que la distance est plus grande, la pupille plus large, et l'amétropie plus élevée. Toutes choses égales d'ailleurs, cette acuité est supérieure à celle de l'hypermétropie de même degré.

XXVII. En deçà du punctum remotum, la dimension des plus petits objets pouvant être distingués les uns des autres par un œil myope privé d'accommodation, doit être d'autant plus considérable que ces objets se rapprochent davantage du foyer antérieur de l'œil. En pareil cas, l'acuité est d'autant plus mauvaise que la distance est moindre.

XXVIII. Il existe pour chaque œil myope privé d'accommodation, deux points placés à égale distance du punctum remotum, l'un

au delà, l'autre en deçà, pour lesquels un même objet présente le même degré de visibilité.

XXIX. Pour voir le mieux possible, le myope privé d'accommodation, doit placer les objets le plus près possible du punctum remotum, contrairement à ce qui a lieu pour l'hypermétrope, qui doit placer les objets au foyer antérieur de l'œil.

XXX. Si l'acuité est mauvaise et le punctum remotum éloigné (myopie faible), le sujet ne gagnerait rien à travailler de près, dans le but de grandir les images rétiniennes, car l'accroissement proportionnellement plus rapide des cercles de diffusion rendrait la vision moins bonne encore. En pareil cas, des verres convexes sont nécessaires pour le travail de près.

XXXI. Le myope de degré faible, possédant une amplitude d'accommodation suffisante pour permettre le travail de près, à la distance habituelle de la vision distincte, se comporte à peu près comme un emmétrope.

XXXII. Si l'amplitude d'accommodation est peu élevée, et la myopie comprise entre 2 et 5 d, le sujet placera l'objet au voisinage du punctum remotum. En pareil cas, la convergence des axes optiques n'entraîne pas nécessairement un effort d'accommodation.

XXXIII. Si la myopie est élevée et l'accommodation puissante (enfants), la convergence des axes optiques sollicitera la mise en jeu de la réfraction dynamique et le sujet placera les objets en deçà du punctum remotum. Il y sera conduit d'autant plus facilement que l'acuité sera moins bonne, et cela dans le but d'avoir de grandes images rétiniennes. Souvent alors le rapprochement des objets est tel, que la vision binoculaire devient impossible.

XXXIV. Cette exagération apparente de la myopie disparaît avec la perte du pouvoir d'accommodation. Ce fait, joint au rétrécissement de la pupille chez les vieillards (d'où moindre étendue des cercles de diffusion), probablement aussi à certaines modifications séniles, dans l'indice de réfraction moyen du cristallin, a donné lieu à cette croyance que la myopie diminue avec le progrès des années.

XXXV. Chez les myopes, l'acuité à distance, sans verres, dépend

uniquement, à myopie égale, du diamètre de la pupille ; elle est indépendante de l'acuité vraie, à moins que cette dernière ne soit extrêmement mauvaise et inférieure à l'acuité qui résulterait de la perte du pouvoir d'accommodation, dans un œil normal. Au contraire, chez l'hypermétrope, l'accommodation, même très réduite, suffit à mettre en évidence les différences d'acuité qui peuvent exister d'un sujet à l'autre.

G. — *Aphakie.*

XXXVI. La vision à distance (6 mètres) d'un œil primitivement emmétrope, privé de cristallin, est environ 150 fois plus mauvaise, toutes choses égales d'ailleurs, que celle du même œil pourvu de sa lentille, en l'absence de tout effort d'accommodation.

XXXVII. L'écart diminue avec la distance et, au voisinage du foyer antérieur, l'œil dépourvu de cristallin peut arriver à voir des objets presque aussi petits que l'œil normal, privé d'accommodation.

XXXVIII. L'acuité avec correction, d'un opéré de cataracte, est à peu près sans influence sur la distance à laquelle le sujet peut compter les doigts, à moins d'amblyopie prononcée. Cette distance dépend surtout du diamètre de la pupille; elle est d'autant plus grande que la pupille est plus étroite.

XXXIX. Toutes choses égales d'ailleurs, l'opéré de cataracte, primitivement myope, peut compter les doigts à une distance plus grande que celui qui était emmétrope; au contraire, l'œil hypermétrope ne peut les compter qu'à une distance moindre. Pour les degrés élevés d'amétropie, la différence est considérable.

H. — *Amétropie par anomalies du système réfringent.*

XL. Les formules établies pour l'amétropie axile, et les conclusions auxquelles elles donnent lieu, s'appliquent, à peu de chose près, à l'amétropie qui résulte d'une anomalie du système réfringent, ou qui dépend à la fois de ces deux causes.

LES

TEMPÉRATURES DE LA MER

DANS L'ESTUAIRE GIRONDIN ET A ARCACHON

En Décembre 1879 et Janvier 1880

PAR M. HAUTREUX

LIEUTENANT DE VAISSEAU

Les températures de l'air ont été observées au sémaphore de Bonne-Anse; celles de l'eau ont été notées aux points suivants: Cap-Finistère, Cap-Breton, Cordouan, Royan, Bordeaux et Arcachon.

Sémaphore de Bonne-Anse. — Les températures de l'air ont présenté :

En décembre, deux périodes au-dessous de zéro, d'une durée de 21 jours, avec minimum

à — 7°5 le 10
et — 8°5 le 27.

En janvier, également deux périodes au-dessous de zéro, d'une durée de 17 jours, avec minimum

à — 2°5 le 11
et — 7°5 le 20.

Les périodes au-dessus de zéro ont existé avec des vents du S.-S.-E. à l'Ouest.

Cap-Finistère. — La température de l'eau s'est maintenue :

En décembre 1879, de 13° à 12°;
En janvier 1880, de 12° à 11°5.

C'est la marche ordinaire des années précédentes. Les froids

persistants n'ont donc eu aucune action tangible sur cette partie de l'Océan.

Cap-Breton. — Les températures ont oscillé :

En décembre 1879, de 13° à 11°5;

En janvier 1880, de 11°5 à 10°.

La décroissance thermale, observée deux fois par jour, a été régulière, sans à-coup; les périodes de grands froids ont produit 1°5 à 2° d'abaissement sur la période correspondante de l'année précédente. Mais les oscillations aériennes journalières n'ont pas produit de résultats appréciables.

Cordouan. — On a noté, en décembre 1879, de 7°5 à 6°5; en janvier 1880, de 7° à 5°4. Le minimum est en retard de huit à dix jours sur le minimum aérien.

Pour ce même mois de décembre, on avait noté, dans les années précédentes :

1876..........	de 13°5 à 11°5;
1877..........	de 12°5 à 11°5;
1878..........	de 12° à 8°5.

Dans cette dernière année, l'abaissement à 8° a été la conséquence d'une période froide d'une quinzaine de jours, pendant laquelle les eaux de la rivière se sont abaissées jusqu'à + 2° devant Bordeaux.

Mais, en 1879, la rivière s'est abaissée à zéro à partir du 10 décembre, et les glaces ont charrié depuis le 15 décembre jusqu'au 5 janvier.

Dans cette même période, les paquebots notaient, au large des bancs, des températures égales à celles du Cap-Breton et du Cap-Ortégal, c'est-à-dire + 11°5 à + 12°5.

La température, à Cordouan, est donc liée à celle de la rivière; mais cette influence se produit par longues périodes, sans à-coup et régulièrement; les vents du Sud à l'Ouest, qui favorisaient les mélanges avec les eaux du large, n'ont pas produit de modifications

bien sensibles, à peine 1°. Le plateau de Cordouan est donc baigné par des eaux qui appartiennent plutôt au régime du fleuve qu'à celui du Golfe de Gascogne.

Royan. — Du 19 au 31 décembre 1879, les températures oscillent entre + 2° et + 5°5; le minimum vers le 27.

Du 1er au 31 janvier 1880, elles oscillent entre +2°5 et +5°; le minimum vers le 25. Les températures sont au degré près les mêmes à la surface et au fond. Les différences de la basse mer à la pleine mer n'atteignent pas 1°; et cependant les courants de marée ont une vitesse considérable. Dans la direction de la passe du Nord, ils parcourent, dans les six heures de jusant, 15 milles marins, et dans la direction de la passe du Sud, 11 milles, sur des fonds de 5 à 6 mètres de profondeur seulement.

On devait s'attendre à voir au flot les eaux du fleuve, mélangées avec celles de l'Océan, revenir avec une température se rapprochant beaucoup de celle du golfe, c'est-à-dire 10° à 11°. Il aurait dû y avoir entre les températures des basses mers, où l'on a noté seulement + 2°, et la température de la pleine mer correspondante, une oscillation thermale brusque et considérable pouvant aller à 8° ou 9°. C'est ce qui n'a pas eu lieu.

Il faut donc admettre que le mélange des eaux ne se fait que très incomplètement dans l'estuaire; que les eaux qui ont passé devant Royan pendant le jusant y sont ramenées pendant le flot, sans mélange appréciable, durant toute une marée, même avec les eaux qui environnent Cordouan, et que ces dernières, dans le jeu des marées, n'ont pas dépassé la limite des bancs et ont tourbillonné sur place; enfin, que les eaux du fleuve qui ont suivi la passe du Nord, ainsi que celles qui ont suivi la passe du Sud, reviennent sur elles-mêmes en suivant à peu près les mêmes chenaux, sans se confondre avec les eaux voisines du plateau de Cordouan.

Les bancs de l'embouchure paraissent marquer les limites de cet état tourbillonnaire.

Courants. — Il résulte, en effet, des travaux hydrographiques

de M. Manen, que si l'on suit une molécule d'eau partant de Royan avec le jusant par la passe du Nord, elle fera environ 15 milles vers le N.-O, avec des vitesses d'environ 3 milles, contournera vers l'Ouest et le Nord le banc de la Mauvaise, sa vitesse n'étant plus que de 1 mille, et reviendra dans le grand chenal en passant au Nord de Monrevel avec une vitesse de 2,5 milles, faisant au retour un parcours de 12 milles.

Une autre branche de courant contourne Monrevel par le Sud et traverse le plateau de Cordouan.

Par la passe du Sud, la molécule se dirigera vers le S.-O. avec une vitesse de 2,5 milles, contournera *Chevrier* par l'Ouest et le Nord avec 1 mille de vitesse, et, revenant vers l'Est, se dirigera vers les côtes de Soulac avec des vitesses de 2 milles.

Les différences des vitesses montrent clairement où devront avoir lieu les affouillements et les dépôts, dans l'une et l'autre passe.

Bordeaux. — Au commencement de décembre, la rivière était à + 5°; dès le 5 elle baisse encore, et atteint zéro vers le 10. Les glaces ont charrié depuis le 15 décembre jusqu'au 5 janvier; elles sont descendues jusqu'en rade de Richard. La rivière étant prise aux Bains Girondins, les observations n'ont pu être continuées pendant le mois de janvier, et la température fut de + 1° le 30. Il est évident que, pendant tout ce temps, les eaux de la rivière n'ont pu être supérieures à zéro et n'ont pas eu d'oscillations. Par suite, les fluctuations thermales éprouvées à Royan sont dues seulement à la descente plus ou moins considérable des glaces, liée elle-même aux marées de vive et de morte eau, mais l'état extérieur de l'embouchure n'a eu aucune action appréciable.

Arcachon. — Des faits analogues se sont produits à Arcachon. En décembre, on a observé des températures inférieures à 3° depuis le 9 décembre jusqu'au 31. Les oscillations sont nombreuses et ont atteint zéro quatre fois.

Donc, pendant vingt jours, la température de l'eau a été inférieure de 10° à 12° à celle du Golfe, près des côtes.

La rade n'est éloignée des passes que de 6 milles; l'influence de la marée s'est fait sentir et s'est traduite par une hausse de + 2° au moment de la pleine mer, dans les journées où à basse mer l'eau avait atteint zéro. Or, à marée basse le bassin se vide presque entièrement, les courants y sont aussi rapides qu'à Royan; les deux tiers de la masse des eaux du bassin dépassent le goulet et sont en présence de l'Océan au moins pendant six heures. La différence thermale est de 10° à 12°, et cependant le mélange ne se fait que difficilement s'il n'est opéré par les vents du large. Dans ce dernier cas, les températures se relèvent rapidement. Ainsi, sans coup de vent, faible introduction des eaux du large.

Il semble donc que les eaux sorties du bassin avec le jusant tourbillonnent aux environs du goulet, et, rentrant avec le flot, n'amènent à chaque marée qu'un faible contingent d'eaux nouvelles de provenance océanique.

De cette étude il semble ressortir que les eaux des fleuves et rivières à marée, en tombant dans l'Océan, y perdent leur vitesse, et, par conséquent, déposent les troubles qu'elles charrient, mais ne se mêlent que difficilement avec les eaux de la mer et paraissent tourbillonner sur place, à la limite qu'indiquent ces dépôts. Bien que des différences considérables de salure et de température viennent s'ajouter aux causes évidentes qui sollicitent les mélanges, il est nécessaire que les vents interviennent comme moteurs énergiques pour remuer ces masses : les courants n'y suffisent pas. Sous cette dernière influence, les eaux paraissent se cantonner dans des lits différents, qu'indiquent les accidents du ond, en y conservant une indépendance relative.

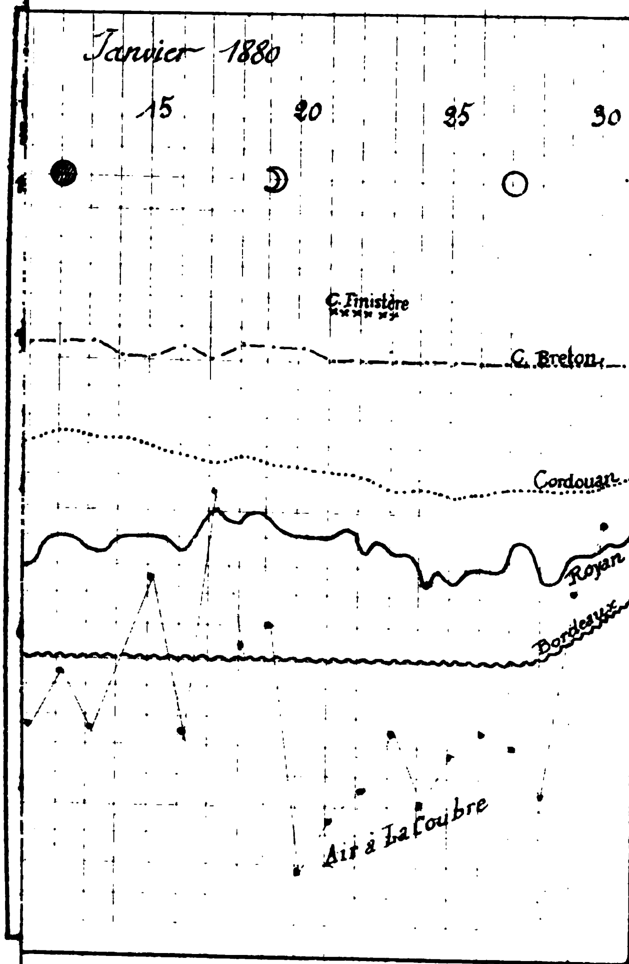
Les marées, en renversant les courants, détruisent la force vive d'écoulement des fleuves et ne permettent pas à leurs eaux de conserver une action qui s'étende loin du rivage.

(Voir tableau d'autre part.)

TABLEAU DES TEMPÉRATURES DE LA MER

DÉCEMBRE 1879								
DATES	C. FINISTÈRE	C. BRETON 8 h. matin	CORDOUAN P. M.	ROYAN 8 h. matin	ARCACHON 8 h. matin	BORDEAUX Rivière	AIR (La Coubre)	VENTS
1		13°	7°5		6°	5°	— 0°5	E
2	12°5	13	7.5		7	5	— 2.5	E
3		13	7.5		7	5	0	E
4		13.5	7.5		7	5	+11.5	S-O
5		13	7.5		6	4	+ 2	N-E
6		12.5	7.8		6	4	+ 6	N-O
7	13	12.5	7.5		5	3	— 4	E-N-E
8		12	7.5		4	2	— 6.5	E-N-E
9		12	7.5		4	1	— 2	E
10		12	7.2		0	0	— 7	E-N-E
11		13	7.5		1	0	— 6	E
12		13	7.6		0	0	— 6.5	N-E
13		12.5	7.2		2		— 1	N-E
14		12	7		2		— 5.5	N-E
15		12	6.5		2	La rivière charrie des glaces. — Navigation interrompue.	— 5.5	N-E
16		12	6.5		2.5		— 6.5	E
17	13	12	6.2		3		— 5	N-E
18		12	6.2		1		— 2.5	N-E
19		12	6.2	4°	0		— 5.5	N-E
20		12	6.2	3	2.5		— 2.5	E-S-E
21		12	6.5	3.5	2		+ 1.5	E-S-E
22		12	6.5	2.5	1		+ 1.5	E-S-E
23	13	12	6.8	3	1		— 5	E-N-E
24		12	6.8	3	1.5		+ 0.5	E-S-E
25		11.5	6.8	2.5	0		— 3.5	E
26		11.5	6.8	2.5	0.5		— 4.5	E
27		11.5	6.8	2	0.5		— 8.5	N-E
28		11.5	6.8	3	1		+ 1.5	S-E
29		11.5	7	5	2		+ 4.5	S-S-O
30	12.5	11.5	7	5.5	2		+ 5	Ouest

JANVIER 1880								
DATES	C. FINISTÈRE	C. BRETON 8 h. matin	CORDOUAN P. M.	ROYAN 8 h. matin	ARCACHON 8 h. matin	BORDEAUX Rivière	AIR (La Coubre)	VENTS
1		11°5	7°	5°		La rivière charrie.	+ 8°8	Ouest
2	12°5	11.2	7.2	4			+ 8.5	S-O
3		11	7.4	4			+ 7.8	S-O
4		10.8	7.2	4			+ 1	E
5		10.5	7.2	4			+ 1.1	N
6		10.5	7.0	4.5	7°5		+ 1.7	N-E
7		10.5	7.6	4.5	10(?)	La navigation reprend.	+ 2	E
8		10.5	7.4	4	6		— 1	S-E
9		10.5	7	4	3		— 0.5	E
10		10.5	6.8	3	4		— 1.4	E
11		10.5	7.2	3	4.5		— 2.2	E
12		10.5	7.4	4	4.2		— 0.5	S-E
13		10.5	7.2	3.5	4.5		— 2.2	E
14		10	7.4	4	4.2		0	N-E
15		10	7	4	5		+ 2.8	N-E
16		10.5	6.8	3.5			— 2.8	O
17		10	6.6	5			+ 5.5	S
18		10.5	6.8	4.5			+ 0.2	S-E
19		10.5	6.6	4.5			+ 1	E
20		10.5	6.4	4			— 7.2	E
21		10	6.2	4			— 5.3	E
22	11.5	10	6.0	3.5			— 4.4	E
23		10	5.6	3.5			— 2.5	N-E
54		10	5.6	2.5			— 5	E
25		10	5.4	2.5			— 3.1	S-E
26		10	5.6	3			— 2.5	E
27		10	5.8	4			— 2.9	Calme
28		10	5.8	2.5		0	— 4.6	Calme
29		10	5.8	3.5		1	+ 2.6	S-E
30		10	6.0	4		1	+ 4.8	S-E



a — Cap Finistère — Espagne
Cap Breton — 8h m. et 4h s.
Cordouan — Pleine mer
Royan — 8h m. et 4h s.
Arcachon — 8h m. et 4h s.
Bordeaux — 8h m. et 4h s.

1[illegible]

1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
16
1[illegible]
1[illegible]
1[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
2[illegible]
3[illegible]

DES OS

ET DE LEUR EMPLOI

DANS LA FABRICATION DU NOIR ANIMAL, DU SUIF, DU SULFATE D'AMMONIAQUE DES BOUTONS, ETC.

PROCÉDÉS NOUVEAUX

PAR M. HUYARD

Fabricant de Produits chimiques, inventeur du nouveau four système Huyard pour la distillation des os, bois à tourbes.

A la suite d'une inspection officielle faite dans notre établissement à Bordeaux, le Conseil d'hygiène et de salubrité publique du département de la Gironde avait présenté à M. le Préfet un rapport explicatif sur un nouveau système de calcination des os dû à notre invention. Ce rapport, accompagné d'une lettre de M. le Préfet à M. le Maire de Bordeaux, nous a été notifié par les soins de l'Administration municipale ; il conclut ainsi :

« Vu l'importance de cette nouvelle invention, il serait utile de » recommander à l'attention du Conseil supérieur de salubrité, » à Paris, ce nouveau mode de calcination, afin d'engager les » industries déjà existantes et celles qui pourraient se créer à » prendre pour modèle le *système Huyard*, qui a le grand avan- » tage de faire disparaître d'une manière absolue les odeurs infectes » qui rendent si désagréable le voisinage des usines à calcination » d'os. »

Ce vœu du Conseil d'hygiène de la Gironde a été transmis à Paris, et l'un des inspecteurs des établissements insalubres de la Seine, M. A. Gérardin, docteur ès-sciences, agrégé de l'Université, est venu ensuite à Bordeaux pour examiner notre procédé et se rendre compte de son fonctionnement. A son arrivée à Paris, il nous a adressé une lettre de félicitations, en nous engageant vivement à propager notre procédé.

Depuis longtemps, le Conseil supérieur, ainsi que les Conseils

de salubrité des départements où l'industrie du charbon d'os est installée, se sont émus des plaintes nombreuses dont cette fabrication est l'objet; par suite ils deviennent des plus réservés dans la délivrance d'autorisations pour ce genre d'exploitation.

Ayant été en mesure d'expérimenter successivement dans notre établissement les systèmes employés jusqu'à ce jour, dont nous donnons plus loin un aperçu, nous ne pouvons nous empêcher de reconnaître que ces plaintes sont la plupart du temps fondées, et qu'elles reposent sur les vices inhérents à ces modes de fabrication, que tous nos efforts ont tendu à modifier radicalement dans l'intérêt général. Nous n'insisterons pas sur l'importance qu'il y a pour une de nos industries nationales à ne pas être entravée par des plaintes fréquentes.

Un autre point capital qu'il ne faut pas perdre de vue, c'est que dans toute fabrication, le devoir, l'intérêt plutôt de l'industriel lui commande, une fois la matière acquise, d'en tirer, par tous les moyens en son pouvoir, le plus de produits possible, c'est-à dire de lui faire rendre tout ce qu'elle peut donner à l'industrie.

Cet axiome, qu'il paraît puéril de développer, n'en est pas moins, sinon incompris, du moins négligé par bon nombre de nos confrères. Dans notre industrie spécialement, il n'en est pas moins vrai que les 19/20 des fabricants de noir animal en France savent parfaitement qu'ils pourraient retirer de la matière première, c'est-à-dire des os entrant dans leur usine, non seulement du suif et du noir animal, mais encore des goudrons, des sels ammoniacaux et du gaz d'éclairage, produits d'une valeur relativement considérable, comme nous le démontrerons par des chiffres à l'article *noir animal,* et qu'ils abandonnent à leur cheminée, incommodant leurs voisins, en se privant eux-mêmes d'un revenu important. D'où vient alors que jusqu'à présent les industriels se sont tenus sur la réserve ? Il faut, croyons-nous, en chercher la cause uniquement dans l'impossibilité où ils se sont trouvés de se procurer, pour l'extraction de ces produits, des appareils pratiques leur donnant toute satisfaction.

Nous devons l'avouer, nous sommes restés nous-même quelque

temps dans cette incertitude, et ce n'est que poussé par le vif désir d'arriver au but en faisant progresser notre industrie, que nous nous sommes mis au travail et qu'après plusieurs années nous avons réussi dans nos recherches.

Deux années nous séparent à peine du moment où nous avons pu en toute sécurité faire démolir nos anciens fourneaux et les remplacer par notre système, qui nous a donné depuis ce moment entière satisfaction.

Ces résultats à peine connus, nous étions assailli de demandes de renseignements d'un grand nombre de fabricants de France et de l'Etranger, et aujourd'hui à Paris, Bruxelles, Buenos-Ayres, Nantes, Tours, Bayonne, Bordeaux, Troyes, nos confrères se servent de nos nouveaux procédés.

Plusieurs savants de Paris et des départements nous ont honoré de leurs visites et sont venus constater les progrès réalisés.

Divers rapports favorables ont été faits à la suite de ces visites, notamment par la Société centrale d'Hygiène de France, siégeant à Paris.

Un arrêté du Préfet de police a été pris en faveur de notre système de condensation des vapeurs.

Enfin, après une médaille de vermeil obtenue à l'Exposition industrielle d'Angoulême, le Jury international de l'Exposition universelle de 1878 nous a décerné la médaille d'or dans le groupe des arts chimiques, et la Direction du Conservatoire des arts et métiers a choisi notre appareil pour figurer comme objet d'études dans son musée.

Toutes ces circonstances nous ont déterminé à grouper et exposer dans les notes qui vont suivre, les différentes transformations subies par les os, en indiquant les moyens ou modes de fabrication des produits qui en dérivent et qui nous semblent, non seulement donner satisfaction aux justes exigences des Conseils de salubrité, mais surtout devoir procurer aux fabricants de noir animal des produits supérieurs et des rendements dont la plupart d'entre eux se sont trouvés volontairement privés jusqu'à ce jour.

Nous n'avons d'autre ambition que de grouper en les complétant les éléments de fabrication pratiques dont une partie sont épars dans les ouvrages de chimie industrielle.

Structure et composition des os.

En général, tous les os d'animaux peuvent être utilisés dans la fabrication du noir, bien que leurs propriétés décolorantes diffèrent dans une proportion quelquefois sensible.

L'os gras frais, c'est-à-dire provenant soit de la boucherie, soit des ménages ou hôtels, après avoir servi à l'usage culinaire, contient environ pour cent : 32 de tissus fibreux, 9 d'eau, 8 de graisse, 1 d'albumine, vaisseaux, etc., 38 de phosphate de chaux, 8 de carbonate de chaux, 2 de divers sels de sodium et potassium et 2 de matières étrangères.

Nous classerons comme suit, par ordre de richesse décolorante et d'après les analyses chimiques, les os d'animaux presque exclusivement employés dans la fabrication du noir animal. Nous ajouterons en regard la proportion approximative dans laquelle ces os entrent aujourd'hui dans l'industrie, nous basant pour l'établir sur les abattages, la consommation moyenne en France et leur réception dans les usines :

Os de bœufs et vaches, par 100 kil. environ.....	60
Os de veaux................................	7
Os de moutons..............................	14
Os de cochons..............................	7
Os d'agneaux, poulets, chevaux, etc............	12
	100

On divise en plusieurs catégories les os de bœufs et vaches reçus dans les fabriques, savoir :

Les os de la tête et les cornillons, plus spécialement employés à la fabrication des colles fortes et gélatines ;

Les fémurs, tibias, côtes, mâchoires et omoplates réservés à la tabletterie ;

Les pieds ou sabots, dont on a enlevé la corne en les faisant

tremper dans de l'eau chaude, servant à la production de l'huile de pied de bœuf;

Les os gras comprenant tous ceux qui sont assez frais pour en pouvoir extraire le suif, de quelque animal qu'ils proviennent;

Enfin, les os ne pouvant servir qu'à la carbonisation.

Lieux de production. — Valeur.

Les os employés ou reçus en France proviennent de la boucherie, des abattoirs, des hôtels, restaurants et ménages, des boues et bourriers des villes, des équarrissages et enfin de l'étranger, c'est-à-dire principalement de l'Espagne, de l'Amérique du Sud et aussi, mais en petite quantité, de l'Italie et des colonies françaises. Il est assez difficile, sinon impossible, de déterminer la proportion dans laquelle ces derniers entrent dans l'industrie; il faudrait se livrer, pour atteindre ce but, à une statistique minutieuse dans les ports d'arrivée et surtout auprès des Compagnies de chemins de fer qui en reçoivent aux frontières; ces éléments nous manquent; mais cependant nous croyons pouvoir évaluer l'importation étrangère à 10 °/₀ environ de notre consommation.

La valeur des os, gras ou secs, ne diffère pas de beaucoup. Leur prix en temps normal est de 9 à 11 fr. les 100 kilos dans le Midi, et de 11 à 13 fr. dans le Nord, cette différence de 2 fr. représentant la différence du transport. Cette matière a été payée jusqu'à 16 et 18 fr. les 100 kilos, de même qu'elle est descendue à 5 et 6 fr.; mais ces prix exagérés en hausse ou en baisse se maintiennent fort peu de temps et ne se représentent que très rarement et dans des circonstances exceptionnelles.

Triages des os.

Suivant leur provenance et leur qualité, les os sont employés à des usages différents. Pour en finir avec ceux introduits de l'étranger, disons tout de suite qu'ayant longtemps séjourné en terre ou ayant été exposés aux intempéries, ils ne sont propres qu'à la carbonisation.

Les os provenant des triperies ou abattoirs sont les têtes et les pieds. Ceux de la boucherie sont frais et crûs, et ceux des hôtels, des ménages ou trouvés dans les bourriers des villes ont servi à l'usage culinaire.

A leur arrivée à l'usine, on doit immédiatement procéder au triage des os des abattoirs et de ceux de la boucherie. C'est l'intérêt immédiat de l'industriel, et cette manière d'opérer est indispensable pour éviter la décomposition, qui, en diminuant le rendement du suif, altère sa qualité et répand dans l'atmosphère des odeurs putrides.

Les mâchoires, côtes, omoplates et fémurs de bœufs et vaches, qui se trouvent dans une proportion de 6 à 8 % environ, sont mis de côté et dans les vingt-quatre heures passés à la chaudière ouverte, où ils subissent un dégraissage superficiel qui permet d'enlever facilement les viandes et nerfs qui y adhèrent. Après cette opération, ces os peuvent être conservés en magasin, sans crainte d'odeur, pour être livrés ensuite à la tabletterie sous le nom d'os de travail.

Os de travail. — Les os les plus recherchés pour la tabletterie sont les fémurs et tibias de bœufs et vaches, qui servent à la fabrication des objets dits d'ivoire, tels que porte-plumes, ornements de voiture, manches de couteaux, brosses à ongles et à dents, etc., etc. Leur valeur varie entre 30 et 35 fr. les 100 kilos rendus aux usines et dépouillés des bouts poreux facilement enlevés par la scie. Les fémurs et tibias de chevaux sont peu estimés et se paient de 20 à 25 fr. les 100 kilos.

Les côtes, mâchoires et omoplates servent spécialement à la confection des boutons d'os. Leur consommation est très importante. Leur valeur est de 15 à 18 fr. les 100 kilos depuis quelques années.

Cette baisse est due à l'introduction en Europe du *corosos* ou ivoire végétal, fruit très dur d'un arbre du Pérou et dont l'importation constitue une concurrence redoutable pour les os, qui ne s'emploient plus guère que pour la fabrication des boutons de qualité ordinaire.

Fabrication du suif d'os.

Les os impropres à la tabletterie doivent être triés avec le plus grand soin, si l'on veut obtenir des suifs de belle qualité et en quantité abondante. Ceux de la boucherie et même ceux qui ont déjà servi à l'usage culinaire et qui ont été fraîchement cuits servent à faire des suifs presque blancs, épurés, pour graissage de machines à vapeur et la fabrication des savons marbrés dits de Marseille.

Ceux qui sont sales ou vieux, de même que les têtes de bœufs, moutons et veaux provenant des abattoirs, sont dégraissés après avoir subi un lavage à grande eau dans l'autoclave même, lavage qui leur enlève la terre et le sang qui bruniraient considérablement la graisse obtenue. Cette graisse ou suif brun est employée au graissage des wagons et charrettes et aussi à la fabrication des savons ordinaires.

Les os secs, qui ne sont bons qu'à la calcination et qui par conséquent n'exhalent aucune mauvaise odeur, sont mis en magasin ou en pile, en attendant d'être employés dans les fours.

Enfin on trouve encore parmi les os, des ferrailles, verre, chiffons, cornes et onglons, croûtons de pain, etc. Les ferrailles, verres et chiffons sont vendus aux fondeurs de métaux, verriers et fabricants de papier, à des prix variant entre 6 à 10 fr. les 100 kilos. Les cornes et onglons sont livrés aux fabricants de peignes qui leur font subir une préparation spéciale et les transforment, suivant leur qualité, en peignes à décrasser, peignes fins, boutons, etc. Les rebuts de ces cornes et onglons, connus sous le nom de cornailles ou rognures de cornes, constituent un engrais très fertilisant et vendu comme tel après torréfaction et pulvérisation. Cette torréfaction s'obtient par différents procédés sur lesquels nous donnerons plus tard des détails intéressants, ces opérations étant l'objet en ce moment d'études et d'améliorations de notre part.

Les croûtons de pain, qui semblent de prime-abord un embarras pour l'industriel et dont il paraît oiseux de parler, sont cependant

très recherchés dans certaines localités qui les apprécient et forment une nourriture très saine et très délicate pour l'élève de la volaille et des porcs. Les sujets de basse-cour, nourris au pain trempé dans l'eau chaude, se développent promptement et leur chair acquiert une blancheur remarquable et un goût exquis.

Le triage terminé, les gros os gras sont broyés ou plutôt seulement cassés par un appareil spécial, opération qui permet d'offrir à l'action de la vapeur une plus grande surface pour l'extraction de la graisse.

Les avis sont très partagés sur la façon de diviser les os avant le dégraissage. Plusieurs fabricants, pour en extraire un peu plus de suif, les font broyer presque en grumeaux ; nous croyons que c'est un tort et que cette opération nuit à la qualité du noir, précisément parce qu'elle permet à la vapeur d'attaquer trop fortement l'os et en quelque sorte de le détériorer. Si le cassage à la hache, pratiqué avant l'invention des broyeurs, et encore employé dans quelques petites fabriques, n'entraînait pas une main-d'œuvre aussi coûteuse, ce serait incontestablement le meilleur système, car l'ouvrier pourrait, suivant la nature de l'os, le fendre dans le sens le plus propre à laisser passer la graisse.

Autoclave Papin modifiée. — Le meilleur mode de dégraissage connu et, on peut ajouter, pratiqué par la généralité des fabricants de suifs d'os, consiste dans l'emploi de l'autoclave Papin plus ou moins ingénieusement modifiée.

L'autoclave dont nous nous servons est une chaudière en tôle épaisse de forme cylindrique, ayant 1 mètre 20 de haut sur 80 centimètres de diamètre, reposant sur trois pieds scellés dans le sol et munie d'un panier de même forme, en tôle mince, troué et destiné à recevoir les os. Ce panier, qui est concentrique à la chaudière, peut contenir de 350 à 400 kilos et permet à l'eau de circuler librement et à la graisse de monter à la surface pendant l'ébullition. La chaudière est également munie d'un couvercle en tôle épaisse ou fonte sur lequel est adaptée une soupape de sûreté, et d'un manomètre indiquant le degré de pression contenu dans l'autoclave.

Après avoir rempli le panier d'os d'une même qualité, on introduit un jet de vapeur qui porte à l'ébullition l'eau contenue dans la chaudière.

A ce moment on couvre la chaudière, on boulonne à fond le couvercle, et la vapeur est augmentée jusqu'à ce que la soupape de l'autoclave, qui est réglée à une atmosphère, se lève sous l'influence de la pression intérieure. La vapeur est immédiatement arrêtée et celle qui se trouve dans la chaudière se condense promptement. Deux heures après, la vapeur n'ayant plus aucune force de pression, ce dont on peut facilement se rendre compte en soulevant la soupape, le couvercle est déboulonné et l'ouvrier enlève tout le suif qui surnage, au moyen d'une cuillère de forme spéciale. Ce suif est mis au repos pour être coulé au clair après le dépôt des crasses. L'eau contenue dans l'autoclave peut servir deux ou trois fois et est expulsée ensuite par un robinet placé au fond de l'appareil. L'opération terminée, on enlève le panier qui contient les os au moyen d'une grue tournante qui est affectée au service des chaudières, et après les avoir fait égoutter un moment au-dessus de celles-ci, on déverse les os sur le sol en faisant basculer le fond du panier qui n'est retenu que par une clavette.

Les paniers sont rechargés et l'opération recommence. Sa durée totale est de quatre heures.

Les eaux grasses, c'est-à-dire ayant servi au dégraissage des os, sont très fertilisantes. Les industriels dont l'usine est installée en pleine campagne, pourraient les vendre pour l'arrosage des prairies; mais leur valeur étant très minime relativement, les fabricants dont l'usine se trouve dans les villes sont obligés de les jeter aux égouts.

Les os dégraissés n'offrent plus d'odeur incommode ou insalubre. Quand on a la facilité, comme nous, de les étendre sur des séchoirs chauffés par la chaleur perdue des carnaux des chaudières et des fours, ils peuvent être carbonisés dans les vingt-quatre heures; si ce moyen fait défaut, on les met en pile pour les faire sécher par la fermentation.

Cette dernière opération doit être évitée, car la fermentation amène à sa suite des émanations qui, par les fortes chaleurs, deviennent incommodes.

Tel est le mode de dégraissage que nous employons et que nous avons reconnu le plus avantageux et offrant toute garantie à l'hygiène publique. Malheureusement tous les fabricants ne l'emploient pas.

Nous constatons même à regret que plusieurs petits industriels établis principalement aux environs des grandes villes se livrent au dégraissage des os dans des chaudières en cuivre chauffées par le bois ou le charbon, à l'exclusion de la vapeur, souvent sans les couvrir, et infectent le voisinage par les exhalaisons putrides occasionnées aussi par le déversement des eaux grasses dans des trous pratiqués dans le sol. Ces trous ou puits artificiels sont bien vite pleins, et on peut juger des dégagements qu'ils répandent dans l'atmosphère.

Gélatine et Colle d'os.

Quelques fabricants, après l'opération du dégraissage, se livrent à la fabrication de la gélatine ou colle, en soumettant de nouveau les os à l'action de la vapeur à très haute pression dans des autoclaves analogues et obtiennent, par ce procédé, de la gélatine dans une proportion de 15 °/₀ environ.

Les os qui ont été privés de leur graisse et de leur substance gélatineuse s'emploient encore également dans la fabrication du noir animal, mais ne produisent qu'une qualité très inférieure relativement peu décolorante; aussi la plupart des raffineurs ne veulent-ils employer que des noirs vendus garantis non dégélatinés.

Calcination des os.
(Systèmes connus.)

L'introduction du noir animal dans la fabrication et le raffinage des sucres date de 1813. Depuis cette époque, cette industrie a pris un développement extraordinaire, et aujourd'hui on compte

en France seulement plus de cent usines dont la production sert non seulement à notre consommation intérieure, mais encore, dans une large proportion, à celle de l'Angleterre, de la Hollande, de l'Allemagne et de nos colonies sucrières des Antilles.

Les départements qui possèdent les usines les plus importantes pour la carbonisation des os sont ceux de la Seine, du Nord, de la Loire-Inférieure, de la Gironde, des Deux-Sèvres, du Pas-de-Calais, etc.

Quel que soit celui des systèmes employés, le criblage des os avant la carbonisation permet de retirer une poudre d'os ou poussière qui existe toujours en plus ou moins grande quantité.

Cette poussière, composée de déchets d'os, de viande, de sang, poils, etc., est vendue telle quelle, pour servir à la confection des engrais organiques ou animalisés. Son analyse chimique donne, en moyenne, 4 à 5 % d'azote et 10 à 12 % d'acide phosphorique, représentant 23 à 25 % de phosphate de chaux tribasique.

La valeur de ces déchets équivaut à peu près au prix des os, c'est-à-dire de 10 à 12 francs les 100 kilos.

A la rigueur, on pourrait carboniser les os, comme le font certains fabricants, en y laissant ces poudres; mais non seulement elles augmenteraient dans une large mesure la durée des opérations, mais encore elles ne donneraient qu'un rendement minime, les déchets de viande, cornes, poils et sang qui en forment la plus grande partie, se décomposant intégralement à la température nécessaire à la carbonisation de l'os.

Fours à pots où Marmites.

(Domaine public.)

Ce procédé de calcination est le premier qui ait été employé, et on peut ajouter qu'il fut le seul pendant près de quarante ans. Ce moyen consiste dans l'emploi de pots cylindriques en fonte ou en terre réfractaire de même composition que celle des cornues à gaz. Les pots sont de dimensions variables et suivant leur grandeur contiennent de 15 à 25 kilos d'os. Une fois remplis, ils sont lutés à la terre et placés en rangées horizontales, dans de grands fours

dont la forme se rapproche un peu des fours de boulangerie, les pots sont empilés les uns sur les autres au nombre de 2 à 6 ou placés un à un et clos par un couvercle de fonte. Dans le premier cas, il n'y a que la marmite de dessus qui est munie d'un couvercle, chacune des autres se trouvant fermée par le pot supérieur.

Ces fours sont divisés en compartiments ou chambres qui permettent de les refroidir séparément avant le défournement. Une ouverture ou porte en tôle ou fonte placée à l'axe de chaque compartiment sert au passage des pots. Immédiatement au-dessous de cette porte, une bouche à feu avec foyer et grilles sert au chauffage.

Le calorique pénètre dans la chambre des pots par des ouvertures établies entre la voûte du foyer et le sol de la chambre. Des lucarnes pratiquées dans l'épaisseur de la maçonnerie permettent aux ouvriers de suivre les opérations et de surveiller le degré de chauffage intérieur.

Une fois chargés, les fours sont chauffés graduellement au bois ou à la houille et la température portée au rouge cerise. A partir de ce moment, les gaz des os contenus dans les pots s'échappent par les interstices des couvercles, se décomposent, brûlent et contribuent à entretenir le calorique jusqu'à la fin de l'opération qui dure de 6 à 8 heures. Quand la température intérieure de la chambre se trouve suffisamment abaissée par le refroidissement, on procède au défournement à l'aide de tiges à crochets en faisant glisser les pots jusqu'à l'entrée des fours d'où on les enlève avec soin. Ils sont lutés de nouveau à la terre pour éviter le contact de l'air extérieur qui ferait blanchir le charbon et le rendrait impropre à la décoloration. Dans certaines usines il se fait deux ou trois opérations successives pendant le jour; mais presque partout les fours chôment la nuit.

Avantages et inconvénients. — Le grand et on peut le dire le seul avantage de ce vieux système consiste dans la qualité généralement bonne et régulière du charbon; mais elle n'est cependant obtenue qu'à la condition d'avoir des ouvriers intelli-

gents qui puissent en surveiller la cuisson, ce qui n'est pas toujours facile, vu la grande division des os à calciner qui peuvent se trouver plus ou moins secs dans les pots placés dans la même chambre.

Les inconvénients consistent dans une main-d'œuvre considérable vu la quantité des pots à remplir, enfourner, défourner et vider. Les réparations sont fréquentes et coûteuses par suite des changements continuels de température et des refroidissements inévitables qui altèrent les briques, les voûtes et les pots en fonte. Les marmites ne peuvent durer qu'une année en moyenne; c'est donc un matériel important à remplacer fréquemment.

Au point de vue de l'incommodité, il est facile de comprendre que si ces fours ne répandent pas de fumée dans les ateliers parce qu'ils sont bien clos, ils infectent néanmoins le voisinage, car les gaz non épurés, c'est-à-dire chargés d'ammoniaque et de goudron, tels qu'ils se dégagent de la décomposition des os, ne pouvant se brûler qu'incomplètement par suite du peu d'accès de l'air dans les chambres, se rendent dans la cheminée d'où ils se répandent aux alentours de l'usine. Enfin les vapeurs ammoniacales si abondantes dans les os sont incombustibles dans ces conditions et leur valeur est perdue pour le fabricant qui, en ne les recueillant pas, se prive d'un revenu considérable et enlève à l'agriculture un auxiliaire puissant pour la végétation.

Four système Brison.

(Domaine public.)

Jusqu'en 1860, le système des pots a été à peu près exclusivement employé à la calcination des os, mais les fabricants de noir animal, surchargés de frais occasionnés par la main-d'œuvre et le renouvellement incessant de leur matériel, retiraient peu ou point de profits de leur industrie. Aussi, quand, à cette époque, M. Brison prit un brevet pour un four à carboniser les os, la tourbe, etc., les fabricants, en grand nombre, s'empressèrent-ils de l'adopter.

A cet effet, ils adressèrent à Paris et dans les départements des

demandes à l'administration, qui chargea MM. les membres des Conseils d'hygiène et de salubrité de donner leur avis sur ce nouveau mode de fabrication. Mais, il faut bien le dire, les industriels aspirant après un nouveau système qui pouvait leur offrir une certaine économie de main-d'œuvre, de combustible et de matériel, firent miroiter aux yeux des Conseils la supériorité de ce procédé, laissant un peu trop de côté la question d'incommodité pour le voisinage.

Quoi qu'il en soit, les autorisations furent accordées, et ces fours se propagèrent promptement. Comme nos confrères, nous l'avions adopté.

Le système consiste dans l'emploi de grands tubes en terre réfractaire contenant 60 kilos d'os, placés les uns vis-à-vis des autres dans des fours de forme carrée et chauffés par une ouverture pratiquée dans l'axe du mur de façade. La partie supérieure du tube ou cornue est munie d'un couvercle noyé dans un bassin de sable, et au bas de l'appareil est adapté un tampon à bascule qui laisse passer pendant le cours des opérations tous les gaz impurs, tels qu'ils s'échappent à la décomposition de la matière organique pour brûler dans le four où ils pénètrent par des trous pratiqués dans la maçonnerie extérieure, au-dessous et vis-à-vis des tampons. Ces gaz qui circulent dans le vide, de chaque côté, ne pénètrent dans la chambre du fourneau qu'appelés par le tirage intérieur des cheminées, très souvent contrarié par les perturbations atmosphériques.

Or, il est facile de comprendre qu'au plus fort de l'opération, quand les vapeurs s'échappent des cornues et arrivent en grande abondance par les ouvertures pratiquées dans la maçonnerie, les gaz impurs, tels qu'ils proviennent de la décomposition des os, s'enflamment sous le tampon même, et répandent dans l'intérieur de l'usine des fumées noirâtres, infectes, prenant à la gorge, qui font des établissements employant ce système un foyer d'incommodité au premier chef.

La cuisson, par ce système, dure quatre heures environ et la consommation de houille est d'environ 40 kilos par tube et par jour.

Quand la carbonisation est terminée, ce dont on peut se rendre compte quand les gaz ne brûlent plus sous le tampon, on fait manœuvrer celui-ci et le charbon tombe dans des réservoirs en tôle où il refroidit à l'abri de l'air. Les fours marchent jour et nuit.

Avantages et inconvénients. — Le seul avantage marqué de ce système consiste, nous l'avons dit au début, dans une économie notable de main-d'œuvre et de combustible sur celui des pots. Les inconvénients sont nombreux. Les charbons obtenus ne sont pas d'une qualité régulière, à moins d'une surveillance incessante qu'on ne peut pas toujours obtenir, la nuit surtout. Le charbon doit être défourné aussitôt que les gaz s'affaiblissent, car si l'ouvrier laisse la matière carbonisée quelques minutes de plus au four, l'air froid qui circule sous les bouchons s'introduit facilement dans la cornue et fait grisonner, puis blanchir le charbon.

De même qu'avec les pots, les produits ammoniacaux et les goudrons sont perdus pour l'industrie dans ce système. Les pièces de fonte de la partie inférieure du four, léchées continuellement par les flammes, se voilent d'abord, puis se brûlent et doivent être renouvelées périodiquement ainsi que les cornues, qui se brisent lors du changement des plaques et supports sur lesquels elles reposent. Les usines employant les deux systèmes de four que nous venons de décrire sont classées dans la première catégorie des établissements insalubres.

Dans ces dernières années, quelques fabricants de noir animal, en petit nombre, et à l'étranger, désireux d'utiliser les produits ammoniacaux, et en l'absence de systèmes connus, se sont adressés à des ingénieurs qui ont monté chez eux des fours d'essai identiques à ceux employés dans les usines à gaz. Ce moyen, très pénible pour les ouvriers, coûteux et compliqué par la diversité et l'importance des appareils, a le grand inconvénient de produire un charbon très défectueux, le défournement s'opérant très lentement par suite de la position horizontale des cornues.

L'emplacement qu'occuperaient de tels fours serait considérable, car on ne peut placer plus de cinq cornues dans chacun d'eux.

Les tuyaux de dégagement s'encrasseraient à tout moment, par suite de la pression qu'on ne peut éviter dans les cornues par l'emploi de ce système. En un mot, l'emploi des moyens utilisés pour la distillation de la houille est impraticable pour la fabrication du noir animal par la distillation.

Distillation des os.

(Système HUYARD, breveté s. g. d. g.; propriété privée.)

Les graves inconvénients que nous venons de signaler, et dont nous avons été longtemps victime, nous ont engagé à chercher un moyen pratique de les faire disparaître.

En dehors du vif désir que nous avions de faire progresser notre industrie, nous avons été stimulé par les hauts prix atteints depuis quelques années par les sels ammoniacaux, qui se trouvent en grande proportion dans les os et qui sont de plus en plus recherchés pour l'agriculture.

Dès 1875, nous nous sommes donc livré, sans relâche ni interruption, à des essais successifs, pratiqués jour et nuit, et enfin nous avons eu le bonheur, après deux années d'expériences quelquefois pénibles, de réussir complètement dans notre entreprise.

Le système que nous préconisons consiste dans l'emploi de larges et épaisses cornues en terre émaillée, se rapprochant de celles du gaz et placées verticalement dans les fours, vis-à-vis les unes des autres, au nombre de quatre à douze.

Ces cornues contiennent 80 kilogrammes d'os et reposent, de chaque côté du foyer, sur des plaques horizontales en fonte, complètement à l'abri des flammes et munies d'une simple fermeture articulée et hermétique.

Les os destinés à la carbonisation sont élevés sur la plateforme du four dans des paniers ou mannes au moyen d'une manivelle ou palan, et sont introduits, à l'aide d'un entonnoir, par la partie supérieure de la cornue, à laquelle est adaptée une plaque comportant un couvercle également hermétique.

La chaleur du four est d'abord portée lentement au rouge cerise par l'emploi de la houille dans le foyer, et une fois cette température obtenue, on l'entretient par quelques pelletées de houille ou de poussière de charbon seulement, jetées de loin en loin sur les grilles dudit foyer, dont l'entrée est pratiquée dans l'axe du mur de façade. Le four marche jour et nuit et fonctionne six et sept mois sans aucune interruption ni réparation.

Dès que les os sont dans la cornue et que celle-ci est couverte, la matière organique se décompose au contact de la chaleur et la distillation se poursuit activement. Les vapeurs, conduites par de larges tuyaux partant de la partie supérieure de la cornue, se rendent dans un réfrigérant, s'y condensent et tombent, sous forme d'eau ammoniacale et de goudron, dans un récipient spécial, d'où ces liquides sont expulsés mécaniquement au fur et à mesure de leur production et se divisent par leur propre poids. Les eaux ammoniacales sont transformées en sulfate d'ammoniaque, comme nous l'expliquerons un peu plus loin, et les goudrons livrés au commerce pour divers usages ou brûlés sur les grilles des générateurs au moyen d'un petit appareil que nous installons au-dessus de la porte du foyer, et dont nous ferons plus loin la description.

Les gaz incondensables sortant des récipients se rendent directement et par des tuyaux spéciaux sur les grilles du four, où ils brûlent à l'état épuré.

Le calorique produit par la combustion de ces gaz est considérable, et le chauffage étant ainsi très régulier, la chambre du four conserve toujours la température rouge cerise nécessaire à la calcination. Nous pouvons même ajouter qu'en employant des os très secs, le four peut marcher régulièrement sans qu'il soit presque besoin de jeter la moindre quantité de houille sur les grilles.

Au fur et à mesure de l'extinction des gaz d'une cornue, celle-ci est déchargée, et le charbon tombe, à l'aide d'un vaste entonnoir mobile, dans des étouffoirs lutés, où il se refroidit lentement à l'abri de l'air. Cette opération se fait en quelques secondes, par un simple mouvement de bascule donné au tampon articulé inférieur.

On peut fixer de trois heures à trois heures et demie environ le temps demandé par chaque opération, ce qui fait qu'en vingt-quatre heures, un four de dix cornues peut distiller 6,000 kilos d'os, qui produiront le rendement moyen suivant :

Charbon d'os, environ	65 °/o...	3,900 k.
Eau ammoniacale, 10 à 15° Beaumé.	16 °/o...	960
Goudrons ou huile d'os	8 °/o...	480
Évaporation en gaz et déchets......	11 °/o...	660
		6,000 k.

L'eau ammoniacale obtenue de la distillation des os est de beaucoup la plus riche connue; elle pèse 10° à 15° à l'aréomètre Beaumé, quelquefois plus, quand les eaux du gaz arrivent à peine à 4°.

Les goudrons employés comme chauffage procurent une forte économie de combustible, et voici la petite disposition que nous avons imaginée pour arriver à leur combustion économique et complète.

Un cône en tôle de 20 centimètres de long et de 2 centimètres de diamètre au collet, pour finir à 1 centimètre, est placé dans une petite ouverture pratiquée au-dessus de la porte du foyer. A droite de ce cône, une tubulure munie d'une bride où vient s'adapter un tuyau de plomb de 15 millimètres de diamètre égal à celui de la tubulure. Ce tuyau de plomb est directement mis en communication avec un réservoir ou cuve en bois où il baigne placé en contrebas du foyer et contenant le goudron ou huile d'os. — A la partie du cône opposée au foyer, une bride où vient s'adapter un petit tuyau de cuivre d'un centimètre de diamètre, lequel tuyau pénètre dans ledit cône sur une profondeur de 10 centimètres environ. De cette bride, ce petit tuyau se prolonge jusque sur le dôme de la chaudière ou générateur où il s'adapte à un robinet qui sert de prise de vapeur.

Quand on veut faire brûler le goudron, on ouvre très peu le petit robinet de vapeur, et celle-ci a pour fonction, en pénétrant dans le cône, d'aspirer d'une part la quantité de goudron néces-

saire et de projeter celui-ci sur le foyer en mille paillettes fines qui s'allument immédiatement.

La quantité des gaz produits par le four même est énorme; nous l'évaluons de 12 à 15 mètres cubes par 100 kilos d'os soumis à la distillation, et l'on comprend aisément que la quantité de charbon employée pour le chauffage devient presque nulle avec un tel brasier.

Les rendements que nous indiquons n'ont rien d'absolu et varient dans une certaine mesure, suivant la qualité et le degré de siccité des os employés.

Un avantage non moins important de nos procédés, c'est la facilité qu'on a de détourner du foyer le gaz nécessaire à l'éclairage particulier de l'industriel; c'est ainsi que le fabricant peut s'éclairer sans frais.

Un de nos amis de Paris, M. Berthoud, successeur de la maison Jacquand, fabricant de cirage, ayant dans son établissement deux fours de notre système, emmagasine jusqu'à 100 mètres cubes de gaz par jour pour les besoins de ses étuves et de son éclairage.

Il suffit, pour atteindre ce but, de faire passer le gaz, au sortir des caisses, par des épurateurs analogues à ceux des usines à gaz et de l'envoyer ensuite dans un réservoir ou gazomètre, d'où il est distribué dans les becs d'éclairage.

Toutes ces opérations sont faites en vases hermétiquement clos; il ne s'échappe au dehors ni fumée ni odeur, et par suite, comme l'a déclaré le Conseil d'hygiène du département de la Gironde, dans son rapport trop élogieux : « Ce système atteint à une perfec-
» tion telle que cette industrie, réputée jusqu'ici insalubre,
» pourrait, avec les fours et appareils Huyard, s'installer en pleine
» ville, sans aucun inconvénient pour la salubrité publique. »

Si nous envisageons maintenant la question au point de vue le plus intéressant pour l'industrie, c'est-à-dire sous le rapport de la différence du rendement procuré par nos procédés comparés à ceux employés jusqu'à ce jour, il nous sera facile d'en démontrer la grande supériorité.

Opérons sur 6,000 kilos d'os soumis à la carbonisation pendant un jour ou vingt-quatre heures. Admettons un instant, pour sim-

plifier notre calcul, que la main-d'œuvre, l'usure du matériel, la consommation même de la houille soient aussi faibles avec les deux autres procédés qu'avec le nôtre, ce qui n'est pas, nous voyons qu'avec la carbonisation dans les pots ou par le four Brison, le fabricant de noir animal qui a acheté 6,000 kilos d'os, ne retire que 65 % environ, soit 3,900 kilos de charbon d'os, sur lesquels se répartiront tous les frais de son exploitation.

Par notre procédé de distillation, au contraire, nous obtenons d'abord les 3,900 kilos de charbon ou noir animal, puis 900 kilos minimum d'eau ammoniacale de 10 à 15° Beaumé, qui, transformées en sulfate d'ammoniaque, à raison de 20 kil. de sel par 100 kil. d'eau à 12° en moyenne, nous donne 216 kilos de sulfate à 45 fr. net les 100 kilos pris à l'usine............F.		97 20
400 kilos goudron ou huile d'os employés comme chauffage et représentant une économie de 3 fr. par 100 kilos....................................		12 »
Total......F.		109 20
Si nous déduisons de cette somme 200 kilos acide sulfurique pour la fabrication de 216 kilos de sulfate, à 12 fr. les 100 kilos...................F.	24 »	
Un ouvrier supplémentaire pour la surveillance de l'appareil, le jour seulement........	3 »	
Usure et intérêt de l'appareil spécial porté largement, par vingt-quatre heures, à.......	2 20	29 20
Différence de rendement ou bénéfice par jour..F.		80 »

Ces chiffres peuvent paraître, à première vue, exagérés; ils sont réels, et en les énonçant, nous ne craignons pas d'être contredits. Cependant, faisant large part à l'imprévu, à la négligence et aux changements de prix qui peuvent survenir, nous voulons bien réduire encore ce total de 15 p. %. Nous n'en arrivons pas moins au chiffre énorme de 70 fr. par jour pour 6,000 kilos d'os employés, ce qui représente à la fin de l'année une somme considérable dont le fabricant se refuserait à profiter s'il continuait, par routine, à employer les anciens procédés de fabrication.

Nous ferons remarquer, en outre, que nous n'avons pas fait entrer en ligne de compte la différence du chauffage, le gaz et le bénéfice provenant surtout de l'économie du matériel et des réparations. Toutes les pièces et armatures de notre appareil étant à l'abri du feu n'ont pas besoin d'être changées. Les cornues seules ont besoin d'être mastiquées comme les conduits et la maçonnerie; mais ces petites réparations, nécessitées par tous les fours, ne sont nécessaires que tous les six mois, et encore la dépense occasionnée par ces petites retouches intérieures est-elle insignifiante à chaque arrêt du four.

Il ne nous appartient pas de faire l'éloge de notre invention, nous en avons exposé les avantages indéniables; mais en abandonnant la question de la calcination des os, il nous sera permis d'affirmer, sans crainte d'être démenti, prêts que nous sommes à le prouver, que, *au point de vue de la salubrité et de l'hygiène publique, la destruction des exhalaisons ou odeurs incommodes provenant de la carbonisation des os et en général de toutes les matières animales, ne s'obtient complètement, par le feu, qu'en séparant au préalable, par le refroidissement, toutes les matières condensables contenues dans les gaz produits.*

C'est un des résultats que nous avons obtenus.

Noir animal.

Quelque système qu'on emploie, le charbon sortant des fours et à peu près froid, est éteint au moyen d'un léger arrosage d'eau fraîche nécessaire pour chasser les dernières vapeurs ammoniacales étouffées pendant le refroidissement et absorbées par le charbon.

On fait ensuite passer celui-ci dans un moulin qui le concasse et au-dessous duquel se trouve un blutoir qui le divise en grains de grosseurs différentes pour être livrés aux fabricants de sucre et raffineurs de France et de l'étranger.

La poussière produite par le concassage et le blutage du noir en grains est passée à une meule horizontale comme celle des minoteries, qui la réduit en poudre impalpable spécialement

affectée dans les raffineries à la décoloration des sucres de qualité inférieure.

Un autre emploi du noir fin prenant chaque jour un grand développement est celui de la fabrication du cirage dont il sert de base, c'est ainsi que M. Berthoud-Jacquand a été amené, par l'importance de sa consommation qui s'élève à plus de 2,000 kilos par jour, à fabriquer lui-même son noir.

Les machines employées pour le concassage des charbons d'os sont nombreux; mais si leur agencement varie, le principe est le même et consiste dans l'emploi de cylindres de fonte munis de lames d'acier et d'une plaque de fonte mobile entre lesquels le charbon est écrasé, mis en grains plus ou moins petits, suivant le rapprochement de ces pièces.

De ces cylindres, les grains tombent immédiatement sur un crible muni de toiles métalliques de différents numéros qui divisent successivement les grains et la poussière.

Plusieurs fabricants de noir font procéder, avant la carbonisation, au broyage et à la pulvérisation des os. Ils obtiennent ainsi des grumeaux d'os et de la poudre. Les grumeaux sont soumis ensuite à la calcination pour obtenir immédiatement du grain de noir, mais leur cuisson est lente et difficile.

La poudre d'os crus, pure, très recherchée en Angleterre et en Allemagne, est expédiée pour l'agriculture et titre de 3 à 4 % d'azote et 45 à 50 % de phosphate.

Sulfate d'ammoniaque. — Sa fabrication.

Pour produire le sulfate d'ammoniaque, on transforme en sulfate le carbonate d'ammoniaque contenu dans les eaux provenant de la distillation des matières animales, des os, de la houille, des urines, eaux vannes, etc.

Les moyens employés pour la fabrication du sulfate d'ammoniaque sont de deux sortes.

Le procédé encore le plus répandu consiste dans le mélange direct de l'eau ammoniacale avec l'acide sulfurique, dans une proportion variable suivant le degré des eaux à traiter et celui de

l'acide employé. Ordinairement, la quantité d'acide à employer est de 28 kilos à 53° pour 1,000 kilos d'eau ammoniacale à 1°. Ce mélange s'opère dans des barriques ou cuves en bois doublées de plomb, et il est ensuite versé dans des chaudières en fonte épaisse, munies d'un double fond dans lequel la vapeur est introduite.

Les parties ammoniacales sont absorbées et fixées immédiatement par l'acide et l'évaporation se faisant lentement sous l'action de la chaleur, les sels se précipitent au fur et à mesure de leur formation, au fond des chaudières, d'où on les retire au moyen d'une cuillère de bois percée pour les placer sur un égouttoir pour être ensuite livrés au commerce ou à l'agriculture.

Ce moyen donne de jolis sels, mais il a l'inconvénient d'exiger une surveillance active et d'occasionner quelques dégagements incommodes.

Dans le second procédé, on se sert de chaudières en forte tôle hermétiquement closes, placées sur un foyer, et d'un réfrigérant également clos. Les deux chaudières communiquent entre elles par un tuyau placé sur leur couvercle et destiné à la transmission de la vapeur ammoniacale de l'une dans l'autre, et dans le bas, un robinet qui a pour but de faire passer successivement les liquides à évaporer de la seconde dans la première. On introduit dans le réfrigérant, par une pompe ou par un robinet donnant accès à un réservoir supérieur, les eaux ammoniacales qui, passant successivement d'une chaudière dans l'autre, après chaque opération, arrivent déjà chaudes dans la première qui se trouve en contact avec le feu. Un lait de chaux introduit pendant l'opération et agité à plusieurs reprises par une clef tournante, permet le dégagement total de l'ammoniaque.

Les gaz ou vapeurs qui sortent de la première chaudière viennent barboter dans la deuxième, et, en se réunissant, arrivent par un tube dans le serpentin où la vapeur d'eau se condense et se renvoie par une pompe dans les chaudières, tandis que le gaz ammoniac s'échappe par un autre tuyau pour passer successivement dans un appareil de Woulf, et enfin dans un bassin contenant

de l'acide sulfurique. Les eaux de la première chaudière une fois épuisées, ce dont on se rend aisément compte par l'odeur et l'habitude, sont expulsées dans les égouts par un robinet placé à la partie inférieure de la chaudière. Cette eau est complètement inoffensive, et sa présence dans les égouts peut être tolérée sans aucun danger pour la salubrité publique.

Différentes modifications ont été apportées aux appareils à sulfate d'ammoniaque par des spécialistes. M. Mallet, de Paris, s'en est sérieusement occupé, mais nous ne connaissons pas assez bien l'économie de ses procédés pour en faire la description. Nous savons cependant qu'ils sont assez dispendieux. M. Chevalet, ingénieur-chimiste à Troyes, a simplifié beaucoup les appareils de M. Mallet et autres, dans lesquels on fait d'abord de l'alcali ou mieux du gaz ammoniac qu'on fait ensuite absorber par l'acide sulfurique pour avoir du sulfate. M. Chevalet ayant reconnu que dans les eaux ammoniacales, presque toute l'ammoniaque est volatile sans employer la chaux, fait arriver directement les vapeurs produites par les eaux ammoniacales, dégagées par la simple action de la chaleur, dans un bac en plomb contenant de l'acide sulfurique réduit à 35°; l'absorption de l'ammoniaque a lieu sous une cloche en plomb qui a une double fonction ; elle recueille les mauvais gaz provenant de la distillation, les envoie se perdre dans la cheminée et empêche la projection de l'acide hors du bac. Lorsque l'acide sulfurique est saturé, on trouve au fond du bac un sel en poudre fine qu'on pêche et qu'on met à égoutter.

L'appareil est à deux ou trois chaudières, suivant l'importance de la distillation; il ne comporte ni laveur, ni réfrigérant, il marche ou à feu nu ou à la vapeur, employant peu de chaux, et non seulement il y a économie de matière et de main-d'œuvre, mais encore il se crasse peu et fonctionne plusieurs mois sans arrêt.

Cet appareil peut marcher avec la chaleur perdue des fours; pour cela, on le place le plus près possible de ces derniers, en plongeant dans la traînasse ou carnaux plusieurs thermosyphons en nombre suffisant pour produire la distillation; les thermo-

syphons sont reliés à la première chaudière distillatoire au moyen de tuyaux en plomb.

Les appareils Chevalet sont calculés pour traiter journellement les quantités d'eaux ammoniacales produites. En employant la vapeur ou la chaleur perdue des fours, ils n'exigent pas une surveillance incessante.

La présence d'un ouvrier n'est indispensable qu'au moment des vidanges et de la récolte du sel. Il y a donc réelle économie dans la fabrication.

Le rendement en sulfate des eaux ammoniacales varie peu. On peut fixer en moyenne à 20 kilos par tonne et par degré Beaumé, la quantité de sel retiré du traitement des eaux ammoniacales provenant soit des matières animales et des houilles, soit des urines, eaux vannes, etc.

Un autre procédé de fabrication consiste dans l'emploi d'appareils à colonne servant à la distillation des alcools, mais ils n'ont de réelle utilité que pour le traitement des eaux de vidanges et de celles dont le degré ammoniacal est très faible. Il faudrait, pour s'en servir dans le traitement des eaux ammoniacales d'os, réduire considérablement le degré de celles-ci, ce qui entraînerait à une grosse augmentation de main-d'œuvre sans aucun profit. Ce système, au surplus, demande une très grande attention, si l'on ne veut pas que les appareils se détériorent promptement.

La consommation du sulfate d'ammoniaque est énorme pour l'agriculture et la fabrication des engrais, surtout en France, en Angleterre, en Allemagne et en Belgique, où nous en exportons de fortes quantités. Sa valeur est aujourd'hui de 450 à 500 fr. la tonne. Son titrage toujours de 20 à 21 °/₀ d'azote.

Revivification et emploi des vieux noirs.

Lorsqu'on a fait passer dans la fabrication ou le raffinage des sucres une certaine quantité de sirops sur le charbon ou noir animal, sa propriété décolorante s'épuise par suite de l'absorption des matières organiques végétales qui coloraient les sirops et ont adhéré à ses surfaces charbonneuses.

La nouvelle calcination qu'on fait subir au noir et qui est connue sous le nom de *revivification,* a pour but de brûler ces substances organiques, de remettre à découvert les surfaces charbonneuses et, par suite, de rendre au noir sa puissance décolorante primitive. L'usage a prouvé que le noir animal pouvait être revivifié et resservir un nombre de fois plus ou moins considérable, et allant jusqu'à trente, suivant la façon dont on l'a employé, le mode de revivification, et les soins apportés à sa préparation.

En sortant des filtres, le noir en grain, dont la puissance décolorante est épuisée, est soumis à des lavages successifs d'eau légèrement acidulée, puis égoutté et séché avec soin. La revivification des noirs de raffinerie est aujourd'hui une opération tellement importante et inhérente à tout grand établissement sucrier, qu'après avoir indiqué le meilleur mode de calcination des os, il nous est impossible de ne pas dire un mot des différents systèmes de fours à revivifier à nous connus.

Nous n'entrerons point dans l'examen théorique des divers systèmes de revivification ou régénération des noirs; nous nous bornerons seulement à compléter ces notes en mentionnant les principaux systèmes de fours à revivifier et exposer les avantages et inconvénients, s'il y a lieu, de ceux que nous croyons être les plus répandus.

On distingue deux catégories de fours à revivifier : les fours intermittents et les fours coulants ou continus.

Ceux intermittents comprennent les fours à pots conçus suivant divers plans, avec emploi de marmites en tôle ou fonte de dimensions variables et s'étageant avec ou sans voûte intermédiaire, du reste identiques aux fours primitifs à calcination d'os que nous avons décrits. Ceux dont le travail est le plus régulier, sont à un seul étage de pots. Mais ce système de four employé soit à la calcination des os, soit à la revivification des noirs, exige, nous l'avons déjà fait remarquer, un grand et coûteux matériel se détruisant assez promptement, et demande, surtout avec un emplacement très vaste, une main-d'œuvre énorme. Ces diverses

raisons l'ont successivement fait exclure des raffineries qui l'avaient adopté.

Dans la deuxième catégorie se placent les fours continus dont le nombre s'est fort accru. Ils ont tous un mérite relatif particulier; mais il en est peu qui donnent une satisfaction complète aux raffineurs et fabricants de sucre.

Dans l'impossibilité d'en donner une description approfondie, nous nous contenterons de citer particulièrement les fours Crespel-Delisse, Fouschard, décrits dans Payen, et les fours Blaise, Schreiber, Lagarde, Derrien, etc., etc., en nous bornant à expliquer le mécanisme de ceux d'entre eux qui ont attiré plus particulièrement notre attention.

Le four Lagarde, qui appartient au domaine public, s'est très répandu, principalement dans les raffineries du département de la Seine. Comme il diffère sensiblement des précédents, nous en donnerons un aperçu.

Ce four se compose d'une maçonnerie de forme carrée, au centre de laquelle une chambre partagée par deux foyers opposés et séparés par un mur en briques. De chaque côté de ces foyers, une murette s'élevant jusqu'à la voûte. A une certaine hauteur des barreaux de grille, sont pratiquées, dans ces murettes, des ouvertures qui laissent passer les flammes du foyer, tout en préservant les cornues du coup de feu. Celles-ci, placées au nombre de quatre de chaque côté des foyers, sont en fonte et ont un diamètre de 50 centimètres environ; elles servent d'enveloppe à des cornues intérieures concentriques, laissant entre elles un espace annulaire de 70 centimètres de tour rempli du noir à revivifier. La cornue extérieure reçoit le calorique, et celle intérieure, de 20 centimètres environ de diamètre, sert de cheminée. Les flammes arrivant par les trous pratiqués dans les murettes lèchent les cornues du haut en bas, puis trouvent accès au bas de la cornue en se rendant dans le tube intérieur, de telle sorte que la matière à revivifier est chauffée à l'extérieur et à l'intérieur de la cornue.

Ce tube intérieur, qui est une vraie cheminée, traverse le four et se rend sur la toiture, muni d'un registre, pour en régler le

tirage. De cette façon, le four possède autant de cheminées que de cornues.

L'avantage de ces tubes chauffeurs, c'est, en traversant au-dessus du four une épaisse couche de noir à revivifier, de lui ôter toute l'humidité qu'il contient et de le rendre plus propre à une prompte revivification. Ce système pèche par le mode de refroidissement du noir au sortir de la cornue, mais son défaut capital gît dans la trop grande épaisseur du noir que le calorique a à traverser, par suite de la trop grande dimension des cornues extérieures.

Pour obvier à cet inconvénient, on est obligé de brûler plus de combustible, encore les opérations durent-elles 30 à 40 minutes.

Nous laissons de côté les fours Blaise et Schreiber, dont nous ne connaissons pas assez le fonctionnement pour en parler sérieusement.

Nous passons au four Derrien, dont nous avons examiné la marche à plusieurs reprises avec le plus grand soin.

Ce four, de création plus récente, nous semble assez judicieusement conçu pour économiser à la fois l'espace, le combustible, la main-d'œuvre et donner un travail relativement satisfaisant comme régénération et conservation du noir. Le four Derrien comporte huit à vingt cornues, mais son four normal se compose de seize cornues occupant une surface de 10 mètres superficiels et pouvant rendre 6 à 7,000 kilos de noir revivifié par vingt-quatre heures.

La consommation du combustible est peu importante.

Le four se compose d'une chambre carrée renfermant les cornues. Au centre, un seul foyer; à droite et à gauche, à l'aplomb de celui-ci, une murette peu épaisse, protectrice des cornues. Celles-ci, rangées les unes à côté des autres, sont en terre réfractaire de forme très plate et très allongées, ayant 50 centimètres de long sur 25 centimètres d'épaisseur totale, comprenant un vide intérieur longitudinal de 5 centimètres. Elles traversent la voûte de clôture en haut et sont alimentées automatiquement par le noir apporté à la partie supérieure du four et remplissant les cornues

jusqu'à former une couche horizontale de quelques centimètres d'épaisseur sur tout le four.

Le noir descend dans les cornues en glissant le long des parois d'une chambre ou réservoir à air chaud, en fonte. Cette chambre reçoit, en effet, tous les gaz combustibles et tout le calorique du four non utilisé, et est en communication avec la cheminée d'aspiration. Il y a là un double effet heureusement obtenu : la dessiccation préalable du noir avant revivification et l'aspiration de l'eau qu'il contenait, qui eût retardé la cuisson.

Le noir, au sortir des cornues, passe successivement par des rafraîchissoirs en fonte superposés et à tiroirs, ne laissant qu'une largeur de 2 centimètres de passage, de sorte que son refroidissement à l'abri du contact de l'air est complet. Les opérations, avec ce système, durent 25 minutes.

En somme, la revivification des noirs, quel que soit le système employé, n'a nullement, au point de vue de l'hygiène publique, l'importance et les inconvénients de la carbonisation des os, les noirs ayant perdu dans cette première opération toutes les matières susceptibles de produire des exhalaisons incommodes.

Noirs d'écumes ou noir de raffinerie.

Le noir en poudre impalpable, après avoir servi à la décoloration des sucres bruts de qualité commune, n'est plus susceptible, comme le noir en grain, de revivification et s'emploie comme engrais, sous le nom de *résidus de raffinerie* ou *noirs d'écumes,* principalement dans les départements de l'ouest de la France. La quantité de ces résidus consommés par l'agriculture s'élève à des millions de kilogrammes et ses propriétés fertilisantes sont dues à la grande quantité d'azote qu'ils renferment, absorbé au contact du sang avec lequel le noir en poudre est employé simultanément dans les raffineries et à sa richesse en phosphate de chaux.

Bien que le noir impalpable qui a servi ne puisse subir la revivification, on peut dire que, loin d'être une source de perte pour les raffineurs, sa vente constitue même quelquefois un

bénéfice, car ce noir est toujours recherché, et son prix de vente qui varie de 14 à 16 fr. l'hectolitre, tout en étant rémunérateur, permet au manufacturier d'écouler en même temps tous les résidus de sang, écumes, etc., qui forment corps avec le noir et se vendent, comme nous venons de le dire, sous le nom de noir d'écumes ou de raffinerie.

CONCLUSION.

Après avoir passé en revue les industries nombreuses dont les os d'animaux forment la base, nous sommes amené à faire remarquer que leur importance toujours croissante engage, en quelque sorte, les fabricants, d'accord avec l'administration, à en favoriser l'essor dans l'intérêt général comme dans leur propre intérêt.

Pour arriver à ce but, il faudrait que les fabricants de noir animal, après s'être parfaitement rendu compte des améliorations et transformations qu'il est nécessaire d'apporter à l'ancien outillage, se pénétrassent de cette idée que c'est une question de vie ou de mort pour leurs établissements; car s'ils ne se mettent pas complètement à l'abri des justes plaintes du voisinage, et qu'en même temps ils renoncent aux avantages pécuniers que doivent leur procurer les nouveaux procédés de fabrication, ils seront continuellement en butte aux tracasseries des voisins incommodés et à la concurrence que des confrères moins hésitants pourront facilement leur faire, la production nouvelle permettant de payer la matière première un prix plus élevé.

Pour notre part, nous n'avons qu'une ambition, qu'un désir, c'est de voir nos procédés continuer à se répandre promptement, et quand nous les verrons partout employés, nous serons heureux d'avoir rendu un service à l'art industriel, à l'agriculture et à la salubrité publique.

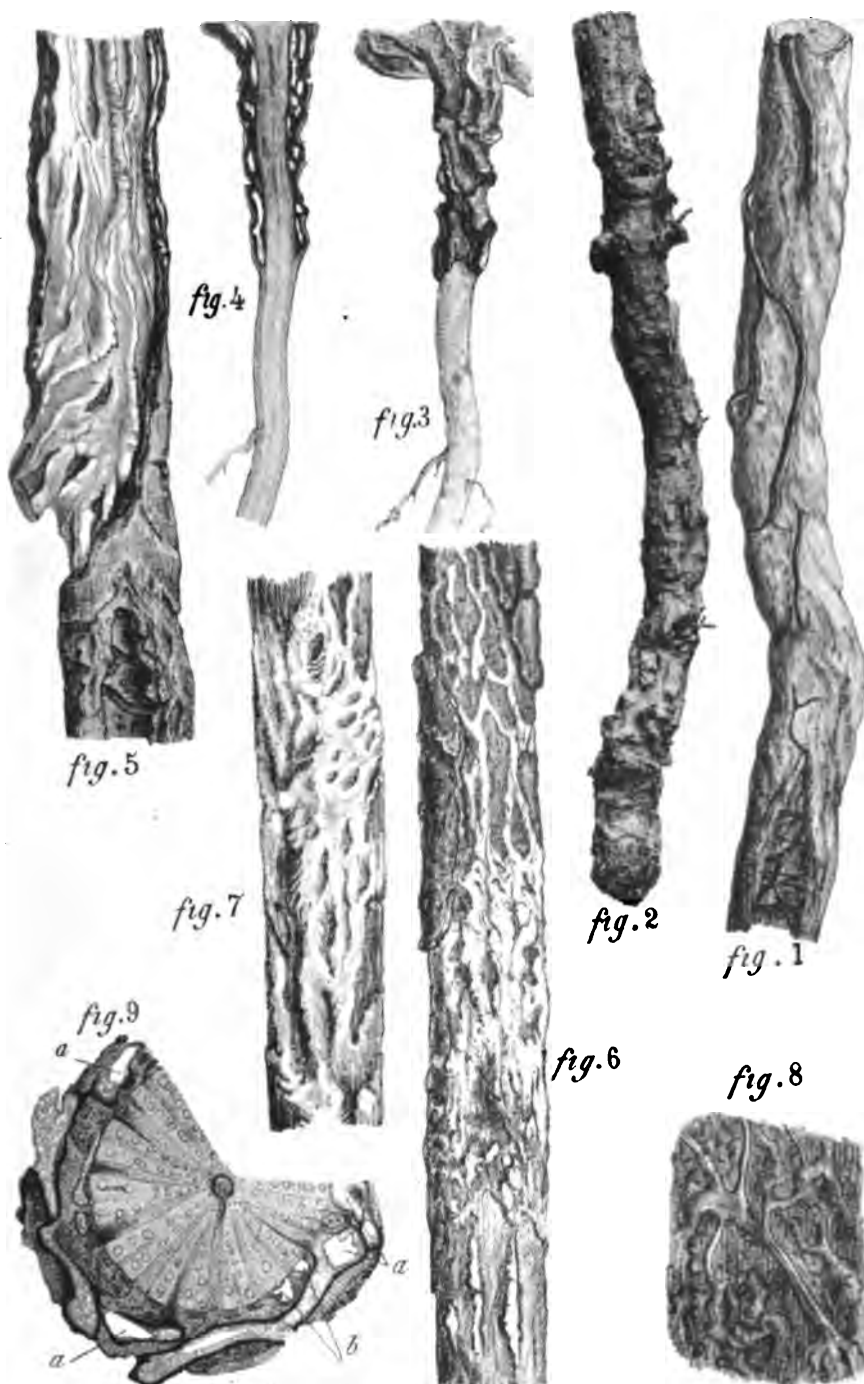
En terminant cet exposé, qu'il nous soit permis d'insister sur un point capital, celui qui a trait aux exhalaisons et odeurs

écœurantes provenant de la calcination des matières animales quelconques :

Nous répétons et affirmons, appuyé sur nos expériences continuelles, que pour arriver à détruire par le feu, d'une façon complète, les gaz ou exhalaisons infectes provenant de la décomposition des matières organiques, il est indispensable d'en condenser, au préalable, toutes les vapeurs par le refroidissement.

C'est un des résultats que nous avons voulu atteindre et qui est obtenu sans contredit par notre nouveau procédé de distillation des os.

Pl. I



Phototypie.

A. Quinsac. Toulouse.



fig. 11



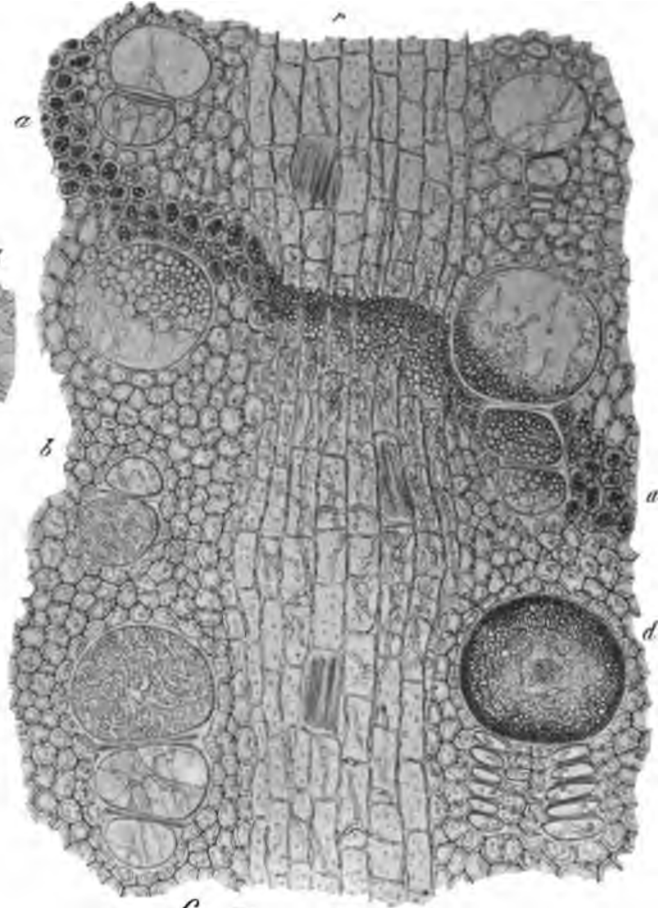


fig. 10



fig. 12



fig. 16

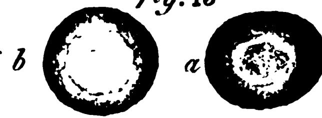


fig. 13

fig. 15



fig. 14

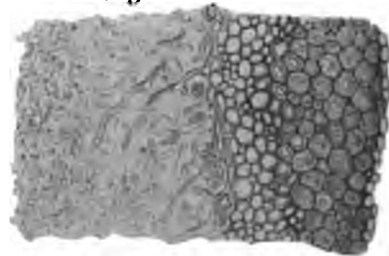
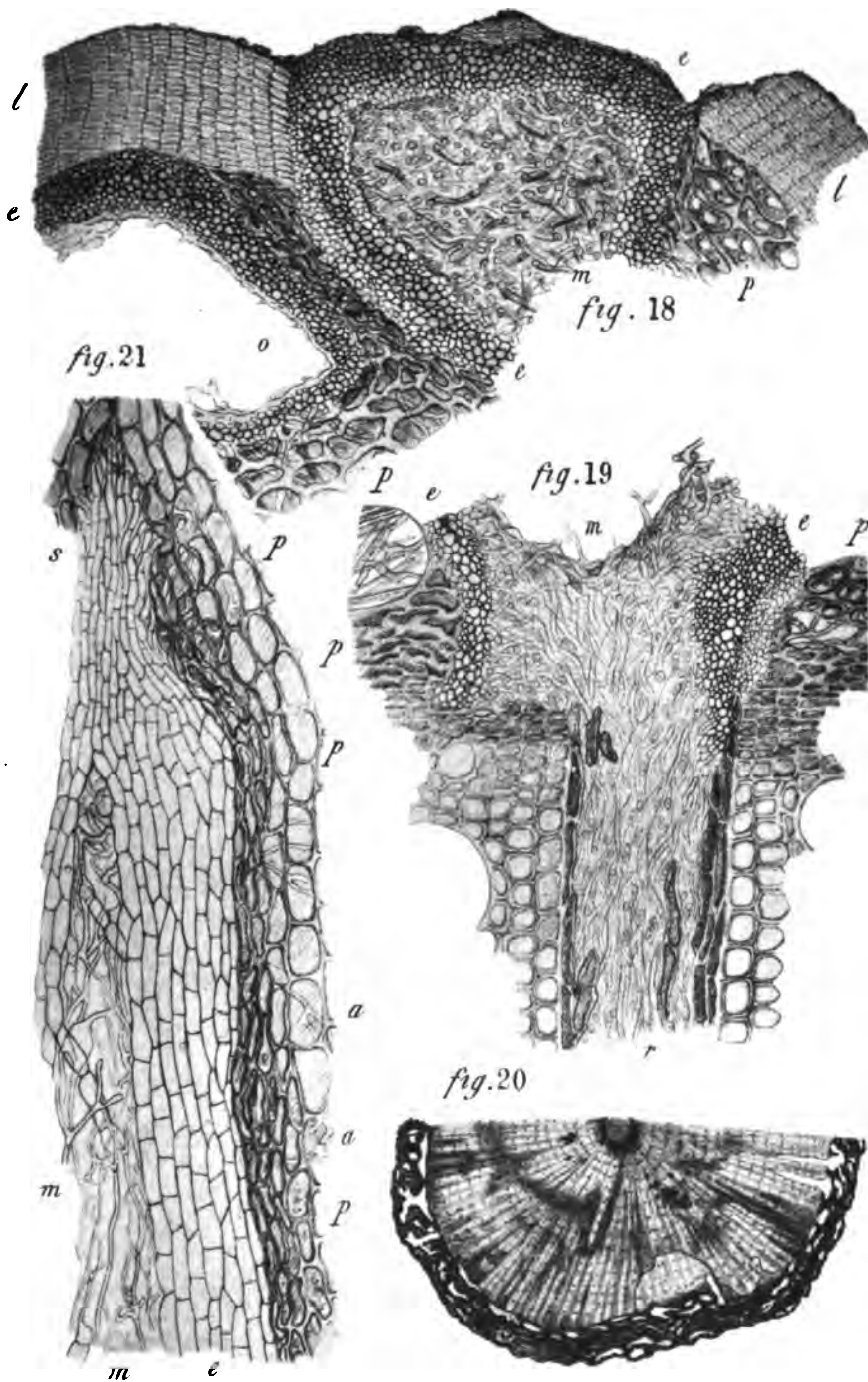




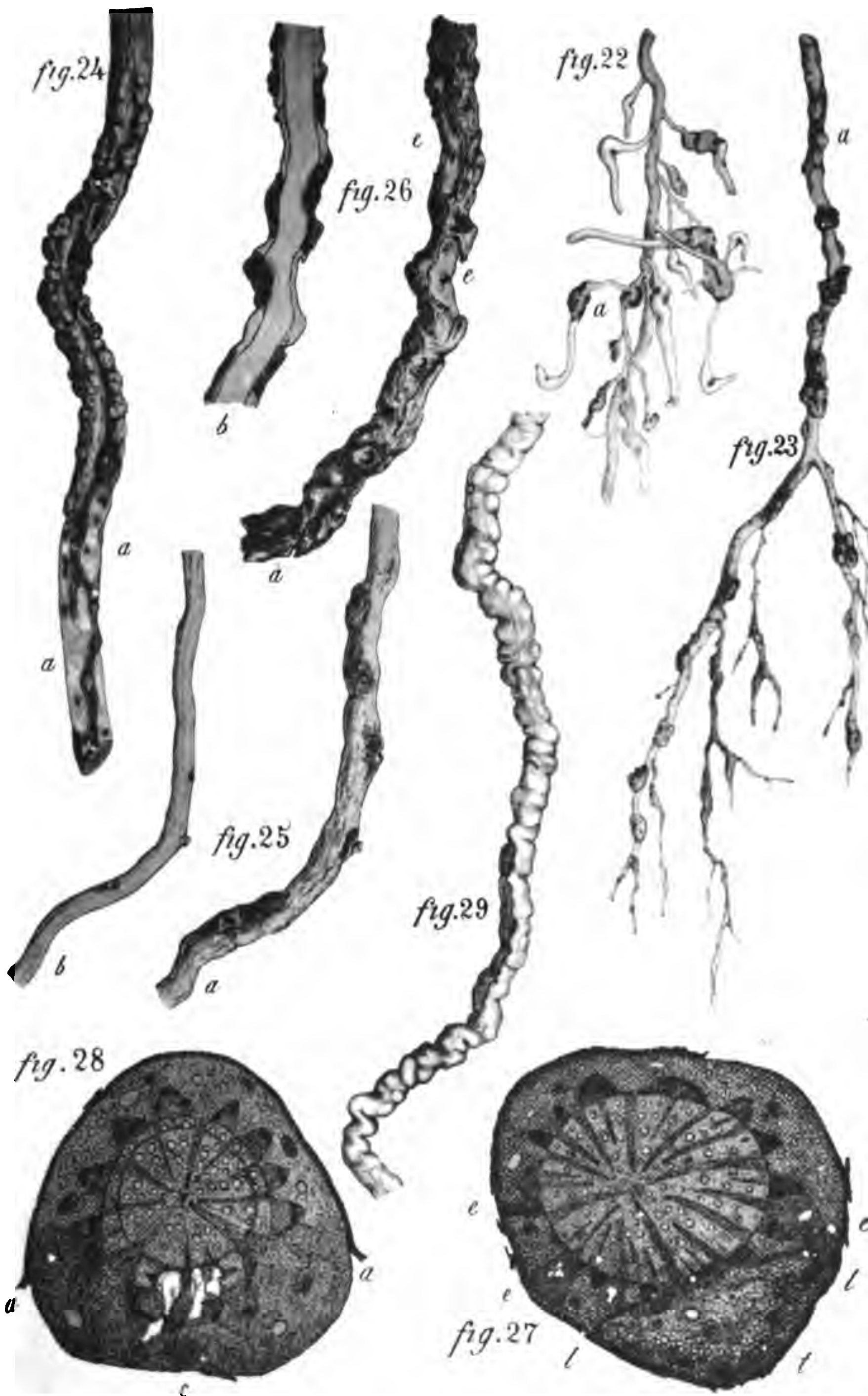
fig. 17

A. Quinsac, Toulouse.



Phototypie. A. Quinsac, Toulouse.

Pl. IV



Phototypie. A. Quinsac, Toulouse.

L'ARITHMÉTIQUE DES GRECS

DANS HÉRON D'ALEXANDRIE

PAR M. PAUL TANNERY

En essayant aujourd'hui, sur les divers opuscules géométriques attribués, au moins comme origine, à Héron d'Alexandrie, un travail analogue à celui que nous avons déjà tenté sur la *Collection mathématique* de Pappus (1), nous ne nous proposons nullement d'épuiser le sujet, c'est-à-dire de tirer des recueils de problèmes numériques dont il s'agit, tous les renseignements qu'ils peuvent fournir sur les connaissances arithmétiques des Grecs; nous nous bornerons à l'étude des questions les plus importantes, telles qu'elles ont déjà été déterminées avec précision par M. Cantor, dans la monographie du géomètre alexandrin à laquelle est consacrée la première partie de son ouvrage : *Die römischen Agrimensoren* (Leipzig, 1875) (2).

Mais avant d'aborder l'objet principal que nous avons en vue, il nous est difficile de ne pas dire à notre tour quelques mots sur l'authenticité, la provenance et la véritable date des écrits dont nous avons à nous occuper. Nous ne pourrons, à vrai dire, que glaner derrière les illustres érudits qui ont débattu ces questions;

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tome III (2e série), p. 351 et suivantes.

(2) C'est à ce livre qu'il faut rapporter les fréquentes citations de *Cantor* que nous aurons l'occasion de faire plus loin.

toutefois, ces glanes n'en auront peut-être pas moins leur valeur, si faible soit-elle.

I

Le premier point que nous aborderons est le suivant : Héron d'Alexandrie, le mécanicien, comme l'appelle Proclus, celui dont l'âge, déterminé par le temps auquel vivait son maître Ktésibios, doit être rapporté environ vers l'an 100 avant J.-C., avait-il spécialement traité de l'arithmétique?

Nous savons, par un passage bien connu d'Eutocius *(Commentaires sur la Mesure du Cercle d'Archimède)*, que « Héron avait » dit, dans les *Métriques*, comment il faut calculer, par approxi- » mation, la racine carrée d'un nombre donné. » Quoique d'ailleurs précisément cette méthode d'extraction des racines ne nous ait pas été conservée, on ne met plus en doute que sous ce nom de *Métriques*, Eutocius ne désigne un grand ouvrage aujourd'hui perdu, lequel doit avoir servi pour la rédaction ou la compilation des écrits héroniens que nous possédons ([1]).

Mais en tête de ces écrits, on classe ordinairement, au moins comme représentant plus exactement le texte d'une œuvre véritable de Héron, un petit traité sur les *Définitions des termes de la Géométrie* (*Héron*, p. 1-40), traité que son auteur, quel qu'il soit, désigne (p. 1, 1) d'ailleurs sous le titre de Τὰ πρὸ τῆς γεωμετρικῆς στοιχειώσεως τεχνολογούμενα *(Prélude* technologique *aux Éléments de Géométrie)*, tandis qu'il se réfère plus loin (p. 38, 1) à un semblable *Prélude* qu'il aurait composé *aux Éléments d'Arithmétique* (ἐν τοῖς πρὸ τῆς ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως). Au reste, on ne peut guère douter que sous ce nom d'*Éléments*, il ne faille entendre les livres d'Euclide, considérés à juste titre, les uns comme géométriques, les autres comme arithmétiques.

Notre auteur est-il bien Héron? C'est ce qu'ont pensé les deux

---

([1]) Nous citerons sous la rubrique *Heron* l'excellente édition que M. Hultsch a donnée de ces écrits : *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiæ*. Berlin, 1864.

savants les plus autorisés en général sur les questions héroniennes, M. Th.-H. Martin (1) et M. F. Hultsch (2).

Mais, tandis que le premier a vu dans les deux *Préludes* deux parties du grand ouvrage des *Métriques*, le second, auquel n'ont pas échappé les différences notables qui existent entre la technologie des autres écrits héroniens et celle d'Euclide, a considéré ces *Préludes* comme des ouvrages spéciaux. Enfin, Friedlein s'est nettement prononcé, au contraire, contre l'attribution à Héron (3).

Mais parmi les arguments invoqués à l'appui de cette dernière thèse, que nous adoptons, il ne nous semble pas que l'on ait, jusqu'à présent, mis en avant les plus irréfragables. Nous avons, sur les diverses définitions données, en dehors de celles d'Euclide, par les anciens géomètres, une source précieuse dans Proclus (4). Or, si nous comparons les renseignements que fournit ce dernier avec le texte du pseudo-Héron, nous voyons, en premier lieu, que *toutes* les définitions indiquées par Proclus comme appartenant à des auteurs différents, se retrouvent simplement juxtaposées dans notre *Prélude*, en sorte que ce dernier n'est bien, ainsi qu'on pouvait le soupçonner à son seul examen, qu'un recueil, une compilation assez mal ordonnée, au reste, de ce qui avait été donné, à titre de définitions géométriques, par les maîtres classiques. Un pareil ouvrage ne peut guère être attribué à un écrivain original, et même, si l'on remarque l'absence, dans cette compilation, des définitions qui semblent propres à l'auteur des *Métriques*, et qu'on retrouve éparses dans les autres écrits héroniens, il semble très douteux que le rédacteur des *Préludes* ait appartenu à la même école.

D'un autre côté, si malheureusement Proclus nomme trop peu

(1) *Recherches sur la vie et les ouvrages d'Héron d'Alexandrie, et sur tous les ouvrages mathématiques grecs qui ont été attribués à un auteur nommé Héron.* Paris, 1854.

(2) *Metrologicorum scriptorum reliquiæ.* 1r vol. Leipzig, 1864.

(3) *Bulletino Boncompagni*, année 1871, p. 93-121.

(4) *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum Commentarii*, ed. Friedlein. Leipzig, 1873.

les géomètres dont il cite les définitions, il attribue nommément à Posidonius (né en 133, mort en 49 av. J.-C.) celle des parallèles et de même la division des quadrilatères, qui sont adoptées par le pseudo-Héron. Ce dernier était donc incontestablement postérieur à Posidonius, et très probablement au commencement de l'ère chrétienne.

En tout cas, sa compilation, qui semble avoir été assez complète, présente un réel intérêt pour l'histoire des mathématiques. Celui qui aura la patience, en s'aidant de Proclus, de distinguer les définitions réellement différentes qu'on trouve là, et de les soumettre à un classement systématique, pourra jeter un jour précieux sur les divers courants intellectuels auxquels ont dû obéir les mathématiciens de l'antiquité. Nous sommes trop tentés, en thèse générale, de les considérer comme ayant, à très peu près, suivi un sentier unique, une seule direction, celle d'Euclide. Il y a là une illusion produite par ce qui s'est passé seulement à l'époque de la décadence, sous l'empire romain.

Il y aurait donc un certain intérêt à déterminer l'âge véritable du petit traité qui nous occupe, afin de savoir si, comme nous le croyons d'ailleurs, toutes les définitions qui y sont recueillies doivent nécessairement être antérieures à l'ère chrétienne, c'est-à-dire appartenir à la grande époque de la science hellène.

Malheureusement la question ne semble guère pouvoir être nettement tranchée ; à la vérité, il est remarquable que le pseudo-Héron n'a fait à Geminus aucun emprunt reconnaissable dans les extraits de Proclus, tandis que diverses idées de ces extraits se trouvaient parfaitement appropriées à son but et auraient figuré avec honneur dans son recueil. Comme Geminus vivait, en somme, à la même époque que Héron d'Alexandrie et que Posidonius, on pourrait supposer que pour ne pas connaître ses écrits, notre compilateur devait en être également très rapproché. Mais peut-être aussi l'a-t-il exclu systématiquement du choix des classiques qu'il dépouillait, et nous ne sommes pas assez éclairés sur le véritable caractère de l'ouvrage perdu de Geminus pour affirmer qu'une telle exclusion eût été illégitime.

II

Nous n'avons, en somme, trouvé aucune preuve sérieuse tendant à faire croire que Héron d'Alexandrie ait jamais spécialement écrit sur l'arithmétique. Il nous reste à examiner, en dehors de l'opuscule que nous lui dénions, les six autres écrits qui entrent dans la collection de M. Hultsch, et que nous désignerons sous les noms latins adoptés par le savant éditeur.

Le premier de ces écrits, la *Geometria* (*Héron*, p. 41-140), est de beaucoup celui dont la valeur est la plus grande et qui peut, par suite, nous donner la plus fidèle image de ce que devaient être les *Métriques* de Héron.

C'est un recueil systématique et un ensemble complet de problèmes métriques de géométrie plane. Mais il faut remarquer avant tout que, dans les données numériques, l'auteur n'emploie que deux unités de longueur, lesquelles sont d'ailleurs essentiellement des mesures agraires : l'*orgyie* (brasse) (1), et son décuple le *schœnion* (cordeau). Après le calcul des surfaces en *schœnia* et *orgyies* carrés, notre auteur, d'autre part, les transforme constamment en deux autres unités superficielles, à savoir : le *modius* de 2 *schœnia* ou 200 orgyies carrées, et son quarantième, la λίτρα *(livre)* de 5 orgyies carrées.

Or M. Hultsch a parfaitement établi dans ses travaux métrologiques que le *modius* agraire était la surface de terrain pour laquelle on comptait, comme semences, une mesure de capacité appelée *modius*, nom essentiellement romain, et dont il fallait trois pour le *jugerum* (2,493 mètres carrés). Cette mesure de capacité était d'ailleurs le double du *modius* romain ordinaire ($8^{\text{litres}}752$) de 16 setiers, et l'on ne peut méconnaître dans les 40 *livres* dont elle se compose le poids approximatif du blé qu'elle contenait, estimé en livres romaines de $327^{\text{gr}}453$.

---

(1) Valant $2^{\text{m}}041$, d'après son rapport légal au pied romain, compté à $0^{\text{m}}29574$.

Qu'on suppose autant qu'on le voudra, sous les Ptolémées ou même sous les Pharaons, l'emploi en Égypte d'unités superficielles plus ou moins analogues, il est clair que le *modius* et la *livre* de la *Geometria* sont postérieures à la conquête romaine. Si donc cet écrit représente une source antérieure, il faut au moins supposer que son auteur aura remanié les calculs du modèle qu'il avait sous les yeux, en se proposant précisément de les adapter aux nouvelles unités en vigueur de son temps.

Mais on peut aller plus loin, car M. Hultsch a également établi d'une façon péremptoire que l'unité de longueur ou *orgyie* égyptienne avait été précisément modifiée par les Romains, de façon notamment que les 100 *orgyies* carrées fissent exactement le sixième de leur *jugerum*. Or cette transformation est loin d'avoir été immédiate; car si, dans le tableau des mesures usuelles qui précède la *Geometria*, se trouve définie la nouvelle *orgyie* avec les règles du calcul des *modii*, l'ancienne se trouve côte à côte avec le *pied romain* et le *jugerum* dans un tableau d'anciennes mesures rejeté à la fin de l'ouvrage.

Ainsi, ce dernier ne peut être au plus qu'une troisième édition refondue du texte primitif, faite sur une seconde déjà mise au courant des besoins de l'Égypte conquise et où notamment les mesures romaines avaient été introduites dans le tableau rédigé par Héron.

L'âge de cette troisième édition est d'ailleurs déterminé par celui des nouvelles mesures. Or, dans celles-ci ont disparu, pour faire place au système romain, l'ancien pied d'Égypte et les unités qui en dérivaient; de plus s'est introduite la coudée de deux pieds au lieu d'un pied et demi. Ces modifications sont certainement postérieures au premier siècle de l'ère chrétienne et ne remontent pas probablement au delà du troisième. La révision de la *Geometria* est donc d'environ trois siècles postérieure à Héron.

L'auteur de cette révision semble, en tout cas, avoir possédé une certaine valeur, ce qui est, il faut le dire, une raison de croire qu'il n'a pas dû copier servilement un modèle.

Je ne m'arrêterai pas sur le second opuscule, la *Geodæsia*

(*Héron*, p. 141-152), qui paraît n'être qu'un abrégé du précédent, et se borne au calcul des rectangles et des triangles.

Viennent ensuite deux recueils de problèmes sur les volumes des solides : *Introductiones stereometricorum* (p. 153-171). — *Stereometricorum collectio altera* (p. 171-187).

L'ordre suivi dans le premier est singulier; on commence par la sphère, on continue par le cône et le cylindre, on finit par le cube, les prismes et les pyramides; après sont surajoutés, sans lien méthodique, des problèmes sur des objets réels.

L'auteur du recueil ne paraît guère avoir réellement approfondi les mathématiques; il a bravement inséré (p. 163, comp. *Cantor*, p. 61) un problème sur une pyramide tronquée où les données conduisent pour la hauteur à une valeur imaginaire, qu'il calcule comme réelle.

Il note d'ailleurs comme ajouté par lui à l'ensemble antérieur un procédé dû au « très illustre Patricius », byzantin inconnu, en sorte que nous ne pouvons guère considérer le recueil comme clos avant le v[e] siècle. Toutefois, sous sa forme immédiatement antérieure, on peut le regarder comme beaucoup plus ancien; car si le pied y est l'unité ordinaire, on y rencontre la coudée romaine de 1 pied $\frac{1}{2}$ (p. 170) et, semble-t-il, la coudée grecque (p. 168), avec la transformation de leurs cubes en *modii* romains ordinaires. Ces problèmes, évidemment postérieurs à Héron, doivent remonter au contraire avant notre révision de la *Geometria*, tandis qu'il serait difficile de constater, en dehors de celle que nous avons expressément signalée, une addition plus récente que cette révision.

Quant à la seconde collection stéréométrique, elle est absolument sans unité; les problèmes sur les objets réels y dominent, et plusieurs ne diffèrent de ceux de la précédente que par des détails de rédaction. Le pied est la seule unité de longueur employée. La date de cette collection ne peut dès lors être précisée; toutefois, l'emploi de mots d'origine latine prouve suffisamment qu'elle a été faite sous la domination romaine; d'autre part, il est facile de

voir que le compilateur était encore moins mathématicien que celui du recueil précédent.

Le désordre des problèmes et les erreurs augmentent encore dans le cinquième recueil, les *Mensuræ* (p. 188-207); il suffira de dire qu'en général les questions de stéréométrie y sont avant celles de planimétrie; la grécité est d'ailleurs très basse. Toutefois, on y retrouve sous d'autres formes (p. 192-193) les problèmes que nous avons signalés dans la première collection stéréométrique, sur la transformation en *modii* des coudées cubes, grecques et romaines, problèmes qui doivent, comme nous l'avons indiqué, remonter aux premiers temps de la conquête.

Bon nombre de calculs ne sont que de grossières approximations, dont plusieurs doivent être reportées jusqu'au temps des arpenteurs égyptiens; mais à côté se trouvent des formules relativement complexes et parfaitement exactes; entre autres, pour la surface du segment sphérique de hauteur h et de diamètre de base s :

$$\left[\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^2\right]\pi,$$

et pour le volume,

$$\left[3h\left(\frac{s}{2}\right)^2 + h^3\right]\frac{\pi}{6},$$

formules que, par une singulière inadvertance, M. Cantor (p. 50) semble ne considérer que comme simplement approximatives.

Enfin, le *Liber Geeponicus* (p. 208-234) paraît être la collection la plus récente; car on a évidemment utilisé pour la former toutes les précédentes, sans compter quelques autres sources analogues. M. Th.-H. Martin n'estime pas qu'elle remonte au delà du x[e] siècle.

En résumé, sans même excepter les deux premiers recueils, on voit que l'attribution à Héron des divers problèmes que renferment ces diverses collections, n'a comme ensemble qu'une valeur assez hypothétique, et que, pour chacun en particulier, elle devient très douteuse. L'ouvrage désigné par Eutocius, sous le

nom de *Métriques* et dont nous n'avons pas à rechercher le véritable titre, aura, nous le voulons bien, servi soit de prototype, soit de source plus ou moins importante pour les divers opuscules qui nous sont parvenus; on peut encore, nous l'admettrons, retrouver dans ces écrits des passages qui auront été textuellement empruntés. Mais Héron n'a probablement pas été le seul auteur de problèmes numériques; la forme qu'il emploie pour la rédaction, toute différente de celle des problèmes géométriques euclidiens, est identique à celle que l'on a retrouvée dans un *Manuel de Calculateur égyptien*, remontant peut-être jusqu'au XVe siècle avant l'ère chrétienne (1). Cette identité de forme suppose, pour la façon de traiter ces problèmes, une tradition écrite non interrompue, tradition qui nous semble d'ailleurs établie par l'existence dans les collections dites héroniennes de solutions antérieures aux déterminations exactes, solutions toutes pareilles à celles du *Manuel* égyptien précité; par exemple, la mesure de la surface d'un triangle isoscèle par le produit de la base et de la moitié du *côté (sic)*.

Que Héron ait été, grâce peut-être à sa célébrité comme mécanicien, sans doute aussi en raison de la valeur de son œuvre, le plus connu de ces auteurs de problèmes numériques, cela est incontestable, puisqu'il est le seul dont le nom nous soit parvenu, mais il n'a certainement, on l'a vu, pas plus été le dernier qu'il n'a pu être le premier. Seulement, il est arrivé ce fait, parfaitement explicable par la célébrité du géomètre alexandrin, que tous ces problèmes se sont groupés sous son nom. Pour en désigner les auteurs, on a dit d'abord οἱ περὶ Ἥρωνα, les Héroniens, puis simplement Héron. Finalement, les imitations ont fait disparaître le texte primitif qu'il avait composé, sort à peu près inévitable pour un ouvrage qui, devant être adapté aux besoins de la vie pratique, ne pouvait fixer la langue scientifique, comme avaient fait les *Éléments* d'Euclide.

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, 1878, p. 139. — Notice de M. L. Rodet. — Il s'agit du papyrus dit *de Rhind*.

III

Cette introduction était nécessaire, au moins je l'ai cru, pour bien fixer ce que l'on doit entendre par un calcul trouvé dans Héron. Il ne peut y avoir pratiquement de règle d'authenticité autre que celle posée par M. Cantor : tenir pour vraiment héronien tout ce qui est exact et en bon grec; suspecter tout le reste. Comme il est prouvé d'ailleurs que, depuis l'ère chrétienne, la géométrie des anciens n'a fait aucun pas sérieux, toute formule remarquable doit être antérieure, et comme les *Métriques* devaient être un ouvrage probablement assez complet, il est présumable qu'elle s'y trouvait sous une forme ou sous une autre. Quant aux applications numériques, elles peuvent, en thèse générale, être postérieures; mais cela n'a pas une grande importance, s'il s'agit du moins de calculs exacts; car les procédés qui ont servi à les obtenir n'ont pas dû non plus subir de sérieuse amélioration sous la domination romaine. Ceci bien posé pour éviter toute ambiguïté, nous entrons en matière.

La première question que nous étudierons est celle de l'extraction des racines carrées incommensurables.

L'opinion qui prédomine généralement aujourd'hui est qu'il n'y a aucune chance de pouvoir reconstituer les procédés en usage chez les anciens pour cette opération. Par exemple, Nesselmann (*Die Algebra der Griechen*, p. 110) pense que les Grecs n'avaient pas de méthode définie, qu'ils ont trouvé leurs racines par tâtonnement et divination, en employant d'ailleurs des tables de carrés pour déterminer la partie entière. M. Cantor (p. 57) déclare qu'il est impossible de retrouver toutes les valeurs des écrits héroniens par aucune méthode reposant sur le théorème

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

en citant plusieurs de celles qu'il regarde comme réfractaires, il insiste sur ce point qu'une seule exception doit être suffisante pour exclure un procédé de calcul qui n'y conduirait pas. Enfin,

dans deux notes qu'a publiées récemment le *Bulletin de la Société Mathématique de France* (1), *(Sur une méthode d'approximation des racines carrées, connue dans l'Inde antérieurement à la conquête d'Alexandre. — Sur les méthodes d'approximation des anciens),* M. L. Rodet se range du même côté, alors que précisément la première de ces notes est consacrée à restituer pour la gloire du brahmane Baudhâyana, un procédé très voisin de celui que nous allons montrer remplissant complètement, à notre sens du moins, la condition posée par M. Cantor.

Mais avant d'aborder notre démonstration, il convient d'écarter un double préjugé.

En premier lieu, on croit généralement que le système de numération écrite des Hellènes, système dont ils paraissent les inventeurs et qui ne remonte guère au delà du ve siècle avant notre ère, était d'une très grande incommodité pour les calculs, à tel point que ce serait même, au dire de Hankel (2), la marque d'une incapacité réelle sous ce rapport, dans une race si merveilleusement douée au contraire pour la géométrie.

Il peut plaire à un historien de mettre en relief les diverses aptitudes des différentes nations, d'opposer les Hindous aux Grecs; il peut défendre brillamment une thèse séduisante. Mais il faut se garder de toute exagération; si les Grecs paraissent, en général, n'avoir *guère* fait de calculs compliqués, c'est sans doute aussi et surtout parce qu'ils n'en avaient *guère* besoin; ils se sont naturellement bornés, par exemple en astronomie, à ce qui suffisait, eu égard à l'imperfection de leurs procédés d'observation. Quant à leur système de numération écrite, on conviendra que, pour le juger en équité, il faudrait le pratiquer réellement.

J'ai voulu en avoir le cœur net, et je me suis exercé à calculer avec les lettres grecques; si mon expérience personnelle peut être de quelque poids, je dirai que j'ai été surpris, après avoir acquis très peu d'habitude encore, de découvrir dans cette notation des

(1) Année 1879, p. 98 et 159.

(2) *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*. Leipzig, Teubner, 1874.

avantages pratiques que je ne soupçonnais guère; je dirai que je suis très rapidement arrivé à pouvoir refaire l'ensemble des calculs de la *Mesure du Cercle* d'Archimède, sans différence de temps sensible, soit avec les lettres grecques, soit avec les chiffres modernes. Cet essai m'a paru suffisant et je ne l'ai pas poursuivi.

On croit ordinairement, d'un autre côté, que l'extraction de la racine carrée, en particulier, était pour les anciens une opération des plus difficiles et des moins pratiquées. Il n'est pas niable qu'au vi[e] siècle de notre ère, Eutocius, le commentateur d'Archimède et d'Apollonius, se comporte comme s'il l'ignorait. Mais on pourrait tout au plus arguer sérieusement de ce fait pour l'époque de décadence profonde où résonna ce faible écho des antiques doctrines.

Sans doute, même aux siècles les plus brillants de la civilisation hellène, l'instruction mathématique fut toujours infiniment moins répandue que de notre temps, et toute proportion gardée, ce qui peut s'observer chez nous dut évidemment se présenter de même alors; à savoir que la très grande majorité des individus qui ont appris à calculer sont parfaitement incapables d'extraire une racine carrée. Mais il n'en ressort pas moins du texte d'Eutocius lui-même, que le procédé d'extraction était chez les Grecs un objet de l'enseignement classique, et nous pouvons d'ailleurs tirer de l'ensemble des écrits héroniens la conviction que pour les arpenteurs auxquels s'adressaient ces écrits, l'opération devait se pratiquer couramment.

Un seul exemple suffira pour appuyer notre dire. Dans la *Geometria* (p. 125), on trouve pour l'aire A d'un segment de cercle en fonction de la corde s et de la flèche h, la formule approximative :

$$(1) \qquad A = \frac{s+h}{2} h + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \frac{1}{14},$$

très remarquable en ce sens que l'erreur commise ne dépasse guère celle de l'évaluation d'alors, $\pi = \frac{22}{7}$. Rien n'était plus facile que de tirer de là pour l'arc L du segment en fonction des mêmes

variables une formule également rationnelle, également satisfaisante comme approximation :

$$(2) \qquad L = s + h + \frac{1 - \frac{5}{28}\frac{s^2}{h^2}}{1 + \frac{1}{4}\frac{s^2}{h^2}} h.$$

On ne rencontre, au contraire, dans les écrits héroniens, pour L, de comparables à la formule (1), quoique cependant bien inférieures comme exactitude, que des expressions irrationnelles :

$$L = \sqrt{s^2 + 4h^2} + \frac{h}{4}, \qquad (\textit{Geometria}, \text{ p. } 125)$$

$$L = \sqrt{s^2 + 4h^2} + \left(\sqrt{s^2 + 4h^2} - s\right)\frac{h}{s}. \qquad (\text{ d}^{o} \quad \text{p. } 128)$$

Ces dernières formules devaient donc être pour les Grecs, comme elles le sont pour nous, plus rapides à calculer que la formule (2).

Quant au procédé d'extraction, en ce qui concerne la partie entière de la racine, je ne conçois guère que Nesselmann doute si les Grecs en connaissaient un semblable au nôtre *(mutatis mutandis)*, alors qu'il développe (p. 144 et suiv.), d'après le texte de Théon d'Alexandrie, la méthode pour l'extraction de la racine d'un nombre composé en degrés, minutes et secondes. Inutile de dire que cette méthode est identique à notre procédé élémentaire; il ne pouvait en être autrement.

Que les Grecs aient pu employer des tables de carrés, comme le faisaient déjà les Chaldéens, c'est très possible, probable même si l'on veut; encore aujourd'hui de pareilles tables se trouvent et sont très utiles, dans les *Aide-mémoire d'ingénieurs*. Mais que peut-on en conclure?

A la vérité, la question n'est nullement là; elle porte sur les moyens employés par les Grecs pour la détermination des parties fractionnaires des racines incommensurables que l'on rencontre dans leurs écrits. Or il y a, pour ces racines, deux sources principales, la ***Mesure du Cercle*** d'Archimède et les écrits héroniens.

Nous consacrerons une étude spéciale à la première qui présente peu d'intérêt en fait pour notre sujet actuel; car les deux valeurs de $\sqrt{3}$ qu'Archimède prend comme point de départ, peuvent avoir été obtenues, comme je l'ai déjà dit dans mon Essai sur Pappus, par la solution en nombres entiers des équations :

$$3x^2 - y^2 = -1, \qquad 3x^2 - y^2 = 2.$$

D'autre part, l'approximation des autres racines n'est pas poussée suffisamment loin pour asseoir des conclusions certaines : nous nous contenterons donc de dire pour le moment que leur étude ne peut en aucune manière modifier les résultats déduits des racines héroniennes.

Quant à celles-ci, il convient de les distinguer en deux classes : les unes sont données explicitement; j'ai relevé soigneusement toutes les fractionnaires qui ne sont pas exactes, elles se trouvent au nombre de 25. On les verra ci-après et nous allons les étudier les premières; les autres peuvent se tirer indirectement de formules approchées pour la surface des polygones réguliers, en fonction du côté.

Nous essaierons plus loin de restituer l'invention de ces formules, question que M. Cantor (p. 45) a regardé comme suffisant de poser.

IV

Si la méthode des Grecs, pour l'extraction d'une racine carrée, était la même que la nôtre, lorsqu'il s'agissait d'unités entières ou de fractions sexagésimales, en quoi pouvait-elle en différer pour la détermination d'autres fractions? La réponse est facile; en cela seulement que ces autres fractions formaient un système de numération fractionnaire que nous ne pratiquons pas plus que les anciens n'ont pratiqué le système décimal. Quant à la fraction ordinaire, à numérateur et dénominateurs entiers, mais d'ailleurs quelconques, les Grecs la connaissaient bien, et on la trouve déjà dans Archimède; toutefois elle ne semble dominer qu'à partir du

III[e] siècle de notre ère (Diophante). En tout cas, toutes les parties fractionnaires des racines incommensurables dans les écrits héroniens sont exprimées sous une autre forme, *par une suite de fractions dont le numérateur est l'unité et dont les dénominateurs vont en croissant.* Seule des autres fractions que nous employons, $\frac{2}{3}$ jouit du privilège singulier de pouvoir, s'il y a lieu, figurer au premier rang de cette suite.

Ce système de numération, emprunté de toutes pièces aux calculateurs égyptiens, ainsi que le prouve le papyrus de Rhind, a des avantages notables, lorsque, ce qui était l'usage, le dénominateur le plus élevé ne dépasse point 100; avec un peu de pratique, on arrive en effet à opérer très rapidement la multiplication par un tel *quantième,* soit d'un nombre entier, soit d'un autre quantième semblable. Quant à l'addition, pour la réduction de deux quantièmes à dénominateurs égaux et impairs, nous savons, précisément par le document égyptien, qu'elle faisait l'objet d'un exercice particulier. La soustraction exige aussi quelques artifices simples; mais en somme, avec ce système, la pratique des quatre règles est commode et l'approximation satisfaisante pour des besoins ordinaires.

C'est uniquement l'existence de ce système que nous devons avoir en vue, pour l'objet de nos recherches, et nous devons tout d'abord nous demander : un tel mode de numération étant admis, comment ferions-nous *naturellement* pour poursuivre l'extraction d'une racine carrée dont la partie entière est déjà déterminée?

Nous répondrons qu'il faut distinguer et que nous agirions différemment, suivant le degré d'approximation que nous désirons. Or devons-nous espérer que dans tous les exemples des écrits héroniens, les divers auteurs des calculs aient tous cherché le même degré? Évidemment non, et l'examen des racines le prouve surabondamment. Nous devons admettre au moins trois degrés successifs d'approximation.

Supposons d'abord qu'il s'agisse du premier. Ce qu'il y a de plus naturel est évidemment de diviser simplement le reste par le

double de la racine entière et, s'il y a lieu, de décomposer cette fraction en quantièmes. Nous savons d'ailleurs qu'en agissant de la sorte, nous avons la racine par excès.

Combien sur les vingt-cinq racines héroniennes, en trouvons-nous qui peuvent être obtenues de la sorte? Cinq qui sont :

(1) $\sqrt{63} = 8 - \frac{1}{16}$, (*Stereom.* (I), p. 163)

très remarquable en ce que le complément est négatif;

(2) $\sqrt{1125} = 33\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{22}$, (*Stereom.* (II), p. 182)

le complément représente $\frac{36}{66}$;

(3) $\sqrt{1081} = 32\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{64}$, (d° p. 183)

le complément représente $\frac{51}{64}$;

(4) $\sqrt{50} = 7\,\frac{1}{14}$, (d° p. 184)

le complément est immédiatement obtenu.

(5) $\sqrt{75} = 8\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8}\,\frac{1}{16}$, (d° p. 185)

le complément représente $\frac{11}{16}$.

Les quatre dernières de ces racines, qui se suivent dans un des écrits les moins estimables de la collection héronienne, appartiennent évidemment à la même main, et leur comparaison prouve clairement que nous en avons rencontré la véritable explication, alors qu'au premier abord, cette explication, pour une racine isolée comme (3), peut paraître présenter des difficultés insurmontables.

Mais le procédé que nous avons indiqué peut, même pour un premier degré d'approximation, dépasser le but cherché; il conduit en effet le plus souvent à une suite de plusieurs fractions complé-

mentaires, et on peut n'en désirer qu'une seule. Que fera-t-on dans ce cas?

Il s'agit de substituer au quotient du reste par le double de la racine entière, un seul *quantième;* le dénominateur s'en obtiendra naturellement par la division du double de la racine entière par le reste. D'ailleurs, dans cette division, on choisira le nombre entier le plus voisin du quotient exact, et suivant qu'il sera approché par défaut ou par excès, la racine le sera par excès ou par défaut.

Remarquons cependant que si nous employons comme complément la fraction $\frac{2}{3}$, nous devons modifier légèrement cette règle. Si le quotient entier de la division est l'unité, nous aurons à examiner si $1\frac{1}{2}$ ou 2 s'approche davantage du quotient exact. Mais il ne suffira plus, si l'on choisit $1\frac{1}{2}$, c'est-à-dire le complément $\frac{2}{3}$, que ce quotient soit approché par excès, pour que la racine le soit par défaut.

Nous trouvons dans les écrits héroniens quatre racines au premier degré d'approximation qui sont déterminées de la sorte, à savoir trois par excès :

(6) $\sqrt{58\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}} = 7\frac{2}{3};$ (*Geometria*, p. 112)

(7) $\sqrt{444\frac{1}{3}\frac{1}{9}} = 21\frac{1}{12},$ (d° p. 130)

(8) $\sqrt{3400} = 58\frac{1}{3},$ (*Geepon.*, p. 212)

et une par défaut :

(9) $\sqrt{54} = 7\frac{1}{3}.$ (*Stereom.* (II), p. 184)

Les deux racines de la *Geometria* appartiennent à des problèmes où l'on répète, sur d'autres données et avec une rigueur moindre, les calculs de questions précédentes; elles semblent donc ne pas provenir de la source originale. Les deux autres ne doivent pas inspirer plus de confiance.

La dernière est remarquable en ce sens qu'on pourrait l'obtenir en divisant le reste par le double de la racine augmenté d'une unité, suivant un procédé signalé par M. L. Rodet chez des auteurs arabes. Mais l'application tentée de ce procédé aux vingt-cinq racines héroniennes ne réussit pour aucune autre; je suis donc conduit à l'écarter en principe des recherches entreprises ici.

Nous pouvons désormais passer au second degré d'approximation. Comment peut-on le supposer obtenu, toujours suivant la marche la plus naturelle?

Il faut évidemment partir du premier degré, *avec un seul quantième,* former le nouveau reste et le diviser par le double de la racine obtenue. D'ailleurs on pourra, soit décomposer intégralement en *quantièmes* le quotient de cette division (approximation par excès), soit s'arrêter dans cette décomposition en négligeant les termes à dénominateur trop considérables, soit enfin substituer à ce quotient un *quantième* unique, par excès ou par défaut, en suivant le même procédé que tout à l'heure. D'autre part, pour éviter les soustractions et les calculs qu'elles entraînent, il conviendra en principe que le premier degré d'approximation soit par défaut.

Or, en premier lieu, nous trouvons cinq racines où le second quotient est complet.

(10) $\sqrt{135} = 11 \frac{1}{2} \frac{1}{14} \frac{1}{21}$, (*Geometria*, p. 93)

où je considère, par exception, la suite comme représentant les deux termes $\frac{2}{3} - \frac{1}{21}$, obtenus successivement, le premier par excès et par conséquent le second négatif.

(11) $\sqrt{43 \frac{1}{2} \frac{1}{4}} = 6 \frac{1}{2} \frac{1}{13} \frac{1}{26}$, (*Geometria*, p. 94)

où le second quotient est $\frac{3}{26} = \frac{1}{13} + \frac{1}{26}$;

(12) $\sqrt{6300} = 79 \frac{1}{3} \frac{1}{34} \frac{1}{102}$, (d° p. 95)

où il est $\frac{2}{51} = \frac{1}{34} + \frac{1}{102}$ (transformation identique à celle du papyrus de Rhind pour cette fraction);

(13) $\sqrt{1575} = 39\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{51}$. (*Geometria*, p. 95)

(14) $\sqrt{216} = 14\,\frac{2}{3}\,\frac{1}{33}$, (d° p. 110)

Tous ces exemples me paraissent pouvoir être attribués à Héron; il n'en est pas de même des deux suivants, où l'on semble s'être arrêté dans le développement du second quotient :

(15) $\sqrt{356\,\frac{1}{18}} = 18\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{9}$, (*Stereom.* (II), p. 185)

où il aurait été :

$$\frac{13\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{18}}{37} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{9}\,\frac{1}{111}\,\frac{1}{333},$$

et où par suite la racine est prise par défaut :

(16) $\sqrt{356} = 18\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{8}$, (*Geepon.*, p. 217)

où l'on a au contraire forcé le second terme du développement.

$$\frac{13\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}}{37} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{296},$$

et où par suite la racine est par excès.

Dans quatre racines, au lieu de développer le quotient, on lui a substitué un seul *quantième,* dont le numérateur est régulièrement obtenu en divisant le double de la racine obtenue par le reste, une fois en prenant le plus faible entier contenu dans le quotient :

17) $\sqrt{5000} = 70\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ (par excès), (*Geepon.*, p. 212)

trois fois en forçant d'une unité.

(18) $\sqrt{720} = 26 \frac{1}{2} \frac{1}{3}$ (par excès), (*Geometria*, p. 110)

(19) $\sqrt{208} = 14 \frac{1}{3} \frac{1}{12}$ (par défaut), (d° p. 120)

(20) $\sqrt{43 \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{9}} = 6 \frac{1}{2} \frac{1}{9}$ d° (*Stereom.* (II), p. 185)

De ces quatre dernières, je considère comme seule authentique (18) où, à la différence des autres, on s'est astreint à prendre le nombre entier le plus voisin du quotient exact.

Avant d'aller plus loin, faisons deux remarques :

Il y avait lieu de se demander si les anciens avaient pratiqué la règle, aujourd'hui enseignée dans nos écoles, dans le cas où le nombre dont est extrait la racine est fractionnaire, à savoir de le réduire à un dénominateur carré. Les essais que j'ai faits dans ce sens n'ont guère abouti, sauf pour une seule racine que nous n'avons pas encore vue.

(21) $\sqrt{8 \frac{1}{4} \frac{1}{8} \frac{1}{16}} = 2 \frac{2}{3} \frac{1}{4}$ (par excès), (*Geometria*, p. 92)

Elle s'expliquerait très simplement par l'approximation

$$\sqrt{135} = 11 \frac{2}{3},$$

en divisant par 4. Mais l'isolement de ce cas me fait préférer l'hypothèse d'une approximation au troisième degré, où, si l'on prend successivement $\frac{1}{2} \frac{1}{4}$ comme premières fractions de la suite complémentaire, 6 est le plus grand entier contenu dans le quotient $\frac{44}{7}$ du double de la racine obtenue par le reste. La suite $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{6}$ aura ensuite été mise sous une forme plus simple et plus dans les usages de l'école, $\frac{2}{3} \frac{1}{4}$.

J'avoue toutefois que cette déduction compliquée peut laisser

un doute; il n'existe au reste qu'un autre exemple d'une approximation au troisième degré

$$(22) \qquad \sqrt{886 - \frac{1}{16}} = 29\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{68}, \qquad (\textit{Geometria}, \text{p. } 95)$$

où le troisième quotient est complet (approximation par excès).

Reste en second lieu à répondre à une objection possible. Il ne semble pas y avoir une règle précise pour le choix des premières fractions complémentaires; notamment sur les exemples du second et du troisième degré d'approximation, il y en a huit où la plus convenable par défaut est $\frac{2}{3}$; or pour six de ces huit (15) (16) (17) (18) (21) (22), on aurait au contraire choisi $\frac{1}{2}$; de même dans l'exemple (21), la seconde fraction la plus convenable par défaut eût été $\frac{1}{3}$ au lieu de $\frac{1}{4}$. Enfin, dans les deux cas où la première fraction complémentaire est $\frac{2}{3}$, (13) et (14), elle peut représenter $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$, obtenues successivement.

J'estime qu'il y avait en fait à cet égard une certaine latitude laissée au calculateur qui pouvait en principe préférer $\frac{1}{2}$ à $\frac{2}{3}$ pour éviter une fraction au double de la racine obtenue, et qui semble, dans l'exemple (21), avoir, en second lieu, choisi $\frac{1}{4}$ pour éliminer les fractions du reste. Ce sont là des artifices de calcul très admissibles, même dans une méthode régulière; mais cette latitude n'en était pas moins regrettable pour une approximation rapide, et en particulier l'exemple (21) est très peu satisfaisant; aussi ne puis-je guère le considérer comme authentiquement héronien.

Il semble d'ailleurs que ce n'était que dans le cas de l'emploi de semblables artifices, que l'on sentait la nécessité de recourir à un troisième degré d'approximation; en appliquant rigoureusement les règles, le second devait, en thèse générale, suffire aux besoins de la pratique. Il se calculait très rapidement, *beaucoup*

plus rapidement pour une même approximation que nos racines décimales, d'après notre méthode vulgaire. A ce point de vue, on pourrait même regretter que l'enseignement de cette vieille méthode, si naturelle et si simple, ait disparu de nos éléments.

Il nous reste à examiner trois racines des écrits héroniens qui semblent réfractaires à cette méthode.

(23) $$\sqrt{108} = 10 \, \frac{1}{3} \, \frac{1}{15}$$ (*Stereom.* (II), p. 183)

me paraît avoir été obtenu par un artifice particulier. Le calculateur aura remarqué que $\sqrt{108} = 6\sqrt{3}$, et il aura substitué à $\sqrt{3}$ une valeur classique $\frac{26}{15}$, que nous allons retrouver tout à l'heure.

Quant aux racines :

(24) $$\sqrt{2460 \, \frac{15}{16}} = 49 \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{17} \, \frac{1}{34} \, \frac{1}{51},$$ (*Geometria*, p. 96)

(25) $$\sqrt{615 \, \frac{15}{64}} = 24 \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{4} \, \frac{1}{51} \, \frac{1}{51} \, \frac{1}{68},$$ d° d°.

je n'hésite pas à penser qu'elles n'ont jamais été calculées directement.

Pour s'en convaincre, il suffit d'examiner la suite des problèmes des pages 94-96. La valeur (11) sert d'abord à calculer l'aire d'un premier parallélogramme $\left(79 \, \frac{1}{3} \, \frac{1}{26} \, \frac{1}{78}\right)$ et celle d'un second $\left(29 \, \frac{2}{3} \, \frac{1}{13} \, \frac{1}{39}\right)$ qui avec deux triangles, chacun de $24 \, \frac{1}{2} \, \frac{1}{4} \, \frac{1}{26} \, \frac{1}{52}$, recompose le premier. Par les formules (12) (13) (22) (24) (25), on calcule par des extractions de racine : la première de ces aires, sa moitié, la seconde, le double de la dernière, et enfin cette dernière. Puis on établit la concordance; il est évidemment très improbable qu'elle ait pu être obtenue par aucun procédé d'extraction, alors surtout que l'on ne retombe pas exactement sur les aires déjà calculées autrement. Il faut donc croire que (24) a été en réalité calculé par la différence de (12) et de (22) et (25) en

prenant la moitié de cette différence. J'admets au reste que tous ces calculs sont véritablement héroniens.

Je crois être au bout de la première tâche que j'ai entreprise; peut-être certains points de détail restent-ils contestables; mais je crois avoir suffisamment établi que les Grecs de l'école héronienne employaient pour l'extraction des racines carrées une méthode simple; je crois avoir restitué l'ensemble de cette méthode, sur deux éléments essentiels, l'application du théorème fondamental :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et l'emploi des *quantièmes*. C'est au reste ce dernier élément seul qui peut lui donner un caractère particulier. Quand il se trouve que le reste se présente lui-même sous la forme d'un *quantième* (à dénominateur carré), cet emploi peut, avec l'usage de termes négatifs, se borner à la détermination facile de *quantièmes* complémentaires successifs, sans que l'on ait à opérer des décompositions de quotient comme nous en avons vu. Alors on retombe identiquement sur le procédé restitué, dans une note citée plus haut, par M. Léon Rodet, sous le nom du brahmane Baudhâyana. Cette coïncidence est évidemment toute naturelle et n'implique aucune communauté d'origine.

Dans ce cas, on obtient une suite indéfinie de solutions d'une équation de Pell, et c'est là, comme je le montrerai dans une autre étude, qu'il faut sans doute pour ces équations chercher l'origine de la méthode hindoue, et non pas dans les déductions essayées par Hankel. Mais tout en admettant l'originalité de cette méthode, la même raison de simplicité réelle du problème et d'identité des points de départ, a pu permettre aux Grecs d'ébaucher indépendamment, de leur côté, une méthode analogue, et nous avons, notamment en ce qui concerne les valeurs approximatives de $\sqrt{3}$ dans la *Mesure du Cercle* d'Archimède, de fortes présomptions pour croire, ainsi que nous l'avons dit, que le géomètre de Syracuse était en possession de procédés plus ou moins complets pour la solution du problème.

Lorsque j'ai commencé à étudier les racines que l'on peut déduire implicitement des formules héroniennes pour le calcul des aires des polygones réguliers en fonction de leurs côtés, — question que je vais aborder maintenant, — je me proposais particulièrement de rechercher s'il n'y avait pas là de nouveaux arguments possibles en faveur de la thèse que je viens d'énoncer. Ces recherches ont eu, je dois le dire, un résultat négatif; c'est-à-dire que la méthode d'extraction restituée plus haut a toujours suffi. La divination, dans ces conditions, de l'origine de ces formules, n'en présentera pas moins, je l'espère, quelque intérêt pour le lecteur.

V

L'approximation dans les coefficients rationnels des formules héroniennes relatives à la surface des polygones réguliers, est très variable (de la première à la troisième décimale). Pour l'étude de ces formules, nous les diviserons en quatre groupes, suivant que les polygones dérivent du triangle équilatéral, du carré, du décagone, ou enfin que leur surface est transcendante.

1er GROUPE

Formules approchées. — *Formules exactes.*

$$S_3 = \frac{13}{30} a_3^2 = a_3^2 \times 0,433333, \qquad S_3 = a_3^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a_3^2 \,.\, 0,433013,$$

$$S_6 = \frac{13}{5} a_6^2 = a_6^2 \times 2,6, \qquad S_6 = a_6^2 \frac{3\sqrt{3}}{2} = a_6^2 \,.\, 2,598176,$$

$$S_{12} = \frac{45}{4} a_{12}^2 = a_{12}^2 \times 11.25, \qquad S_{12} = a_{12}^2 . 3(2+\sqrt{3}) = a_{12}^2 . 11,196152.$$

Les deux premières de ces formules approchées supposent que l'on a pris

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15};$$

la troisième, au contraire,

$$\sqrt{3} = \frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}.$$

Ici il n'y a point de difficulté; nous sommes en présence d'approximations régulières au second degré (à quotient complet); seulement pour l'une, la première fraction complémentaire est $\frac{2}{3}$, pour l'autre, $\frac{1}{2}$.

La seule question que l'on pourrait poser serait de savoir si la moins grande approximation, pour la surface du dodécagone, vient bien du choix de la valeur $\frac{7}{4}$ et non de ce que les Grecs, ayant obtenu l'apothème sous une forme plus compliquée, comme $\frac{a}{4}\sqrt{7+6\sqrt{3}}$, auraient été incapables de la simplifier.

On peut répondre hardiment par la négative. Qui a étudié en particulier le dixième livre d'Euclide, qui a vu avec quel soin (*Éléments*, XIII, 11) le Maître établit que, lorsque le rayon du cercle circonscrit est rationnel, le côté du pentagone est une *irrationnelle mineure* (ἐλάσσων), ne peut douter que ce ne fût, au moins après lui, un exercice classique que de démontrer que si le côté du dodécagone est rationnel, l'apothème est une *binomiale* (ἐκ δύο ὀνομάτων).

Si donc nous rencontrons deux valeurs différentes pour $\sqrt{3}$, c'est qu'en raison de l'approximation que l'on se contentait d'obtenir (environ $\frac{1}{200}$ d'erreur relative pour le côté égal à l'unité), la première aurait conduit pour le dodécagone à un coefficient $\frac{56}{5}$, jugé trop complexe.

2e GROUPE

Nous n'avons pas à nous occuper du carré, mais seulement de l'octogone.

Formule approchée.	*Formule exacte.*
$S_8 = a_8^2 \frac{29}{6} + a_8^2 . 4,833333,$	$S_8 = a_8^2 . 2(1+\sqrt{2}) = a_8^2 . 4,828427.$

L'approximation, assez remarquable, montre bien que le doute élevé au sujet de la surface du dodécagone n'est pas recevable.

On déduit de là :

$$\sqrt{2} = \frac{17}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12},$$

ce qui est de même une approximation régulière au second degré (quotient complet).

3° GROUPE

Formules approchées.	*Formules exactes.*
$S_5 = a_5^2 . \frac{5}{3} = a_5^2 . 1{,}666666,$	$S_5 = a_5^2 \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4} = a_5^2 . 1{,}720477,$
$S_5 = a_5^2 . \frac{12}{7} = a_5^2 . 1{,}714285,$	
$S_{10} = a_{10}^2 . \frac{15}{2} = a_{10}^2 . 7{,}5.$	$S_{10} = a_{10}^2 . \frac{5}{2} \sqrt{5+2\sqrt{5}} = a_{10}^2 . 7{,}694208.$

Il est clair que, pour le décagone, on s'est contenté de prendre pour $\sqrt{5}$ la partie entière 2; aussi l'approximation n'est guère satisfaisante. Sans doute, on avait dû, comme pour le pentagone, calculer une formule moins inexacte; mais la commodité de celle que nous avons donnée l'aura néanmoins fait conserver, et elle nous est seule parvenue.

La même approximation pour $\sqrt{5}$ (savoir $\sqrt{5} = 2$) conduit à la première formule pour la surface du pentagone, car alors on a :

$$S_5 = a_5^2 . \frac{1}{4} \sqrt{45}.$$

En extrayant la racine carrée au second degré d'approximation avec le quotient complet,

$$\sqrt{45} = 6 + \frac{2}{3} + \frac{1}{24},$$

d'où, en divisant par 4 et négligeant $\frac{1}{96}$, le coefficient

$$1 \frac{1}{2} \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

Cette approximation, très grossière, peut cependant avoir une autre origine; car, d'après une formule que nous allons rencontrer tout à l'heure, les anciens prenaient pour le diamètre du cercle circonscrit au pentagone :

$$d_5 = \frac{5}{3} a_5,$$

en sorte que le rayon, l'apothème et la moitié du côté formaient un triangle rectangle dont les côtés étaient regardés comme proportionnels à 5, 4, 3, d'où s'ensuit immédiatement la formule :

$$S_5 = \frac{5}{3} a_5^2.$$

L'autre formule pour la surface du pentagone, où le coefficient est $\frac{12}{7}$, quoique elle-même soit loin d'être satisfaisante, semble témoigner de tentatives plus intelligentes.

Supposons l'extraction de $\sqrt{5}$ régulièrement faite *par défaut*, au premier degré seulement :

$$\sqrt{5} = 2\frac{1}{5},$$

$$S_5 = a_5^2 . \frac{\sqrt{47}}{4}.$$

Calculons maintenant $\sqrt{47}$ au premier degré par excès avec un quotient complet :

$$\sqrt{47} = 7 - \frac{1}{7},$$

d'où suit immédiatement la formule.

En somme, les valeurs approchées pour ce groupe laissent singulièrement à désirer, et indiquent chez leurs auteurs une réelle inhabileté pour le calcul des irrationnelles de la forme $\sqrt{a + \sqrt{b}}$.

4[e] GROUPE.

Formules approchées.	*Formules exactes.*
$S_7 = a_7^2 \cdot \frac{43}{12} = a_7^2 . 3,583333...,$	$S_7 = a_1^2 . 3,633910...,$
$S_9 = a_9^2 \cdot \frac{51}{8} = a_9^2 . 6,375,$	$S_9 = a_9^2 . 6.181824....$
$S_9 = a_9^2 \cdot \frac{38}{6} = a_9^2 . 6,333333,$	
$S_{11} = a_4^2 \cdot \frac{66}{7} = a_{11}^2 . 9,421571,$	$S_{11} = a_{11}^2 , 9,365502....$

L'examen de ces formules conduit à cette remarque inattendue que l'approximation la plus satisfaisante se rencontre là où on pouvait le moins s'attendre, c'est-à-dire pour l'endécagone. Il y a donc lieu de supposer *a priori* que l'origine de cette formule n'est pas la même que celle des deux autres.

Mais quels moyens peut-on supposer employés par les Grecs pour arriver à l'une quelconque de ces trois approximations?

Nous trouvons dans le *Liber Geeponicus* (p. 225 et suiv.), une relation approchée qui présente un caractère d'antiquité assez accusé; elle consiste, a_n étant le côté d'un polygone régulier de n côtés et d_n le diamètre du cercle circonscrit, à prendre :

$$d_n = n \frac{a_n}{3}.$$

Nous considérons cette approximation comme très ancienne, parce qu'il est facile de voir que $\frac{n a_n}{d_n}$ tend vers π lorsque n augmente, et que dès lors la formule doit remonter à une époque où l'on prenait couramment $\pi = 3$, au lieu de $\pi = \frac{22}{7}$. A la vérité, ni l'une ni l'autre de ces valeurs de π, introduites dans la formule

$$d_n = n \frac{a_n}{\pi},$$

ne constituent une certaine approximation qu'à partir du penta-

gone, et jusqu'à l'ennéagone, le nombre 3, qui donne l'identité pour $n = 6$, a l'avantage. Mais ceci n'infirme pas notre remarque sur une relation donnée comme générale et dont, au reste, si on la prend simplement pour ce qu'elle vaut, l'invention ne présente rien d'extraordinaire.

Or on en conclut :

$$S_n = n\frac{a_n}{2}\sqrt{\frac{d_n^2}{4} - \frac{a_n^2}{4}} = \frac{n a_n^2}{12}\sqrt{n^2 - 9}.$$

Faisons $n = 7$

$$S_7 = a_7^2 \cdot \frac{7}{12}\sqrt{40} = a_7^2\,\frac{\sqrt{1960}}{12}.$$

D'ailleurs $\sqrt{1960} = 44\,\frac{1}{4}$ approximativement.

Comme l'approximation sur le diamètre le donne évidemment trop fort, le calculateur a pu vouloir réduire sur la racine et prendre 43 au lieu de 44. Mais cette réduction était trop forte; $\frac{44}{12} = 3\,\frac{2}{3}$ eût été par excès, il est vrai, mais plus approché et plus commode pour le calcul.

Faisons maintenant $n = 9$.

$$\frac{S_9}{a_9^2} = \frac{9}{12}\sqrt{72} = \frac{1}{4}\sqrt{648}.$$

On a approximativement :

$$\sqrt{648} = 25\,\frac{1}{2},$$

ce qui donne le coefficient $\frac{51}{8}$ de l'une des deux formules pour l'ennéagone.

L'autre $\frac{38}{6}$ correspond au contraire à une racine réduite

$$\sqrt{648} = 25\,\frac{1}{3}.$$

mais la réduction est encore insuffisante, puisque même $24\frac{3}{4}$ serait un peu trop élevé.

Quant à la formule S_{11}, elle n'a certainement pas été obtenue de cette façon.

Tandis que les précédentes, S_7 et S_9, correspondent à des évaluations irrationnelles pour les diamètres des cercles circonscrits en fonction des côtés, on déduit de la valeur donnée à la surface de l'endécagone :

$$d_{11} = \frac{25}{7} a_{11}.$$

C'est donc bien par un procédé distinct que la formule S_{11} a été établie, et ce procédé est au reste facile à reconnaître.

Si l'on identifie à sa corde l'arc du 22ᵉ de la circonférence, soit d'ailleurs f_{11} la flèche pour le côté du polygone régulier de 11 côtés, et soit pris $\pi = \frac{22}{7}$, on a immédiatement

$$\frac{22}{7}\frac{d_{11}}{11} = \sqrt{a_{11}^2 + 4f_{11}^2},$$

et d'autre part :

$$4d_{11}f_{11} = a_{11}^2 + 4f_{11}^2.$$

D'où facilement

$$f_{11} = \frac{a_{11}}{2\sqrt{48}},$$

ou par approximation :

$$f_{11} = \frac{a_{11}}{14},$$

ce qui conduit aux valeurs données plus haut pour d_{11} et S_{11}.

Cette déduction présente un degré de probabilité beaucoup plus marqué que celle que nous avons essayée pour S_7 et S_9, sauf peut-être en ce qui concerne la valeur :

$$S_9 = \frac{51}{8},$$

Mais il suffit à nos prétentions de montrer que ces diverses formules ont dû être obtenues par des procédés très simples, et, vu leur imperfection, il n'y a guère lieu de rechercher plus avant quelle marche a été suivie en réalité pour les établir.

En résumé, ces diverses formules pour la surface des polygones réguliers n'indiquent nullement une science déjà sûre d'elle-même; elles ne doivent être en aucune façon attribuées à Héron, qui ne semble avoir employé que l'approximation la plus satisfaisante et la seule vraiment classique :

$$\sqrt{3} = \frac{26}{15}.$$

Elles se rencontrent dans des additions faites à la *Geometria* en dehors du plan nettement défini de cet ouvrage; elles figurent d'ailleurs une fois sous la rubrique ἐν ἄλλῳ βιβλίῳ *(dans un autre livre)*, une autre fois sous celle : Εὐκλείδου εὐθυμετρικά (p. 134-137). Nous n'hésitons pas à les regarder comme antérieures à Euclide, en thèse générale.

VI

Nous terminerons cette étude en parlant de deux problèmes d'analyse indéterminée que l'on rencontre au milieu des questions de géométrie pratique qui font l'objet du *Liber geeponicus* (p. 218-219).

Nous avons déjà eu occasion de faire allusion à ces problèmes dans notre étude sur Pappus. Voici la traduction du grec, dans laquelle sont indiqués *en italique* les mots pour lesquels j'ai dû m'écarter du texte de M. Hultsch.

« 78. Trouvez deux rectangles [1], tels que *le périmètre du second* » *soit triple de celui du premier* [2] et l'aire du premier triple de » celle du second. Je fais comme suit : *pour le second rectangle* [3] : » Élevez 3 au cube, il vient 27, qui, doublé, donne 54; mainte- » nant retranchez 1, reste 53; *soit* [4] donc pour l'un des côtés » 53 [5] pieds, pour l'autre 54 pieds. Pour l'autre *rectangle* [6] comme

» suit : ajoutez les nombres 53 et 54, ce qui donne 107 pieds ; » multipliez par 3, *il vient 321 ; maintenant retranchez 3* [7], » reste 318 pieds; *soit* [4] donc pour l'un des côtés du premier » rectangle 318 pieds; pour l'autre côté 3 pieds. Il vient pour » l'une des aires 954 [8] pieds, pour l'autre 2862. »

« 79. Trouvez deux *rectangles* [6] dont les périmètres soient » égaux et dont l'un ait une aire quadruple de celle de l'autre. » Élevez 4 au cube, il vient 64; retranchez 1, il reste 63 pieds » pour le *demi* [9] périmètre de chacun des deux *rectangles* [10]. Pour » distinguer les côtés, je fais comme suit : Prenez 4, retranchez 1, » reste 3 ; soit donc 3 pieds pour l'un des côtés. Pour l'autre côté, » comme suit : de 63 retranchez 3, reste 60 pieds. Quant à » l'autre *rectangle* [6], faites comme suit : multipliez 4 par lui- » même, il vient 16 pieds; retranchez-en 1, reste 15 pieds; *que* » *ce soit* [4] là le premier côté. Pour l'autre, comme suit : retran- » chez 15 de 63, reste 48; *soit* [4] pour l'autre côté 48 pieds. Une » des aires est de 720 pieds, l'autre de 180 pieds. »

1. χωρία τετράγωνα, litt. « espaces carrés ». — 2. Lacune du texte à combler. — 3. N'est pas dans le texte. — 4. Le manuscrit donne l'impératif, M. Hultsch met le futur. — 5. Au lieu de νς' (56), il faut lire νγ'. — 6. χωρίου. — 7. Lacune du texte. — 8 Au lieu de τμδ' (344), il faut lire ϡ νδ'. — 9. N'est pas dans le texte. — 10. παραλλήλων πλευρῶν pour « parallélogrammes ».

Ces deux problèmes peuvent se représenter par un seul système d'équations :

$$a(x+y) = u + v,$$
$$xy = buv.$$

Si a et b sont deux nombres entiers donnés, la solution générale s'obtient en posant entre nombres entiers les relations suivantes, α et β étant d'ailleurs arbitraires :

$$a = pq, \qquad a^2b - 1 = rs, \qquad \beta b = mn,$$
$$u = \alpha\beta q, \qquad x = abu + \alpha^2 q^2 nr,$$
$$v = a(x+y) - u; \qquad y = abu + \beta ms.$$

Les solutions héroniennes sont les suivantes :

Pour $a = b$, premier problème :

$$x = 2a^2, \qquad u = a,$$
$$y = 2a^2 - 1, \qquad v = 2a(a^2 - 1).$$

Pour $a = 1$, second problème :

$$x = b^2 - 1, \qquad u = b - 1,$$
$$y = b^2(b - 1), \qquad v = b(b^2 - 1).$$

La solution du second problème, où $b - 1$ entre comme facteur dans les différentes valeurs des inconnues, est loin d'être aussi élégante que celle de la première.

En substituant à ce facteur un autre quelconque β, on trouve la généralisation :

$$x = \beta(b + 1), \qquad u = \beta,$$
$$y = \beta b^2, \qquad v = \beta b(b + 1),$$

que M. Cantor (p. 62) a signalée dans le *Livre de Calcul* de Maxime Planude (éd. Gerhardt, Halle, 1865) écrit au XIVe siècle. Il élève à ce sujet des doutes sur la véritable origine des problèmes dont il s'agit, et ne considère pas comme impossible qu'ils viennent de l'Inde.

Je ferai remarquer qu'au fond ces problèmes sont absolument du genre de ceux auxquels s'appliquent les procédés de Diophante, et que la solution en nombres *entiers et non simplement rationnels* doit être considérée comme un pur accident. Quant à la forme de l'énoncé, elle est très voisine de celle des *Paradoxes* d'Erycinos, au IIIe livre de Pappus, et paraît donc bien appartenir à la première époque de la science grecque. Il est à peine utile de dire que l'attribution de ces problèmes à Héron ne peut être qu'une simple hypothèse.

La forme de la rédaction est particulièrement intéressante; car si l'habitude antique était de présenter ainsi, suivant une marche synthétique, la solution des problèmes d'analyse indéterminée, un ouvrage, comme celui de Diophante, où l'on procède en sens

inverse, était d'une nécessité bien évidente. On aurait ainsi une explication toute naturelle du succès de cet ouvrage et de la disparition subséquente des autres recueils antérieurs dont l'existence est à supposer.

ÉTUDES MÉTÉOROLOGIQUES

DE LA GIRONDE A LA PLATA

PAR M. HAUTREUX

LIEUTENANT DE VAISSEAU

Les résultats assez intéressants que m'avaient fournis les premières recherches faites en 1876 et 1877 sur les températures de la mer, m'ont engagé à prier les capitaines des paquebots des Messageries maritimes de la ligne de Bordeaux à Buenos-Ayres, de continuer et d'étendre le champ de leurs observations. Grâce à leur obligeance, j'ai pu obtenir, pour les années 1878, 1879 et 1880, un nombre de données considérable que je vais essayer de résumer.

La route que suivent les paquebots passe à très petite distance des côtes du Portugal, du Sénégal et du Brésil. Les navires à voile ne peuvent se risquer à si petite distance de terre; ils ne donnent donc que de rares observations sur ces parages; il pouvait y avoir un certain intérêt pour la physique du globe à réunir ces nouvelles données pour voir si la proximité de la côte ne modifiait pas en une certaine mesure les observations météorologiques recueillies plus au large.

La découverte des surfaces froides voisines du banc d'Arguin et du cap Frio que j'avais signalée dans le travail publié par la *Revue maritime* en 1879, l'élévation de température qui se produit dans le golfe de Gascogne pendant l'été, sont des faits qui se sont reproduits avec la même intensité pendant ces deux dernières années : ce qui permet de les considérer comme une manifestation constante produite par des causes générales, indépendantes des modifications que peuvent subir les saisons.

Les éléments météorologiques recueillis montrent bien nettement les régions où règne une certaine stabilité, et celles au contraire où se produisent des oscillations considérables. — Dans les premières, on peut obtenir des moyennes ayant une valeur pratique; dans les secondes, on ne peut songer à un tel résultat.

Les observations prises généralement de quart en quart sont distantes de 40 à 50 milles; elles sont prises pour chaque point quatre fois par mois, en sorte qu'avec les années antérieures, les moyennes sont basées sur une trentaine d'observations par chaque carré de 2° 30′ de côté.

Les recherches ont porté sur l'étude du baromètre, des vents, des courants et du thermomètre, surface de la mer et air.

Baromètre.

Entre les parallèles de 35° latitude Nord et de 30° latitude Sud, le baromètre est généralement assez stable pour qu'on puisse établir des moyennes suffisamment rigoureuses. Les tracés affectent un parallélisme remarquable; mais au delà de cette région, tant au Nord qu'au Sud, les oscillations en sens contraire sont assez fréquentes et assez étendues pour enlever toute utilité pratique aux moyennes.

Dans ces limites : de hautes pressions règnent uniformément vers le 30° latitude Nord et vers le 20° latitude Sud.

Ces deux zones de hautes pressions sont séparées par une région de basses pressions existant entre 10° et 15° de latitude Nord.

Le centre des hautes pressions barométriques Nord descend vers les Canaries pendant l'hiver; il remonte vers Madère pendant l'été.

Le centre des hautes pressions barométriques Sud descend près de Sainte-Catherine pendant l'hiver austral, et remonte vers les Abrolhos pendant l'été austral.

Dans la zone des hautes pressions Nord, le maximum a lieu vers janvier, à 769^{mm}; le minimum a lieu vers juillet, à 765^{mm}.

Dans la zone des hautes pressions Sud, le maximum a lieu vers juillet, à 769^{mm}; le minimum a lieu vers décembre, à 763^{mm}.

Ainsi, au maximum Nord de janvier correspond le minimum Sud, et au minimum Nord de juillet correspond le maximum Sud.

Dans la zone des basses pressions, le baromètre oscille entre 758^{mm} en janvier et 762^{mm} en juin.

C'est la région des calmes et des hautes températures.

Ce minimum barométrique est le plus au Nord vers 15° latitude nord en juillet, et c'est vers 5° latitude Nord qu'il se trouve en janvier.

En sorte que, pendant notre été, la chute barométrique n'est que de 3^{mm} à 4^{mm} pour une distance en latitude de 350 lieues, tandis que pendant notre hiver la chute barométrique est de 12^{mm} à 13^{mm} pour une distance en latitude de 450 lieues.

C'est cependant pendant l'été que les vents du Nord soufflent avec le plus de force. Ce n'est donc pas seulement le gradient barométrique qui détermine leur force, et nous rencontrons ici le premier indice des modifications produites par le voisinage de la terre.

Les Vents.

La régularité des vents est liée à celle des pressions barométriques.

D'une façon générale, on peut dire que l'air s'écoule des régions de hautes pressions vers les régions de basses pressions, en inclinant plus ou moins vers l'Ouest; que les calmes se trouvent dans la région des basses pressions, et que lorsque des faibles pressions existent dans les parages de Sainte-Catherine, elles correspondent avec l'existence de vents du N.-E. sur la côte du Brésil.

En dehors des limites des pressions barométriques stables, les vents deviennent variables en force et en direction.

Alisés du N.-E.

Leur direction devient Nord en mai, juin et juillet; elle est E.-N.-E. en décembre, janvier et février.

C'est pendant l'été qu'ils sont plus forts; leur plus grande force

correspond à l'époque où la différence barométrique entre le centre des hautes pressions et celui des basses pressions est la plus faible.

C'est au contraire pendant l'hiver où cette différence barométrique est la plus forte que ces vents ont le moins de vigueur.

Par suite, la force des vents alisés ne dépend pas de la chute barométrique, non plus que de la distance du centre des hautes pressions.

Les deux éléments force et direction semblent liés à l'état thermal du continent africain qui, pendant l'été, attire les masses d'air voisines des côtes avec plus de force que pendant l'hiver.

Calmes équatoriaux.

La route des paquebots traverse obliquement la région équatoriale, elle coupe la ligne vers le 30e méridien; les données sont conformes à celles des cartes *Toynbee.*

C'ést en mars que les vents du N.-E. descendent le plus au Sud;

En juin, que les vents du S.-E. remontent le plus au Nord;

En août, que le mousson du S.-O. se fait sentir avec le plus de force.

Alisés du S.-E.

C'est en juillet et août qu'ils règnent tout le long de la côte du Brésil et qu'ils ont le plus de force; pendant notre hiver, ils deviennent N.-E. près de la côte, et cet effet est au maximum en mars et avril. C'est ici bien évidemment une déviation produite par le voisinage de la côte et due à la surchauffe du continent sud américain.

Dans le golfe de Sainte-Catherine, les vents sont du N.-E. pendant notre printemps; les hautes pressions australes se sont déplacées vers le Sud, et une dépression barométrique existe vers le 30e parallèle Sud; c'est l'époque où les plaines de la Plata sont le plus échauffées.

Températures de la mer.

Golfe de Gascogne.

Les eaux du milieu du golfe ont une température plus élevée que celle des eaux qui baignent le cap Finistère et qui sont le long des côtes de Gascogne, depuis le mois de mai jusqu'au mois de novembre, pendant la période des faibles brises; la différence thermale dépasse 2°.

De Lisbonne aux Canaries.

La température augmente régulièrement de 4° à 6° pour cet espace; c'est en novembre que l'augmentation est la plus forte, en mars qu'elle est la plus faible.

Des Canaries au banc d'Arguin.

Diminution de température de 2° à 2°5 pendant les mois d'avril à novembre; diminution moins marquée mais existant toujours pendant les mois d'hiver.

Le centre de la dépression est par 20° latitude Nord de janvier à juin; il est par 22° latitude Nord de juillet à octobre; il descend au Sud lorsque les courants portent au Sud ou à l'Ouest; il remonte lorsque les courants portent au Nord ou Nord-Ouest.

La force des vents alisés n'apporte pas de modification sensible dans la chute thermale.

Lorsque, par suite des quarantaines, les paquebots ont dû éviter Dakar et passer dans les îles du Cap-Vert, soit à environ 60 lieues dans l'Ouest du banc d'Arguin, cet effet de chute thermale ne se produisait pas; on doit donc en conclure que la dépression thermale est tout à fait voisine de la côte et liée à cette proximité.

Du banc d'Arguin à Dakar.

Augmentation thermale très rapide en septembre et octobre, de 8° à 9°; — augmentation la plus faible, 3° seulement, en mars et avril.

Dans l'un et l'autre cas, les vents sont frais et franchement N.-E., les modifications thermales ne sont donc pas dues aux vents.

De Dakar à l'Équateur.

C'est la région du maximum thermal. Sur la route des paquebots on le rencontre de juin à octobre, vers 12° latitude Nord; en mars et avril, vers 5° latitude Nord; il correspond à la région des calmes.

De l'Équateur à Pernambuco.

C'est en mai et juin qu'a lieu le maximum thermal à 28°; c'est en août qu'a lieu le minimum à 25°.

Un léger abaissement de température concorde avec les courants équatoriaux, portant à l'Ouest et à l'Ouest-Nord-Ouest.

De Pernambuco aux Abrolhos.

La température diminue progressivement jusqu'aux Abrolhos : la chute la plus rapide, environ 2°, a lieu en août et septembre. C'est l'époque où les vents du S.-E. sont plus irréguliers, c'est celle des calmes.

Cap Frio.

Aux environs de Rio-Janeiro et jusqu'au cap San-Thomé, se trouve une dépression thermale très accusée; la température de l'eau baisse de 3° à 4° suivant la saison; elle est presque uniforme à 20° du mois de juin au mois de novembre, et n'atteint que 24° en mars.

Les vents sont généralement faibles et sans direction bien constante; il ne semble pas que cet effet puisse leur être attribué.

De Rio-Janeiro à la Plata.

La température augmente vers 25° latitude Sud et atteint son maximum à 26° vers le mois de mars. C'est pendant l'été austral, du mois de décembre au mois de juin, que l'augmentation thermale, en allant vers le Sud, est la plus considérable et atteint 3° depuis Rio-Janeiro jusqu'à Sainte-Catherine.

Les vents sont en général trop variables pour être la cause de l'effet produit.

Au sud de Sainte-Catherine, la température baisse rapidement jusqu'au cap Sainte-Marie ; la chute thermale atteint 10° en juillet et août ; elle est de 4° de janvier à mars.

Les eaux du fleuve de la Plata, dont la température est souvent bien plus élevée que celles de l'Océan, ne paraissent pas être rencontrées par les paquebots, car même par les vents du S.-O. si violents de cette région, on ne trouve pas de modification bien sensible dans l'état ordinaire des températures.

Températures de l'air.

Les températures de l'air, naturellement bien plus variables que celles de la mer, présentent d'abord des oscillations diurnes variant de 3° à 4° dans la région des vents alisés du N.-E. et du S.-E., et de 2° seulement dans la région équatoriale. La moyenne de ces oscillations suit assez exactement les modifications de température de l'eau.

De Lisbonne au banc d'Arguin.

La température de l'air est supérieure à celle de l'eau de 2° à 3°, depuis avril jusqu'à septembre. Cette différence s'efface pendant l'hiver.

De Pernambuco à Rio-Janeiro.

La température de l'air est supérieure à celle de l'eau, le long de la côte du Brésil, depuis décembre jusqu'à mars.

La dépression thermale du cap Frio est sensible dans l'air, depuis juillet jusqu'à décembre, et cependant c'est l'époque des vents du N.-E. qui sont de provenance équatoriale.

Les courants.

Par la façon même dont les navires peuvent apprécier les courants qui les ont entraînés, il n'est pas possible d'affirmer les résultats avec la même rigueur que pour les éléments qui

peuvent être relevés de quart en quart. On ne peut qu'indiquer les faits qui ont été observés, et la relation qu'ils paraissent avoir avec les autres éléments météorologiques plus précis.

Côtes du Portugal.

En mars, août et octobre, on a trouvé de forts courants portant au S.-E. et au S.-O., les vents étaient forts du N.-O. au N.-N.-E.

En avril, mai et juin, les courants portaient au Nord, les vents étaient S.-O.

Les directions vent et courants concordaient.

De Lisbonne aux Canaries.

En été, les courants ont porté vers le détroit au S.-S.-E. de Lisbonne à Madère et vers le S.-O. de Madère aux Canaries.

En hiver, les courants ont porté vers le N.-O. de Lisbonne à Madère, et vers le détroit au N.-E. de Madère aux Canaries.

En été, les vents dépendent du Nord et N.-O. de Lisbonne à Madère; ils sont N.-E. de Madère aux Canaries.

En hiver, les vents sont S.-E. et S.-O. de Lisbonne à Madère; ils sont faibles du N.-E., ou bien ce sont des calmes depuis Madère jusqu'aux Canaries.

Les directions vent et courants concordent, et le mouvement d'appel vers le détroit se fait suivant la direction générale des vents, soit par les eaux portugaises, soit par les eaux africaines.

Les températures de la mer concordent avec les courants; pendant l'été où les courants viennent du Nord, les températures n'augmentent que de 4°; pendant l'hiver, où les courants viennent du Sud, les températures augmentent de 6°.

Des Canaries à Dakar.

En mai, juin et juillet, époque des vents frais du Nord, les courants ont porté vers l'Ouest en travers du vent.

En septembre, novembre et décembre, des courants de 20 milles ont porté au N.-O., les vents étaient N.-E.; il n'y a donc pas concordance entre la direction des vents et celle des courants.

C'est à l'époque où les courants ont porté à l'Ouest que les températures ont été les plus basses près du banc d'Arguin.

C'est de juillet à novembre où les courants remontent du Sud vers le Nord que la température de l'eau atteint son maximum à Dakar.

Ainsi, dans cette région, il n'y a pas concordance entre la direction des vents et celle des courants, mais il y a concordance entre la direction des courants, et les modifications de température de l'eau.

De Dakar à l'équateur.

Pendant l'été du mois de mai au mois d'octobre, les courants ont porté N.-E., E. et S.-E. avec des vitesses de 20 à 30 milles; c'est l'époque où les vents du S.-E. remontent le plus au Nord et se transforment en moussons du S.-O.

Les directions vent et courant ne concordent pas et sont perpendiculaires.

Les températures de la mer concordent avec le mouvement des eaux, le maximum thermal se trouvant toujours dans le contre-courant équatorial.

De l'équateur à Pernambuco.

Les courants portant toute l'année vers l'Ouest, c'est de juillet à novembre qu'ils sont le plus violents, vers l'O.-N.-O., vitesse 30 milles; c'est l'époque où les vents du S.-E. sont frais.

Les directions vent et courant concordent.

Les températures de la mer sont les plus faibles à l'époque où les courants sont le plus violents; la baisse thermale se lie à la vitesse du courant équatorial pendant les mois d'été : c'est une conséquence de la présence, sous l'équateur et vers le 15° méridien, d'une vaste région froide dont la température n'est que de 23°.

Ainsi, dans toute la région équatoriale, depuis Dakar jusqu'à Pernambuco, les températures de la mer sont liées à la direction des courants, dont le mouvement tourbillonnaire est bien marqué.

Le maximum thermal correspond au contre-courant vers l'Est;

Le minimum thermal concorde avec le centre même du grand courant portant vers l'Ouest.

De Pernambuco aux Abrolhos.

D'avril à septembre, des courants de 25 milles portent vers le N.-O.; c'est l'époque des vents du S.-E. frais.

Les courants portent vers le S.-O. avec des vitesses de 10 à 20 milles d'octobre à mars, c'est l'époque où les vents tournent au N.-E. et des calmes.

Les températures de la mer sont faibles à 25°, de juin à novembre, pendant que les eaux viennent du Sud; elles sont au contraire fort élevées à 27°, de janvier à avril, quand les eaux viennent de l'équateur.

Dans cette région les directions vent, courant et les températures de la mer concordent entre elles.

Cap Frio.

De juin à décembre, les courants ont porté au S.-E., vitesse 12 milles; de janvier à mai, ils ont porté N.-E. et N.-O., vitesse 20 milles; leur direction est souvent contraire à celle du vent.

Les températures les plus basses ont eu lieu avec les courants portant au S.-E.; les plus hautes avec les courants portant au N.-O.

Lorsque les courants portent au large, la température s'abaisse; elle s'élève au contraire lorsque les courants portent vers la terre. C'est un phénomène de même nature que celui qui se produit aux environs du banc d'Arguin.

De Rio à la Plata.

De novembre à mai, les courants portent au S.-O. avec des vitesses de 20 à 30 milles; c'est l'époque des vents variables, vers Sainte-Catherine.

Pendant la saison des vents du N.-E., au sud de Sainte-Catherine, il se produit un contre-courant portant au N.-E., vitesse 15 à 20 milles, de mars à septembre.

Il semble donc qu'un mouvement tourbillonnaire existe dans le golfe de Sainte-Catherine pendant l'hiver austral.

Les basses températures que l'on observe de juin à octobre, au nord du cap Sainte-Marie, se relient bien avec ces courants au N.-E. qui ne concordent pas avec la direction des vents.

Dans cette région, les courants sont particulièrement dangereux, car tantôt ils sont le résultat de l'impulsion des vents violents du S.-E. et du S.-O., tantôt ils sont le résultat de renverses aussi violentes que les courants directs et atteignent 30 et 35 milles.

RÉSUMÉ.

Baromètre. — Les pressions barométriques présentent une grande régularité d'allures entre les parallèles de 35° latitude Nord et 25° latitude Sud.

De hautes pressions existent vers les Canaries et vers le cap Frio; elles sont séparées par une zone de faibles pressions aux environs du cap Vert.

Les hautes pressions atteignent leur maximum pendant l'hiver propre de chaque hémisphère; les basses pressions équatoriales coïncident avec la région des calmes.

Les hautes pressions concordent avec les basses températures, et les basses pressions avec les hautes températures.

Vents. — La régularité des vents est liée à celle des pressions barométriques; leur force ne dépend pas seulement de la déclivité barométrique, mais aussi de l'état thermal des continents voisins. Leur direction près des côtes est déviée par l'élévation de température des terres.

Au delà des régions de hautes pressions, dans les deux hémisphères, la force et la direction des vents sont les conséquences des mouvements cycloniques indiqués par les oscillations barométriques.

Courants. — La direction des courants concorde avec celle des vents et avec leur force, depuis le golfe de Gascogne jusqu'aux

Canaries; depuis l'équateur jusqu'au cap Frio, et souvent depuis Sainte-Catherine jusqu'au cap Sainte-Marie.

Mais les directions vent et courant ne concordent pas :

1° Depuis les Canaries jusqu'à l'équateur, où elles sont souvent perpendiculaires l'une à l'autre;

2° Aux environs de Rio-Janeiro et dans le golfe de Sainte-Catherine, où elles sont souvent contraires.

Sur le parcours des paquebots, le mouvement général des eaux peut se dessiner ainsi :

	LES COURANTS PORTENT :	
Hiver.		
	Le long de la côte de Portugal...... au	N.-O.
	De Madère aux Canaries..............	N.-E.
	Des Canaries à Dakar.................	Ouest
	Contre-courant équatorial............	S.-E.
	Courant équatorial..................	O.-N.-O.
	Le long de la côte du Brésil...........	S.-O.
	Cap Frio............................	S.-E.
	Sainte-Catherine et Plata.............	S.-O.
Été.		
	Le long du Portugal..................	Sud et S.-E.
	De Madère aux Canaries..............	S.-O.
	Des Canaries à Dakar.................	S.-S.-O.
	Contre-courant équatorial............	Est
	Courant équatorial..................	Ouest
	Le long de la côte du Brésil...........	N.-O.
	Cap Frio............................	N.-E. et S.-E.
	Golfe Sainte-Catherine................	Ouest et N.-O.
	Côte de la Plata......................	N.-E.

Ainsi le cap Vert et le cap Frio semblent tous deux séparer nettement les eaux équatoriales des eaux de provenance polaire.

Températures de la mer. — Dans le golfe de Gascogne, pendant l'été, la température s'élève bien davantage que sur les côtes; ces eaux ne sont pas entraînées dans le mouvement de dérive général de l'Océan; elles ne peuvent avoir que des mouvements giratoires de peu d'étendue.

Aux environs du banc d'Arguin il existe un abaissement de température généralement bien limité, qui prouve que les eaux de la surface des régions environnantes ne s'y rendent pas.

C'est en avril, mai et juin, que le phénomène est le plus accusé; je l'ai attribué dans un travail précédent au surgissement à la surface des eaux inférieures faisant partie du grand courant sous-marin de dérive des eaux polaires.

C'est aussi dans les mois de grande dérive des eaux glaciaires en avril, mai et juin, que la dépression thermale est la plus marquée.

Toute cause qui facilite la division des eaux de la surface en les poussant dans des directions divergentes, permet aux eaux inférieures de se frayer un chemin vers la surface pour se mélanger et se confondre avec les grands courants qui de l'équateur se rendent vers les régions polaires.

C'est probablement parce que c'est pendant l'été seulement que les vents du S.-E. s'infléchissent au S.-O. dans le golfe de Guinée, que les eaux poussées vers le N.-O d'un côté, et vers le N.-E. de l'autre tendent à se diviser et permettent le surgissement de la vaste nappe d'eau froide qui de juin à octobre persiste, sous le méridien du cap des Palmes, sur l'équateur même.

C'est une cause analogue qui produit le même effet au cap Frio. La dépression thermale est d'autant plus marquée que les eaux environnantes sont plus chaudes, de février à juin; c'est à cette époque que les vents sont N.-E. dans le golfe de Sainte-Catherine, sont S.-E. vers les Abrolhos; la direction divergente des vents tend à diviser la surface vers le cap Frio et permet ainsi aux eaux inférieures d'y aboutir.

Ces dépressions thermales bien étudiées peuvent avoir des applications utiles d'une certaine importance : ainsi c'est certainement à la présence des eaux froides près du cap Frio que l'on doit attribuer la présence des baleines franches, car on sait que ces animaux n'aiment pas les eaux chaudes.

C'est très certainement aussi à la zone froide du banc d'Arguin qu'est due cette particularité connue depuis longtemps, que dans la partie de mer située entre les Canaries et le Sénégal on pêche, en abondance, de la morue et d'autres poissons excellents et de bonne conservation. Il est clair que l'étude plus

complète de ces régions spéciales, des limites de leur étendue, de leurs déplacements, pourrait avoir pour l'industrie de la pêche une grande utilité.

Températures de l'air. — La moyenne diurne des températures de l'air suit constamment et à de faibles écarts la température de l'eau. En raison du frottement des molécules d'air sur la mer, il se produit nécessairement un mouvement de rotation vertical, voisin de la surface, qui amène l'air à la température de l'eau.

Bordeaux, mai 1880.

(*Voir les tableaux.*)

BAROMÈTRE.

LATITUDES	LONGITUDES	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
45° N	7° O	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.
40	12	d°	d°	d°	d°	d°	764	764	d°	d°	d°	d°	d°
35	13	d°	d°	d°	767	767	766	765	765	d°	d°	d°	d°
30	16	769	769	768	767	767	766	765	765	766	766	766	769
25	19	766	768	768	765	765	764	762	763	765	765	765	766
20	20	764	766	767	763	768	762	760	762	762	763	763	764
15	20	761	763	765	760	762	761	760	761	762	761	763	763
10	24	759	761	761	760	762	763	761	762	763	760	761	762
5 N	27	759	762	762	761	761	763	761	763	764	761	762	759
0	31	758	768	763	761	761	763	762	763	764	762	762	761
5 S	35	759	762	762	760	761	762	764	765	765	763	762	761
10	38	761	768	762	762	763	764	766	766	765	765	764	763
15	40	762	765	764	763	764	767	769	767	766	766	765	764
20	42	760	762	765	764	766	767	765	769	765	765	763	763
25	47	759	759	762	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	762	Oscillat.	Oscillat.	763	762	760
30	50	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.	d°	d°	d°	Oscillat.	d°	d°	Oscillat.	Oscillat.	Oscillat.
35° S	56	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°	d°

DIRECTION ET FORCE DES VENTS OBSERVÉS.

LATITUDES	LONGITUDES	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
42°30	12°	N-E 6	S-O 7	E-S-E 3	O 5	E-N-E 2	S-O 3	S-O 4	S-O 4	S-E 3	S-E 4	E 7	N-E 4
40	12	E 5	N-O 7	Variable	N-O 5	N-E 3	S-O 5	N O 3	S-O 3	N-E 3	N-E 4	E 6	S 3
37.30	12	E 4	S-O 8	E 2	N-O 5	Calme	S-O 2	N-O 5	N 5	N 2	N 4	Calme	E-S-E 4
35	13	Variable	N-O 7	E-N-E 3	N-E 5	N 5	N-E 3	N 3	N 5	N 3	N-N-E 3	Variable	E 3
32.30	15	E-N-E 3	Calme	Calme	N-O 5	N-E 4	N-N-E 3	N-N-E 3	N-N-E 5	N-E 4	N-E 3	S 6	N-E 2
30	16	E-N-E 2	Variable	N-N-O 4	N-E 4	N-E 3	N-E 3	N 4	N-E 4	N-E 4	N-E 3	S-O 5	N-E 3
27.30	17	E-N-E 3	Variable	N-N-O 5	N-E 3	N-E 4	N-E 5	N 5	N-E 3	N-E 5	N-N-O 4	S-O 6	Variable
25	19	N-E 4	N-N-O 3	N 2	N-E 3	N-E 3	N-E 5	N 4	N-E 3	N-E 6	N-E 4	N-O 4	E 3
32.30	20	N-E 3	E-N-E 2	N 3	N-E 4	N-E 3	N 5	N-N-E 5	N 2	Calme	Calme	Calme	E 4
20	20	Calme	N 2	N-N-E 4	N-E 4	N 3	N 5	N-N-O 4	Calme	N-E 5	N-E 5	N-E 3	N-E 5
17.30	20	N-E 5	N-N-E 4	N-N-E 5	N-E 3	N 4	N 5	N-N-O 3	S-O 2	N-N-E 5	N-E 5	N-E 3	E 3
15	20	N 3	N-E 3	N-N-E 5	Calme	N 3	N-E 3	N-N-O 4	S-O 4	Calme	N-E 5	N-N-E 3	N-E 5
12.30	22	N-E 4	N-E 3	N-E 5	N 4	Variable	N 3	N-N-O 3	S-O 5	Calme	O-S-O 4	N-E 3	E-N-E 4
10	24	N-E 4	Calme	N-E 5	N-E 3	N-E 3	Calme	N 2	S-O 5	Calme	O-N-O 2	Calme	E-S-E 3
7.30	26	Calme	N-E 3	N-E 4	N 3	N-O 3	Calme	Variable	S-O 4	Calme	Calme	Calme	Calme
5	27	E-S-E 3	N-E 3	N-E 3	N 2	S-E 2	S 1	Calme	Calme	Calme	Variable	S 2	Calme
2.30	29	E-S-E 3	Calme	Calme	Calme	S-E 2	S-E 2	S 5	S-E 4	S-E 3	Calme	S-E 3	S-E 3
0	31	S-E 1	S-E 1	Calme	Calme	S-E 1	Calme	S-S-E 5	S-E 4	S-E 3	S-S-E 1	S-E 3	S-E 3
2.30	33	S-E 2	S-E 2	S-E 2	S-E 2	S-E 2	S-E 2	S-E 3	S-E 5	S-E 4	S-E 2	S-E 3	S-E 4
5	35	S-E 3	S-E 3	E-S-E 1	S-E 4	S-E 2	S-E 3	S-E 4	S-E 5	S-E 3	S-E 2	S-E 4	S-E 4
7.30	37	S-E 4	E-S-E 3	E-N-E 2	S-E 3	S-E 3	E-S-E 3	S-E 5	S-E 5	S-E 4	S-E 2	E 2	E-S-E 3
10	38	E 4	E-S-E 3	Calme	E 2	E 3	E 5	S-E 5	S-E 5	S-E 4	E-S-E 3	Calme	E 2
12.30	39	E-S-E 5	E 2	N-E 2	N-E 1	E-S-E 4	S-E 5	S-E 4	S-E 6	S-E 4	E-S-E 3	N-E 3	E 2
15	40	E 4	E 2	Calme	E 1	S-E 3	S-E 5	E 3	E 4	E 3	E-S-E 4	E-S-E 1	N-E 3
17.30	41	E 3	N-E 3	N-E 2	N-E 3	S-E 3	Calme	E 3	Calme	E 3	S-E 3	S-E 3	N-E 4
20	42	N-E 4	N-N-E 3	E 3	Calme	S-E 4	E 3	S-E 4	N-E 3	Calme	N 4	N-E 3	N-E 4
22.30	43	Variable	N 2	Calme	N-O 2	S-E 5	Variable	N-E 3	N-E 3	N-N-E 3	Variable	N 3	Calme
25	47	Calme	S-O 4	N-E 3	N-E 3	N-E 4	N 3	N 2	N-E 5	Variable	N-E 4	N 3	E-N-E 3
27.30	48	N 3	S-E 3	Variable	S 3	N-N-E 3	S 3	O-N-O 5	N-E 4	E 3	N-N-E 3	N-N-E 3	N-O 2
30	50	N-N-E 4	S-O 5	S-O 5	E 4	Variable	Calme	Variable	S-E 4	Calme	S-E 3	N-E 3	E 5
32.30	53	S-E 5	Variable	E 4	Variable	Variable	Calme	N-E 4	Variable	S-O 5	S E 3	N-E 4	S 5
35	56	N-E 4	S-S-O 3	N-E 3	Variable	Variable	N-O 3	N 3	Variable	Variable	N-E 3	N-E 3	S-O 4

En octobre, par 20° latitude Nord, le *Niger* a essuyé une tornade de 100 lieues de diamètre. Rotation du vent : S.-O., S., S.-E., E., N.-E.

DIRECTION DES COURANTS OBSERVÉS. — Leur vitesse en milles par 24 heures.

LATITUDES	LONGITUDES	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
45°	7°	S-O 12	»	»	N-E 6	N-E 10	N-O 10	»	»	N-E 6	»	»	S-O 10
42.30	12	»	»	S-O 36	»	»	N 10	»	S-O 30	»	S 10	S-O 10	»
40	12	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»	»
37.30	12	»	»	»	E 6	»	N-E 20	»	S 10	N 6	»	»	»
35	13	O 12	S 20	N-E 20	»	S-O 6	N 20	»	S-O 10	O 6	»	N-O 15	O-S-O 20
32.30	15	N 6	S 20	E 6	N-E 6	N 6	S 10	E-O 6	S 10	N-O 10	N-E 10	N-O 6	N-S 15
30	16	»	N-E 20	S-O 6	S-O 20	S-O 6	S-O 10	N-S 6	O 10	N-O 10	N-S 6	S-E 10	E-O 10
27.30	17	S-O 6	S 15	S-E 6	O 24	N 6	O-S-O 20	E-O 6	O-S-O 10	O 10	»	N-O 10	E-O 15
25	19	S-O 18	O 15	S 6	S-S-O 20	S-O 6	S-S-O 10	S-O 20	S 6	S-E 6	»	S 6	»
22.30	20	S-O 6	»	»		S-O 6	S-O 20	S-E 10	»	S-O 10	»	S-O 20	N-O 25
20	20	S-S-O 10	N-O 10	O 6	S-S-O 10	S-S-O 10	O 15	S-S-O 10	»	O 10	»	N-O 20	N-O 20
17.30	20	»	O-S-O 10	»	»	»	E-O 10	S 6	N-O 15	O-N-O 20	N-S 6	S-O 10	N 20
15	20	S-O 6	O 6	S-S-O 10	E 6	»	N 10	N-E 6	S 10	O-N-O 10	»	O 6	»
12.30	22	O-S-O 10	S-O 10	S-S-E 15	»	O 10	»	N-E 6	S-E 10	S-O 6	»	O 6	S-O 10
10	24	O-N-O 15	S-E 6	S 10	N-E 20	N-O 10	E 24	E 15	N-E 20	S 6	E-O 10	N 6	N-E 15
7.30	26	O-N-O 10	N 6	S-E 20	S-E 6	S-E 20	N-E 15	E 6	E-S-E 20	E 20	S-E 10	O 6	S 20
5	27	S-E 20	E 10	S-O 20	O 30	N-E 20	E 20	E 10	N-O 20	S-O 15	N-E 20	E 6	N-O 25
2.30	29	S-E 20	E-N-E 10	O 15	E-O 24	E 20	N 15	N-E 30	O 20	E-S-E 30	E 20	O 15	O 15
0	31	O 30	O-N-O 30	O-S-O 20	O 24	S-E 20	N 10	O-N-O 24	O 30	O 10	O 10	O 30	N-O 30
2.30	33	O 36	O-S-O 15	O-S-O 24	N-O 10	N 10	N-O 15	O-S-O 36	O-S-O 30	S-O 10	N-O 10	O 25	O 15
5	35	O-S-O 24	O-N-O 20	O-S-O 30	S-O 40	O 24	O-N-O 15	O-N-O 20	O-N-O 24	N-O 20	O 15	O-N-O 10	S-O 10
7.30	37	O-S-O 24	S-O 10	E-O 6	O 30	N-O 20	S-O 30	O-S-O 20	O 30	N-O 20	O 10	O 15	N-O 6
10	38	O 12	S-O 15	O 6	N-O 20	O 10	O-N-O 20	O 6	N-O 24	»	S-O 10	S-O 15	O-N-O 10
12.30	39	S-O 20	N-S 6	O 6	O 10	N-O 6	N-O 6	N-E 20	»	N-S 10	E 6	N-E 10	O 10
15	40	S-O 30	O 6	S 6	N-O 10	O 6	»	N-O 10	N-E 10	S 6	»	N-O 15	S 6
17.30	41	O 15	S 24	S-E 6	S-E 6	O 10	O-S-O 6	S-O 10	S-O 30	»	N-O 6	»	S-O 20
20	42	E 24	»	O-N-O 20	N-S 6	E-O 15	O 6	S-O 15	S-O 10	E 6	S 10	S-E 25	S-E 20
22.30	43	S-O 20	S 6	S 20	S-O 6	N-E 20	S 15	N-O 10	»	S-O 10	N-E 10	»	»
25	47	S-O 24	S-O 24	S-O 20	S-O 15	S-O 15	»	O 6	»	N-O 15	N-O 10	S-O 25	S-O 10
27.30	48	S 15	N-O 15	S 10	O-N-O 36	S-O 30	S-O 20	N 6	E-O 25	N 15	S-O 36	S-O 25	N 20
30	50	S 20	S-O 15	»	E-O 10	S-O 30	N-E 10	E 6	S-O 30	»	S-E 6	S-O 20	»
32.30	53	Variable	E-O	N-E 10	E-O 20	O 15	E 6	N-E 15	O 25	S-O 6	S 15	»	N-E 15
35	56	»	Variable	S 6	E-O 36	Variable	N 6	E 30	S-E 30	N-E 10	N-O 10	»	N-E 30

TEMPÉRATURES DE LA MER.

LATITUDES	LONGITUDES	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Septembre	Octobre	Novembre	Décembre
45°	7°	12°	11°	12°	12°	14°5	16°5	17°	19°	19°	17°	14°5	13°
42.30	12	13	12.3	12.5	12.2	13.4	15.6	16.4	17.9	17.4	14	13.4	13
40	12	14.8	14.6	13.7	14.1	14.6	16.5	16.9	18.1	18.6	17.5	15.7	14
37.30	12	16	15.3	15	15	15.5	18	17.6	20.2	20	20.2	18 3	16
35	13	18	16.3	16	16	17.5	18.7	19.8	21.7	21.2	21.3	19.5	18
32.30	15	18	17	17.5	17	18	19.5	20.4	22.1	21.7	21	20.6	18.6
30	16	18.5	17.5	17 7	17.6	19	20	20.7	22.2	22.7	22	21.1	19.4
27.30	17	18.6	17.5	18.5	18.5	19.8	20.5	21	22.8	24	22.5	22.1	20
25	19	18.5	18	19	19.6	19.8	20.1	20.6	22.2	21.3	22	22.6	20
22.30	20	17.9	17.5	18	19	19.2	18.9	19.9	21.5	20.4	21.3	23.1	20
20	20	17.3	18.5	20	17.4	17.7	17.5	22.4	24.5	25	20.8	21	22
17.30	20	19.8	19	21.3	19.2	20.4	22 2	25.8	25.6	27	26.8	22.7	24.4
15	20	22.6	22.1	20.5	20.5	23.2	25.4	27	27.4	27.2	29.5	26.4	25.1
12.30	22	25.3	23.7	23	24	25.1	27.8	26.3	27.1	28	28.2	26.9	25.8
10	24	26.1	25	25	25.4	26.1	27.8	26.4	27	27	28	27.3	27.1
7.30	26	26.9	27	26	27.5	27.1	27.3	26.3	27.4	27	26.6	27	27.4
5	27	26.6	27	27	28.5	27.5	27.8	26	27	26.6	27.4	26.7	27.5
2.30	29	26.4	27	27.8	26.7	28	28.5	26	25	25.4	26.7	26.2	26.7
0	31	25.9	26.7	27	26.1	27.7	28	25.4	25	25.4	25.9	26	26.1
2.30	33	26	26.7	27.5	27.3	27.1	27	25.4	25	25.5	25.5	25.9	26.1
5	35	26.4	26.5	27.9	27.4	27.8	26.5	25.7	25.9	25.6	25.2	25.7	26.4
7.30	37	26.7	27	27.9	27	27.5	26	25.8	25.7	25.8	25.5	25.7	26.8
10	38	26.9	27	27.6	27	27.1	25.8	25.3	25.8	25.8	25.4	25.5	26.7
12.30	39	26.7	27	27.3	27.1	26 8	25 8	24.7	24.9	24.5	25.4	25.5	26.3
15	40	26.4	26.6	27.3	26.7	25.7	25.5	24.5	24.5	24	23.5	25.4	26.3
17.30	41	25.6	26.5	27.1	26.6	25.7	25	24.2	24.2	24.1	23.5	24.8	25.9
20	42	25.6	26.5	26.5	26.2	25.3	24.5	23.1	23.5	23.3	23.4	21.9	25.4
22.30	43	23.3	21	24.5	23	21.8	20	20	20.5	20.2	19.3	20.4	21 8
25	47	25.5	25.3	26.5	24.5	24	23.5	21.2	21.1	21	21.2	22.9	23.6
27.30	48	24.5	25.5	27	24	24	18.3	20.6	20.1	20.3	21	22.2	22.8
30	50	24	25	25	22.3	22	16.5	18.6	18.1	18.9	18.7	21.1	21
32.30	53	22.4	23.5	23	20.8	20	13.5	14.2	15.1	16.1	17.4	19.4	20.5
35	56	19.5	20 5	19.5	18.8	17.5	12	11.6	11	13.4	15	16.4	19.4

POURRIDIÉ ET PHYLLOXERA

ÉTUDE COMPARATIVE DE CES DEUX MALADIES DE LA VIGNE

PAR M. A. MILLARDET

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BORDEAUX

Les altérations produites par le Phylloxera sur les racines de la vigne offrent assez d'analogie avec celles que le Pourridié détermine sur les mêmes organes pour que la confusion de ces deux maladies soit possible.

Elle est souvent d'autant plus facile qu'un certain nombre de souches phylloxerées se montrent, dans la période ultime de leur dépérissement, plus ou moins atteintes de Pourridié. Il faut dire encore que dans les deux affections les parties aériennes de la plante présentent à peu près le même aspect.

Il n'est donc pas étonnant que des erreurs aient pu être commises relativement à la part que l'une ou l'autre de ces maladies peut avoir dans la destruction d'un vignoble. Supposons que l'on découvre, dans une propriété, un point faible, *une tache*. Si c'est en hiver, alors que l'insecte est d'une constatation difficile, ou si les altérations produites par ce dernier, à raison de leur ancienneté, ont perdu leurs traits les plus caractéristiques, on pourra croire à l'action du Pourridié [1]. Cette opinion paraîtra surtout plausible si ce champignon est constaté sur quelques souches. — Des *Clintons* ou *Taylors* viennent-ils à périr en terrain phylloxeré; si l'on découvre le blanc du Pourridié sur leurs racines, il n'en faudra pas davantage pour mettre sur le

---

[1] Cette confusion a été commise par Dupont, dans la Gironde.

compte de ce dernier le mal dont le Phylloxera est cependant la première cause ([1]).

Ainsi, selon les idées préconçues des divers observateurs, les mêmes faits pourront être interprétés d'une façon bien différente : les uns accuseront le champignon alors que d'autres rejetteront la faute sur le Phylloxera. Si les adversaires des vignes américaines ont pu quelquefois accuser à tort de non-résistance au Phylloxera des cépages américains qui, en réalité, succombaient au Pourridié, il faut avouer que cette dernière maladie offre un précieux système de défense aux partisans quand même de la résistance de certains cépages.

Les recherches que je poursuis sur la maladie phylloxerique de la vigne devaient m'amener à étudier également le Pourridié. Vers la fin de l'année 1878, M. Lespiault, membre de la Commission du Phylloxera du Lot-et-Garonne, mit à ma disposition des racines de vignes provenant d'une tache de Pourridié des environs de Nérac. Après des études préliminaires assez longues et plusieurs constatations faites sur les lieux, j'ai été assez heureux pour élucider à peu près complètement l'histoire de cette maladie. Un résumé de mon travail a paru dernièrement dans les Comptes-rendus de l'Académie des Sciences ([2]). Quelques détails de plus et quelques figures sont nécessaires pour l'intelligence complète du sujet. J'espère que le lecteur ne me saura pas mauvais gré si je reviens aujourd'hui sur ce travail.

I

Pourridié.

La maladie dont il est ici question est bien connue des cultivateurs français sous les noms de *Blanc, Blanquet, Champignon* et *Pourridié*, qui tous ont rapport aux caractères les plus apparents de l'affection, les trois premiers désignant l'agent destructeur des

---

([1]) Voir à ce propos *La Vigne américaine*, n° du 15 février 1878, p. 36.
([2]) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, n° du 11 août 1879.

racines de la vigne, tandis que le dernier caractérise l'aspect que présentent ces organes lorsqu'ils sont atteints par la maladie (1). Dans ces dernières années, les botanistes, à leur tour, ont accordé à cette affection une attention spéciale et cherché à mieux connaître le champignon qui en est la cause. Je dois ici une mention à MM. Schnetzler (2) et Planchon (3) qui, les premiers, ont rapporté cet organisme au genre et à l'espèce *(Rhizomorpha fragilis,* Roth), auxquels il appartient réellement.

Depuis longtemps les mycologistes ont distingué deux formes distinctes dans le développement du *Rhizomorpha fragilis.* Dans le sol, cet organisme se présente sous la forme de cordons arrondis de 1/2 à 2 millimètres de diamètre, de couleur brune, fragiles, irrégulièrement ramifiés, ressemblant beaucoup à de petites racines pourries, d'où le nom de *Rhizomorpha.* Cette forme souterraine est spécialement désignée sous le nom de *Rhizomorpha fragilis,* forme *subterranea.* Si l'on suit un de ces cordons, on peut, avec un peu d'adresse et de bonheur, le voir pénétrer dans une racine. La figure 1, pl. I, représente plusieurs de ces cordons

(1) Il existe, en Médoc, une maladie de la vigne analogue à celle du Pourridié en ce que, comme cette dernière, elle est causée par un champignon qui détermine la pourriture de la souche; mais elle se distingue du Pourridié par la présence *à la surface* des écorces de la partie souterraine de la plante, de cordons de myceliums d'*un blanc de lait* (et non pas noirs, comme dans le Pourridié), à peu près semblables pour la grosseur et l'aspect à de la laine à faire la tapisserie. Çà et là ces cordons s'élargissent en nappes minces, arachnoïdes, de un demi à un centimètre de largeur.

Cette maladie procède par taches peu étendues en général. Les vignerons désignent ces dernières sous le nom patois de *mortaouses* ou de *terres bêtes.* — Rien ne peut guérir les *mortaouses* de l'influence funeste qu'elles exercent sur la vigne, ni le défoncement du sol, ni son renouvellement, ni les engrais. M. N. Johnston m'a montré, à Saint-Julien, plusieurs *mortaouses* dont le terrain avait été complètement enlevé et remplacé par d'autre, et où cependant les ceps nouveaux recommencèrent à périr dès la troisième ou quatrième année de plantation.

Je ne sais rien de plus sur cette maladie. — Le mycélium indique une grande espèce de champignon, mais laquelle? Si j'appelle l'attention sur la maladie des *mortaouses*, c'est afin d'empêcher qu'elle ne soit confondue avec le Pourridié et aussi dans l'espoir qu'étant avertis, les lecteurs remarqueront plus facilement les champignons qui, en automne, pourraient se développer sur les souches atteintes de cette affection.

(2) J.-B. Schnetzler, Observations sur la maladie de la vigne connue sous le nom de Blanc, *Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles,* t. XV, 1877.

(3) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, n° du 13 janvier 1879.

qui sortent de la racine, rampent à sa surface pour rentrer dans son intérieur quelques centimètres plus loin. C'est là une variété de la forme *subterranea* caractérisée par sa rondeur moins parfaite. Une fois que le *Rhizomorpha* a pénétré dans la racine, il est assez facile de le suivre dans l'intérieur de cet organe en soulevant les couches d'écorce entre lesquelles il est caché. On voit ainsi qu'il a pris une forme rubanée, plus irrégulière que la précédente; quelquefois s'étalant en expansions larges de 5 à 15 millimètres, profondément découpées sur les bords, d'autres fois se contractant en cordons aplatis rameux, irrégulièrement denticulés (pl. I, fig. 6 et 7). Cette seconde forme corticale a reçu le nom spécial de *Rhizomorpha fragilis,* forme *subcorticalis.*

Le *Rhizomorpha fragilis* a été récemment, de la part de deux naturalistes allemands, l'objet de travaux remarquables qui nous ont fait connaître son histoire jusque dans les plus petits détails.

En 1874, M. Robert Hartig ([1]) démontra que l'*Agaricus melleus* L. constitue la fructification de ce *Rhizomorpha* dont la nature et la place dans le système étaient restées complètement inconnues jusque-là. Le premier, en effet, il constata que cet agaric naît des expansions intracorticales du *Rhizomorpha* ([2]) ou même de ses ramifications souterraines ([3]). Il établit également de la façon la plus positive le caractère contagieux de la maladie que le *Rhizomorpha* détermine sur les arbres résineux. Dans une expérience ([4]), il vit des pins de huit ans, infectés par l'apposition d'une racine malade, contracter eux-mêmes la maladie et périr en moins d'une année. J'ajouterai, pour le lecteur curieux de ces faits de pathologie végétale, que cet habile observateur a donné une description et des figures fidèles des désordres que le *Rhizomorpha* produit au milieu des tissus des végétaux dans l'intérieur desquels il a réussi à pénétrer pour y vivre en parasite ([5]).

([1]) R. Hartig, *Wichtige Krankheiten der Waldbœume*, Berlin, J. Springer, 1874.
([2]) *Op. cit.*, pl. II, fig. 5.
([3]) *Ibid.*, pl. II, fig. 1 et 2.
([4]) *Ibid.*, p. 33.
([5]) Dans l'ouvrage précédemment cité et dans un autre plus récent, *Die Zersetzungserscheinungen des Holzes*, Berlin, J. Springer, 1878.

En 1877 parut le travail de M. O. Brefeld [1]. Bien que, considéré au point de vue qui nous occupe, il ne constitue à proprement parler qu'une confirmation des opinions émises quatre années auparavant par le Dr Hartig; ce travail produisit cependant une vive sensation sur le public scientifique autant par l'imprévu des résultats acquis d'autre part que par l'élégance de la méthode suivie par l'auteur. M. Brefeld parvint en effet, en semant les spores de l'*Agaricus melleus* dans une solution nutritive, à reproduire et à élever, dans des capsules de verre, des *Rhizomorpha* de grandeur considérable; si bien que le développement de cet organisme qui se dérobe habituellement à nos regards dans la profondeur du sol ou l'épaisseur de l'écorce des plantes se trouva dévoilé. Ayant mis ces *Rhizomorpha* en contact avec des racines fraîches de pin, il les vit pénétrer en peu de temps dans l'intérieur de ces dernières et y progresser avec une rapidité moyenne de trois à quatre centimètres par jour [2].

On rencontre fréquemment le *Rhizomorpha* dans le sol des forêts, autour des racines des arbres morts ou malades et dans l'écorce de ces dernières. Tous les botanistes savent qu'il est commun dans les galeries de mines sur les bois qui servent d'étais. Les extrémités de ses rameaux jouissent de la curieuse propriété de phosphorescence. C'est un spectacle étrange pour le mineur que ces millions d'étoiles minuscules qui constellent son ciel toujours obscur de leurs timides lueurs. Dans le travail cité plus haut [3], O. Brefeld nous raconte qu'il eut occasion, au cours de ses recherches, de jouir de ce spectacle porté à une véritable splendeur. Ayant ouvert, pendant la nuit, l'armoire où se trouvaient une vingtaine de cristallisoirs de la plus grande taille, tous remplis jusqu'aux bords de *Rhizomorpha* en plein développement, il fut tellement saisi par l'éclat étrange de ces larges surfaces phosphorescentes qu'il recula involontairement frappé de stupeur.

---

(1) O. Brefeld : *Botanische Untersuchungen üb. Schimmelpilze*, III Heft.— Leipzig, Arthur Félix, 1877.

(2) *Op. cit.*, pag. 150 et 151 et pl. XI, fig. 9, 10 et 11.

(3) P. 170.

Je dois dire encore que le Dr Hartig nous a appris que c'est au *Rhizomorpha fragilis* qu'il faut rapporter les épidémies qui sévissent assez fréquemment sur les plantations récentes d'arbres verts ou même dans les forêts anciennes de ces essences forestières et qui y exercent de véritables dévastations. La maladie est caractérisée par la présence du *Rhizomorpha* dans les racines des arbres atteints, le soulèvement et l'éclatement de l'écorce vers le collet de la plante, enfin l'épanchement d'une énorme quantité de résine sur la terre et à la base des premières racines. L'arbre atteint succombe dans l'espace d'une à deux années; et l'on voit fréquemment, à ce moment, pendant l'automne, des touffes d'*Agaricus melleus* naître de son écorce, un peu au-dessous de la surface du sol. J'ai vu moi-même, récemment, un abricotier vigoureux, âgé de vingt-cinq à trente ans, périr de cette maladie, dans l'espace d'un été. Dans les premiers jours de novembre suivant, des centaines d'*Agaricus melleus* commencèrent à sortir de terre tout autour du tronc. L'examen montra que la tige, au-dessus du sol, était parfaitement saine; seules les racines se trouvèrent les unes complètement, les autres, en partie seulement pourries; mais partout on pouvait reconnaître, dans leur écorce, les cordons du *Rhizomorpha* qui venait s'épanouir au niveau du sol en larges nappes byssoïdes, desquelles s'élevaient, par les fissures de l'écorce disloquée, les stipes de l'Agaric.

Tels sont les traits généraux de l'histoire du *Rhizomorpha fragilis*. Il est temps de revenir à la maladie de la vigne.

Les viticulteurs savent que le Pourridié affecte généralement les vignobles établis sur défrichements de diverses espèces de chênes. Il semble se déclarer seulement après une vingtaine d'années. Une fois que la première plantation a péri, on peut, paraît-il, en faire impunément une seconde : la réussite de celle-ci est assurée. Le premier fait s'accorde avec cette remarque due aux botanistes, que le *Rhizomorpha* attaque fréquemment les chênes et qu'il est beaucoup plus commun sur les racines des arbres morts que sur celles de ces mêmes plantes qui sont en pleine végétation. Rien d'étonnant, par conséquent, qu'il soit fréquent

sur les fragments de racines et de souches qui persistent dans le sol après le défrichement, et qu'il puisse, partant de là, infecter les racines de la vigne plantée au milieu de ces arrachis. Pourquoi la contagion n'aurait-elle pas lieu avant la vingtième année, et pour quelle raison la première plantation de vignes est-elle seule atteinte? c'est ce qui me paraît difficile à expliquer pour le moment.

M. Schnetzler (1) a vu, à Cully, un *Agaricus melleus* en relation avec un échalas de bois de sapin. Comme le *Rhizomorpha* attaque plus spécialement les arbres résineux, il semble craindre l'infection du vignoble par les échalas faits avec le bois de ces essences forestières.

Quant au développement de la maladie, il peut être très considérable : à Cully plusieurs hectares en étaient atteints.

L'aspect des vignobles pourridiés est exactement celui que produit la maladie phylloxerique. Les points infectés constituent des taches de grandeur variable : au centre se trouvent des pieds morts, tandis qu'à la périphérie ces derniers sont seulement plus ou moins affaiblis. La tache va sans cesse en s'agrandissant.

La marche de la maladie est tout à fait remarquable et bien différente de celle de la maladie phylloxerique. Elle est moins lente et insidieuse et pour ainsi dire foudroyante. Les ceps placés au pourtour d'une tache viennent-ils à produire une abondance extraordinaire de fruits, on peut être certain qu'ils sont déjà atteints depuis quelques mois. L'année suivante les sarments sont maigres, ils n'ont que 15 à 30 centimètres de long; la récolte est nulle; et lés souches meurent en général avant l'hiver. Une souche atteinte est toujours perdue. La rapidité du développement de cette affection trouve son explication dans les observations de M. O. Brefeld mentionnées plus haut.

Les souches mortes n'offrent presque aucune résistance à la main qui cherche à les arracher. Aux points où elles se rompent, le bois de la tige aussi bien que celui des racines a perdu sa dureté et sa solidité, il est comme macéré, spongieux, de couleur

---

(1) *Op. cit*, p. 51.

jaune ou brune, souvent gorgé d'humidité. L'écorce est noire au dehors; et, lorsqu'on en sépare les feuillets, ce qui se fait très facilement, presque naturellement, on est frappé de la présence d'arborisations blanches, feutrées, semblables à de la ouate très fine, à ramifications plus ou moins larges, plus ou moins riches, constituant des cordons aplatis qui rampent entre les divers feuillets corticaux. Ce sont là les cordons intracorticaux du *Rhizomorpha*, c'est-à-dire la forme *subcorticalis*. (Voir pl. I, fig. 6 et 7.)

Voilà, je crois, tout ce que les viticulteurs peuvent dire de cette maladie.

J'arrive à mes observations personnelles.

La tache de Pourridié que j'ai eu occasion d'étudier est située chez M. Lacomme, à Lavardac, dans le Lot-et-Garonne. Elle est au bord d'un bois de chênes blancs dont une allée de 4 mètres seulement la sépare. Sa longueur est de 30 mètres environ et sa largeur de 15 à 20, au moins dans son milieu où elle s'avance davantage sur le vignoble que vers les extrémités. Sa forme est à peu près celle d'une demi-circonférence dont le diamètre toucherait au bois de chênes et sa contenance de 5 à 6 ares. Le terrain est argilo-calcaire et siliceux, modérément compact, profond, plutôt sec. Il est constitué par des alluvions anciennes.

Autrefois le bois de chênes était plus étendu. Il y a trente-cinq ans, une bande fut défrichée le long du bois, sur laquelle, dix ans plus tard, furent plantées les vignes actuelles. La tenue de ces dernières avait toujours été excellente lorsque, il y a quatre ans, on remarqua un groupe de souches qui étaient très affaiblies, au bord de la vigne, contre le chemin qui la sépare du bois, à 5 mètres de ce dernier. C'était en 1876. Trois ceps moururent cette même année; en même temps, les pieds environnants donnaient une récolte dont l'abondance frappa propriétaire et vignerons. L'année suivante, une centaine de ceps succombèrent et durent être arrachés. Une fumure abondante fut appliquée. M. Lacomme crut à la présence du Phylloxera.

Je visitai cette tache de Pourridié, pour la première fois,

le 24 septembre 1878, c'est-à-dire la troisième année. Une demi-douzaine de ceps venaient encore de succomber et une cinquantaine environ se montraient très affaiblis. J'y retournai en avril et septembre 1879. La maladie n'avait pas fait beaucoup de progrès : six à huit souches étaient mortes; et le Pourridié en avait gagné une vingtaine au pourtour de la tache.

Cette vigne est composée de Jurançon, Malbec et d'un autre plant. Tous trois ont été également atteints par le mal.

D'après les indications fournies par M. Lacomme et mes observations personnelles, la marche du Pourridié, dans cette tache, serait la suivante : — A la première année d'invasion les ceps atteints par le mal portent généralement une énorme quantité de fruits. La seconde année, les pousses sont rares et courtes, minces, rabougries. Les feuilles sont aussi beaucoup moins développées; un grand nombre ne dépassent pas en largeur une pièce de 5 francs. Plus de raisins! Un grand nombre de ces plantes succombent avant la chute des feuilles; la plupart des autres périssent pendant l'hiver; quelques-unes seulement dans le courant de la troisième année. On voit que quatorze à dix-huit mois suffisent au *Rhizomorpha* pour tuer des ceps de vingt-cinq ans d'âge. Aucun n'est excepté; tout ce qui se trouve dans le périmètre de la tache est destiné à périr : mais tel cep peut n'être atteint que un ou deux ans après que ceux qui l'environnent ont déjà succombé.

Un fait intéressant à noter, c'est que jamais les feuilles, même sur les individus les plus rabougris, ne montrent d'altération de leur couleur verte normale.

Il n'est pas moins important de remarquer que la maladie n'attaque pas les ceps plantés à la place même de ceux qui viennent de succomber, du moins lorsque ces derniers ont été arrachés avec soin. Il y a deux ans, M. Lacomme fit planter une centaine de jeunes chevelus dans les trous d'où il venait de faire enlever les souches mortes. Aucune de ces plantes ne présente aujourd'hui le plus léger signe de maladie. Ce fait est confirmé par l'expérience des viticulteurs du pays. Il est probable, sinon

certain, qu'il en serait tout autrement si l'on n'arrachait pas la souche pourridiée ou si des fragments considérables des racines contenant le *Rhizomorpha* étaient abandonnés dans le sol à proximité de la nouvelle plante. — Quoi qu'il en soit de l'explication de ce fait, il suffirait à lui seul pour distinguer le Pourridié de la maladie phylloxerique.

Lors de mes deux visites à Lavardac, j'ai passé plusieurs heures à examiner avec le plus grand soin le sol autour des ceps atteints. La plupart du temps il m'a été impossible d'y rien distinguer de particulier. Dans un cas, j'ai vu dans certaines cavités, à quelques centimètres des racines, des touffes de mycéliums roussâtres appartenant probablement au *Rhizomorpha*. Jamais je n'ai réussi à découvrir dans la terre extraite pendant l'arrachage de souches atteintes de la maladie le plus petit fragment de cordons de *Rhizomorpha*.

Quant à la plante elle-même, voici quelles sont les altérations qu'elle présente. La plupart du temps, au moment où elle succombe, toutes les racines et le quart ou le tiers inférieur de la souche sont pourris en entier. La pourriture ne dépasse jamais le niveau du sol. En général, sur les grosses souches, elle n'intéresse que l'écorce et la partie périphérique du corps ligneux, mais il n'y a pas de doute qu'avec le temps elle n'arrive facilement à désorganiser ce dernier sur toute son épaisseur (1).

Lorsqu'on examine une souche morte du Pourridié, on remarque, au premier coup d'œil, la teinte noire et les bosselures que présente l'écorce. Sur la tige principale, celle-ci se trouve comme remplacée par une enveloppe très irrégulièrement et finement striée et bosselée, d'un noir brillant (pl. I, fig. 8). Çà et là un cordon noir, aplati, rarement arrondi, de un quart de millimètre à deux millimètres de diamètre se détache de l'écorce, rampe à sa surface, et, après un court trajet, s'applique de nouveau à l'écorce dans laquelle il ne tarde pas à se perdre. (La pl. I, fig. 1,

(1) Voir pl. III, fig. 20. Cette moitié de souche est pourrie sur presque toute son épaisseur, sauf dans la région placée contre le canal médullaire, à gauche de ce dernier, où le bois a conservé sa couleur claire.

représente ces faits sur une racine de 6 à 8 ans.) D'espace en espace, on peut, au milieu de ces cordons, de ces proéminences, de ces anfractuosités de couleur noire, reconnaître des lambeaux d'écorce de teinte brune moins foncée que le reste. Sur les racines qui ont moins d'un centimètre de diamètre, les bosselures dont je viens de parler sont relativement plus sensibles encore (pl. I, fig. 2 et 3). Elles font une saillie de 1 à 3 millimètres au-dessus de la surface générale de la racine. Elles sont le plus généralement (fig. 3) mais non toujours (fig. 2) allongées suivant l'axe de cette dernière, ce qui suffirait, faute d'autres caractères, à les distinguer des tubérosités phylloxeriques.

Sur les souches qui sont sur le point de périr, toutes ou presque toutes les racines présentent les altérations dont il vient d'être question. Mais, lorsque le mal n'est pas aussi avancé, il n'est pas rare de rencontrer des racines qui ne sont atteintes que sur une partie de leur longueur, et dont le reste est sain. C'est ce que représente la figure 3 (pl. I). Ces cas sont favorables à l'étude du développement du *Rhizomorpha* et de la succession des altérations que détermine ce champignon.

En examinant avec attention une racine de ce genre, dont la base seule est atteinte par le parasite depuis quelques semaines (pl. I, fig. 3), on voit l'écorce parcourue par des saillies ou crêtes allongées dans le sens de la racine, irrégulières, quelquefois ramifiées, qui se terminent en mourant au point sain de la racine. On peut se convaincre par un examen attentif à la loupe que ces crêtes sont constituées, dans leur centre, par des cordons noirs de *Rhizomorpha subcorticalis* qui ont soulevé et fait éclater l'écorce, laquelle se trouve rejetée de chaque côté. Ce fait est d'une constatation encore plus facile sur la coupe transversale (pl. I, fig. 9). On y distingue, au premier coup d'œil, au milieu des tissus corticaux soulevés et désorganisés, des cordons aplatis, à enveloppe noire plus ou moins épaisse, à contenu blanc ou blanchâtre constitué par des filaments enchevêtrés et comme feutrés. Autour de ces cordons, les tissus se trouvent repoussés, comprimés; en maint endroit le périderme (écorce) a éclaté et

les cordons du *Rhizomorpha* font hernie au dehors entre ses lambeaux.

La coupe longitudinale (pl. I, fig. 4) est plus instructive encore : on peut y suivre les cordons du *Rhizomorpha*, depuis le point où ils jouissent de leur organisation complète, jusqu'à celui par lequel ils s'accroissent, c'est-à-dire leur point le plus jeune ou sommet. Leur enveloppe noire les accompagne sur toute leur longueur jusqu'à deux ou trois millimètres du sommet où elle n'est plus que rudimentaire. Ils ne descendent pas verticalement dans l'écorce, mais présentent des flexuosités, paraissant et disparaissant tour à tour pour faire place à d'autres, tantôt sur une seule rangée, tantôt sur deux. Sous leur influence, le bois prend d'abord une teinte brune qui ne tarde pas à passer au jaune sale.

Tandis que, dans les racines de deux à cinq millimètres de diamètre, les cordons de *Rhizomorpha* se trouvent sur une ou deux couches d'épaisseur au plus, dans celles qui sont plus grosses, et surtout dans les souches d'une grande épaisseur, ils forment plusieurs étages superposés de dedans en dehors, quelquefois contigus, le plus souvent séparés par de minces cloisons de tissus corticaux. Habituellement, dans ces derniers cas, les tissus sont réduits par la compression et la désorganisation à un minimum : on n'en retrouve plus que de rares lambeaux à l'extérieur. La souche tout entière paraît couverte de l'enveloppe noire, accidentée, dont il a déjà été question, et qui est constituée par l'écorce même des cordons rhizomorphiques, non par celle de la plante (pl. III, fig. 20, et pl. I, fig. 8).

Tous ces faits sont d'une observation facile, lorsqu'on a été à même de les constater une seule fois, mais ils peuvent échapper facilement, même à un bon observateur, lorsqu'il n'est pas prévenu. C'est ce qui explique comment ils n'ont encore été mentionnés par personne.

Il serait certainement facile de distinguer le Pourridié de toutes les autres maladies de la vigne, à l'aide des seuls caractères dont il a été question jusqu'ici. Mais il en est encore de plus apparents et de non moins certains qui ont permis, dès longtemps, de

reconnaître cette affection. Jusqu'à présent, en effet, on a regardé comme caractère essentiel du Pourridié, en même temps que l'état de pourriture de la partie souterraine de la souche et des racines, la présence de cordons blancs de mycélium entre les couches superficielles de l'écorce (d'où le nom de *Blanc, Blanquet*, *Champignon*).

Il suffit en effet de soulever, avec un couteau, une lamelle ou deux d'écorce, sur une racine pourridiée, pour voir paraître des traînées blanches et feutrées comme de la ouate, à bords irréguliers, découpés, étendues la plupart du temps dans le sens de l'axe de la racine, mais devenant aussi souvent obliques, plus ou moins richement anastomosées (pl. I, fig. 6 et 7). Au moment où on les découvre, ces traînées tranchent par leur blancheur de neige sur la teinte brune des tissus environnants. Si on laisse, pendant quelque temps, les racines en cet état, dans une atmosphère humide, on voit ces cordons prendre peu à peu une coloration roussâtre par suite de l'action de l'air.

Un coup d'œil sur les figures 9 (pl. I) et 18 (pl. III) suffit à expliquer la nature de ces cordons. On y constate que l'écorce noire (fig. 18, *e, e*) des rubans rhizomorphiques est d'une grande minceur. En outre, il faut savoir que le tissu filamenteux blanc qu'elle contient (fig. 18, *m*) est très peu résistant : la moindre traction suffit à le déchirer. Lors donc que l'on détache un lambeau d'écorce sur une racine pourridiée, la séparation se fait toujours non pas le long de la surface extérieure des rubans rhizomorphiques, mais dans leur partie médiane. Aussi, tandis que ces rubans paraîtraient noirs, si leur surface était à nu, ils sont blancs, parce que c'est leur intérieur qui est mis au jour.

On trouvera dans la note ci-dessous (1) des détails plus

(1) La structure du *Rhizomorpha subcorticalis* nous est connue par le travail déjà cité de M. R. Hartig. Au reste, il suffira, pour s'en faire une idée exacte, de jeter les yeux sur les figures 1 (pl. I), 18 et 21 (pl. III). L'écorce de ces cordons, incolore à leur sommet (fig. 21, *s*), mais d'un brun très foncé à quelque distance de ce dernier (fig. 18), est composée par un nombre variable de couches de cellules allongées, très fortement unies, de forme polygonale sur la coupe transversale et à membrane brune médiocrement épaisse (fig. 18, *e, e*). En dedans de l'écorce se voit

circonstanciés sur ces cordons de *Rhizomorpha* et qui pourront intéresser les botanistes. Pour les viticulteurs je n'ajouterai plus qu'un seul mot.

C'est par l'accroissement graduel, dans l'épaisseur de l'écorce, des cordons dont je viens de parler, que la maladie envahit successivement toutes les racines et toute la partie souterraine de la tige. Jamais je n'ai rencontré de véritables cordons de la forme *subcorticalis* du *Rhizomorpha* dans le bois. Partant de là, on ne s'expliquerait pas comment ce dernier se trouve si profondément désorganisé, si je n'ajoutais qu'on voit sortir de la surface des cordons rhizomorphiques corticaux des pinceaux serrés de filaments mycéliaux qui plongent dans les rayons médullaires et s'introduisent aussi quoique plus lentement dans les faisceaux

---

la moelle (*m*, fig. 18 et 21), de couleur blanche ou roussâtre, constituée par des filaments non adhérents entre eux. La moelle manque quelquefois (fig. 18, en *o*). D'autres fois, la partie moyenne de la moelle est beaucoup plus dense, feutrée que celle qui touche à l'écorce des cordons.

La fig. 21 de la pl. III représente l'extrémité d'un cordon du *Rhizomorpha subcorticalis* dans l'épaisseur de l'écorce. Pour simplifier le dessin, la moitié droite seulement du cordon a été figurée. Le sommet de ce dernier est constitué par un faisceau mince et serré de filaments (*s*) qui écartent les cellules de l'écorce (*p*). A moins d'un millimètre du sommet, le cordon se montre déjà différencié en écorce (*e*) et moelle (*m*), cette dernière se formant, ainsi qu'on le voit, par l'écartement des cellules centrales et puis par leur bourgeonnement et la production de filaments très déliés. Des cellules de l'écorce partent également du côté extérieur du cordon, et perpendiculairement à la direction de ce dernier, des suçoirs filamenteux qui s'enfoncent (en *a*, *a*) dans le parenchyme cortical (*p*). Autour des cordons, les cellules de la vigne sont comprimées, disloquées, de couleur brune. Elles manquent d'amidon (excepté au point *p*, en haut et à droite de la fig. 18).

Les cordons subcorticaux produisent souvent, du côté où ils touchent à un rayon médullaire (pl. III, fig. 19), des touffes serrées de filaments qui, partant de la moelle du cordon (*m*), dont ils ne sont que la continuation, percent son écorce (*e*, *e*) pour s'enfoncer dans un rayon médullaire (*r*) qu'ils remplissent à peu près complètement. Ces touffes, si elles sont allongées, peuvent devenir des plaques d'une assez grande longueur (pl. II, fig. 12 et 15). Elles constituent des moyens très puissants de désorganisation pour le corps ligneux.

Voilà pour la structure du *Rhizomorpha subcorticalis*; passons au *Rhizomorpha subterranea*.

La structure de ce dernier nous est bien connue par les travaux de mes devanciers, MM. de Bary, R. Hartig, Brefeld. Néanmoins j'en ai donné quelques figures dans la pl. II. La fig. 13 représente la coupe transversale de deux de ces cordons, l'un (*a*) de figure ovale et pourvu de moelle, l'autre (*b*) de contour circulaire, où la

ligneux (pl. III, fig. 19) ([1]). Enfin un dernier fait à noter, c'est la présence dans le bois, quand il est fortement altéré par le parasite, de lignes noires qui tracent sur sa coupe transversale des dessins capricieux (pl. III, fig. 20, à la partie inférieure de la figure). On les voit généralement partir de l'écorce, s'avancer vers le centre et revenir à l'écorce, détachant ainsi de la masse du corps ligneux un segment de grandeur variable. Sur la coupe longitudinale elles ont un parcours analogue, mais plus allongé (pl. II, fig. 15, *a*, *a*). Ces lignes sont de véritables membranes formées par l'entrecroisement serré de filaments mycéliaux bruns (pl. II, fig. 10, *a*, *a*). Elles servent probablement au champignon à se mettre à l'abri de l'action de l'air. Çà et là, le long de ces membranes, on voit les vaisseaux complètement oblitérés par

---

moelle n'existe pas. Les détails de structure sont représentés dans la fig. 14 de la même planche. A droite se voit le tissu noir et dense de l'écorce ; à gauche le tissu spongieux de la moelle. Pour plus de détails, on pourra consulter l'explication de ces figures.

Quant aux lignes noires mentionnées plus haut dans l'épaisseur du bois, et qui probablement constituent le genre *Streblema* de Chevallier (*Lutetiæ Flora generalis*, t. I, p. 508 de la 2e édition), la fig. 15, *a*, *a* (pl. II) représente leur parcours longitudinal, et la fig. 20 (pl. III) leur disposition dans le sens transversal. J'ai essayé de rendre leur structure si délicate dans la fig. 10 (pl. II). On y voit qu'elles sont composées de plusieurs couches d'éléments excessivement petits et serrés qui remplissent la cavité des cellules du bois, analogues pour la forme et la couleur à ceux qui constituent l'écorce des cordons de la forme *subcorticalis*, mais d'une étroitesse encore plus considérable. Ces petits éléments forment par leur groupement, abstraction faite des membranes des éléments anatomiques dont ils remplissent la cavité, une sorte de membrane (*a*, *a*), de la surface de laquelle partent, surtout au niveau des rayons médullaires (*r*, *r*), une foule de filaments mycéliaux, les uns dirigés vers l'écorce de la racine, les autres, plus nombreux, dirigés vers son axe. Ces membranes représentent sans doute celles dont parle M. Brefeld à la page 146 de son Mémoire, et qui sont représentées par la fig. 2 de sa planche XI.

Les désordres produits dans les tissus de la racine par le *Rhizomorpha* ont été représentés dans diverses figures, notamment dans les fig. 9 (pl. I) et 18 (pl. III) pour l'écorce, et les fig. 19 (pl. III), 10 et 11 (pl. II) pour le bois. La fig. 11 représente à un très fort grossissement, en *a*, une petite portion de la couche *a*, *a* de la fig. 10 ; en *b*, un fragment de la même figure vers le point *b*. On y voit, chose curieuse, qu'en *a* les membranes des éléments ligneux ont conservé leur épaisseur normale, tandis qu'en *b*, sous l'influence des suçoirs du parasite, les couches secondaires des membranes sont partout érodées, amincies, désagrégées d'une manière remarquable. L'amidon a disparu.

([1]) Voir à l'explication des planches celle de cette figure et celles des fig. 21 (pl. III) et 10 (pl. II).

un tissu semblable, à mailles brunes, d'une finesse extrême (même fig., *d*).

Jusqu'ici il n'a guère été question que de la forme *subcorticalis* de notre *Rhizomorpha;* tout au plus, en commençant, ai-je signalé certains cordons arrondis, aplatis, qui émergent d'un point de la racine, rampent quelque temps à sa surface pour venir se perdre quelques centimètres plus loin dans son épaisseur (pl. I, fig. 1). Ces cordons constituent une sorte de transition à la forme *subterranea* dont il me reste à parler.

Il suffit, lorsqu'on veut étudier cette forme du champignon qui nous occupe, de placer en mai ou juin, dans un vase fermé au fond duquel se trouve un centimètre de terre humide, un fragment de grosse racine pourridiée, ou mieux de la souche elle-même, offrant, sur trois à quatre centimètres d'épaisseur, un décimètre de long. Un mois après, si la température est suffisante, on voit à la surface de l'échantillon une foule de petits plumets de couleur rousse (pl. II, fig. 16 et 17), dont quelques-uns, surtout ceux qui sortent des bords de la section, s'allongent en cordons arrondis, noirs à la base, brunâtres au sommet. C'est là la forme *subterranea* du *Rhizomorpha fragilis,* celle qui, partant d'une racine infectée dans laquelle elle puise sa nourriture, s'avance dans le sol à une distance inconnue, et, y rencontrant la racine d'une plante saine jusque-là, en opère l'infection.

Le *Rhizomorpha subterranea* se distingue de la forme *subcorticalis* par sa coupe arrondie (pl. II, fig. 13). Quant à la structure, elle est essentiellement la même dans les deux formes. A l'extérieur, plusieurs couches de cellules à membranes plus (forme *subterranea*) ou moins (forme *subcorticalis*) épaisses, brunes ou noires, c'est l'écorce ; dans l'axe, un cordon de tissu blanc feutré; entre les deux, des filaments qui relient l'écorce au cordon feutré axillaire [1]. L'examen microscopique d'une simple coupe transversale suffit pour distinguer avec la dernière certitude le *Rhizomorpha* des

[1] Coupes transversales du *R. subterranea,* pl. II, fig. 13 et 14. Coupes transversales du *R. subcorticalis,* pl. I, fig. 9 et pl. III, fig. 18. Voir l'explication de ces figures.

radicelles anciennes avec lesquelles il pourrait être confondu : en effet, tandis que le *Rhizomorpha* n'est jamais composé que par du tissu cellulaire, on trouve toujours des vaisseaux même dans les racines les plus petites.

Il doit être très rare de rencontrer le *Rhizomorpha subterranea* dans le sol : pour moi, ainsi que je l'ai dit, cela ne m'est jamais arrivé. Je ne l'ai guère observé non plus à la surface des souches arrachées. Cela tient sans doute à l'excessive fragilité de ces cordons qui se brisent presque infailliblement pendant l'arrachage. Néanmoins il n'est pas impossible de l'observer aussi *in situ;* voici comment :

On rencontre très fréquemment sur les souches pourridiées, au-dessous du niveau du sol, des excavations dont l'origine ne m'est pas connue et qui semblent exister aussi sur les vieilles souches saines. Ces excavations, qui peuvent atteindre 2 et 3 centimètres de profondeur, sont remplies de terre. Habituellement, quand la plante est affectée de la maladie dont il s'agit ici, on trouve dans leur intérieur un grand nombre de cordons de la forme souterraine du *Rhizomorpha* qui sillonnent la cavité en tous sens, enfermés dans la terre qui remplit cette dernière. Comme ils sont protégés par les parois ligneuses de la cavité, l'arrachage ne leur cause aucun dommage; et il suffit, pour les mettre en évidence, de laver la souche sous un mince filet d'eau. La terre disparaît : il reste un réseau plus ou moins abondant de cordons bruns, simples ou ramifiés, tendus comme une toile d'araignée dans l'intérieur de l'excavation. Un exemple très simple d'un cas de ce genre est reproduit au bas des figures 1 et 5.

Nous connaissons maintenant les altérations physiques produites sur la vigne par la maladie du *Rhizomorpha*. J'ajouterai deux mots sur les phénomènes chimiques concomitants.

A la suite d'une série de recherches dont les résultats seuls ont été publiés jusqu'à ce jour ([1]), nous avons réussi à nous convaincre,

---

([1]) Gayon et Millardet : *Sur les matières sucrées des vignes phylloxerées et pourridiées*. Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1879, t. II, p. 288.

M. Gayon et moi, qu'à partir du moment où une racine est atteinte par le Pourridié, le sucre normal à cet organe commence à diminuer, jusqu'à ce qu'il ait complètement disparu lorsque la racine est envahie (pourrie) dans presque toute son épaisseur; il n'y a pas interversion du sucre.

D'après mes observations personnelles, le même phénomène a lieu pour l'amidon. Sur un organe infecté, tige ou racine, ce dernier disparaît rapidement, d'abord du bois, ensuite de l'écorce. Toutefois, je dois dire qu'il en reste fréquemment de petits amas accidentels dans cette dernière. Sur des racines de un à deux ans dont la base était envahie par le parasite sur une hauteur de 2 à 5 centimètres seulement, il restait à peine quelques traces d'amidon dans tout le reste de la racine, jusque dans les radicelles les plus petites, c'est-à-dire dans des points absolument sains. La physiologie végétale rend parfaitement compte de cette dernière particularité.

Dès le début de la maladie, les racines affectées ne contiennent pas d'autres organismes que le *Rhizomorpha fragilis*. Il n'en est plus de même lorsque la pourriture est très avancée. M. Schnetzler y a constaté [1], à ce moment, la présence de nombreux vibrions et de filaments de *Mucor*. J'ai vérifié ce fait à plusieurs reprises, non seulement par l'observation directe, mais encore à l'aide de cultures en ballons clos, suivant la méthode Pasteur. L'inévitable *Penicillium* se montre également très fréquent, aussi bien que d'autres champignons variés. Tous ces parasites ne jouent évidemment, dans l'affection, qu'un rôle secondaire; ils ne tuent pas la racine, mais en déterminent simplement la décomposition.

Je résume.

D'après l'ensemble des faits qui viennent d'être exposés, il est à présumer que l'étiologie de la maladie qui nous occupe est la suivante. — Le *Rhizomorpha*, qui est assez fréquent sur les chênes et qui peut persister dans le sol longtemps après le défrichement, grâce aux racines qui y ont été laissées, reste inoffensif

---

(1) Mémoire cité.

pour les plantes pendant plusieurs années. Peut-être les jeunes racines à écorce lisse et saine sont-elles plus réfractaires à son action que les racines ou tiges à écorce anfractueuse, tourmentée, souvent excoriée et fissurée des plantes âgées. A un moment donné, un cordon *subterranéen* pénètre dans une racine où il prend la forme *subcorticale*. Il s'y ramifie dans tous les sens et arrive jusqu'à l'axe de la souche. Ce serait là le premier stade du développement, la première année de maladie. L'excitation produite sur la plante par la présence du parasite déterminerait la fructification abondante que l'on remarque à cette période. Mais, au printemps suivant, le *Rhizomorpha*, parvenu à la tige, remplit l'écorce de cette dernière de ses ramifications et, devenu maître de la place, envahit rapidement toutes les racines de leur base à leur sommet. Grâce à sa vitesse énorme d'accroissement, quelques mois suffiront à l'infection de tout le système souterrain du végétal, qui périt à la fin de cette seconde période, le plus souvent avant, quelquefois après l'hiver. Dans une vigne de vingt ans, les racines sont nombreuses et longues, souvent enchevêtrées les unes dans les autres; par suite de cette disposition, le parasite peut facilement passer d'un cep à l'autre et poursuivre sa marche envahissante.

M. Hartig, dans son mémoire cité, a proposé, pour limiter les ravages souvent considérables que le *Rhizomorpha* exerce dans les forêts d'arbres résineux, d'arracher les arbres malades et de creuser autour du point infecté un fossé large et profond. Le même moyen sera probablement employé avec succès contre le Pourridié de la vigne; du moins paraît-il certain, *a priori*, qu'il préviendrait l'infection successive des ceps de racine à racine.

II

Phylloxera.

Rien n'est plus facile que de reconnaître la maladie phylloxérique pendant la belle saison et à l'origine du mal. Il suffit alors d'un coup de pioche pour découvrir sur les radicelles les *nodosités*

(pl. IV, fig. 22) et sur celles-ci le phylloxera. Aussi longtemps que l'infection ne remonte qu'à deux ou trois années au plus, ces constatations sont faciles de mai à septembre. Mais, sur les vignes malades depuis un plus long temps, il est quelquefois difficile de trouver des nodosités, même pendant la belle saison. Cela tient, je pense, à ce que l'insecte a abandonné les racines plus ou moins désorganisées pour se porter sur des plantes en meilleur état qui lui offrent une pâture plus facile et abondante. Cependant, même dans ces cas, et alors que les souches sont déjà très épuisées, il arrive souvent que quelques radicelles se forment chaque année, un peu au-dessous de la surface du sol. Pour peu qu'il reste un phylloxera, il se portera sur ces dernières; et elles offriront les déformations caractéristiques dont il vient d'être question.

Les nodosités sont un indice absolument certain de la présence du phylloxera; il est donc tout à fait superflu de rechercher l'insecte une fois qu'elles ont été constatées. Aussi, pendant la belle saison, la recherche de l'insecte se résume-t-elle dans celle beaucoup plus facile des nodosités. Tout le monde connaît ces renflements crochus, en forme de tête d'oiseau, qui terminent les radicelles de la vigne malade (pl. IV, fig. 22). Il est impossible de les confondre avec quoi que ce soit, ce qui me dispensera d'insister sur ce point. J'ajouterai seulement que dans toutes les espèces de vignes que j'ai étudiées, américaines ou asiatiques, les nodosités offrent la même forme générale et le même développement que dans la vigne européenne.

Si les nodosités une fois formées persistaient pendant longtemps, la présence du phylloxera dans un vignoble serait toujours d'une constatation facile. Mais tel n'est pas le cas. Il peut arriver que deux ou trois semaines après leur formation elles commencent à pourrir, pour ne plus laisser, deux mois après, qu'un squelette noir, ratatiné, méconnaissable, qui ne tient plus à la radicelle que par des vaisseaux désorganisés et reste dans le sol lorsqu'on arrache la plante. Mais cette décomposition rapide est exceptionnelle : en général les nodosités durent plusieurs mois. C'est dans les derniers jours de juillet qu'on commence à en rencontrer une

assez forte proportion de pourries (¹). A la fin d'août, quelquefois seulement de septembre, il n'y en a plus qu'un petit nombre qui ne soient pas totalement décomposées. J'ai dit ailleurs (²) que cette désorganisation est déterminée par la pénétration dans les renflements de divers organismes parasitaires. C'est probablement à cause de la fréquence plus grande de ces derniers dans les couches superficielles du sol et en même temps par suite de la température plus élevée à ce niveau que les nodosités superficielles s'altèrent plus tôt que celles qui sont situées plus profondément. En automne, les nodosités deviennent de plus en plus rares : le peu que l'on trouve encore en octobre ou novembre pourrit pendant les deux mois suivants, de telle façon que depuis janvier jusqu'en avril, non seulement on n'en trouve plus guère qui soient saines, mais encore elles sont si complètement désorganisées qu'il est difficile d'en découvrir des vestiges (³).

Telle est la manière dont se comportent les nodosités dans la vigne européenne. Chez les vignes américaines résistantes, un certain nombre peut persister beaucoup plus longtemps.

On a vu plus haut que le phylloxera abandonne quelquefois les vignes malades depuis plusieurs années lorsqu'elles sont très affaiblies, de telle sorte qu'il peut arriver que des souches qui succombent à la maladie phylloxerique ne présentent ni insectes ni nodosités, non seulement en hiver, mais encore durant la belle saison, pendant les deux ou trois dernières années de leur existence. A quel caractère pourra-t-on reconnaître la nature de la maladie dans ces circonstances? — A la présence des *tubérosités.*

(¹) Les nodosités représentées dans la figure 22 ont été arrachées, à Bordeaux, le 25 juillet. Toutes sont saines ou à peu près, sauf les quatre autour de *a* qui, beaucoup plus brunes que les autres, sont déjà plus ou moins complètement pourries

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXXVII, p. 197 et 815 (1878, 2ᵉ semestre). — *Journal d'agriculture pratique*, 1878, numéros du 8 août et du 6 septembre.

(³) C'est le 20 novembre que la racine de Folle-blanche, représentée dans la fig. 23 (pl. IV), a été arrachée. Toutes les nodosités sont complètement pourries; il n'en reste plus aucune trace. L'extrémité des petites racines qui supportaient les nodosités est elle-même pourrie.

J'ai désigné sous ce nom [1] des renflements qui se forment sous l'influence de la piqûre de l'insecte sur les racines qui ont cessé de s'accroître en longueur et qui s'accroissent en épaisseur, quels que soient du reste l'âge et le diamètre de ces dernières (pl. IV, fig. 23, 24, 25 et 26). Les tubérosités ont typiquement une forme subhémisphérique. Au centre se voit habituellement un méplat ou même une dépression où se tient l'insecte (fig. 23, en *a*). Mais celui-ci ne reste pas toujours stationnaire. Ses petits se fixent autour de lui. Il se forme d'autres tubérosités contre la première ou bien celle-ci, sous l'influence de nouvelles piqûres, produit à sa surface des tubérosités secondaires, plus petites, et, de simple qu'elle était d'abord, devient composée (toutes les tubérosités de la fig. 25, *a* sont composées). Par suite de ces diverses variations dans l'action des insectes, les tubérosités peuvent se montrer isolées ou confluentes. Dans ce dernier cas, elles forment presque toujours des groupes allongés suivant l'axe de la racine (fig. 24). Cette forme correspond à celle des fissures de l'écorce au fond desquelles se fixent les phylloxeras, obligés qu'ils sont de chercher, pour y implanter leur suçoir, les points où le périderme (écorce) présente le moins d'épaisseur. Les tubérosités isolées sont plus rares (fig. 23) : elles n'existent guère que sur les racines d'un petit diamètre (de l'année). Sur les racines grosses ou seulement moyennes, elles sont habituellement confluentes (fig. 24 et 25).

Tandis que les nodosités se forment d'avril à septembre, les tubérosités ne commencent guère à se développer avant le mois d'août, au moins dans les premières années de la maladie, c'est-à-dire aussi longtemps que les radicelles sont abondantes. Elles sont donc plus jeunes que les nodosités, et c'est une des raisons pour lesquelles elles pourrissent plus tardivement. Tandis que les nodosités, sur notre vigne européenne, atteignent rarement le mois d'octobre ou novembre sans se décomposer, c'est tout au

---

[1] Mémoire cité en dernier lieu

plus si la moitié des tubérosités sont pourries en décembre (1). Les autres traversent l'hiver pour ne succomber que plus ou moins tardivement, dans le courant de l'année suivante, à la décomposition qui, à part quelques rares exceptions, les atteint tôt ou tard.

Il est important de se bien pénétrer de l'ordre de succession de ces phénomènes parce qu'il nous donne la clé de divers faits inexpliqués jusqu'ici. Pendant le printemps et l'été, le Phylloxera se répand sur les radicelles qu'il choisit de préférence à raison de la succulence et de la tendreté de leurs extrémités. Sous l'influence de ses piqûres, des nodosités se forment qui ne tardent pas à se décomposer. Mais, dès qu'elles sont pourries, l'insecte reflue sur les grosses racines où il passe l'automne et l'hiver. Il arrive même qu'il s'établit sur la tige (la souche proprement dite), à l'aisselle des grosses racines, où il détermine également la formation de tubérosités (2). D'après cet ensemble de faits, je ne crois pas commettre d'erreur en émettant l'opinion que, toutes choses égales d'ailleurs, plus les nodosités pourrissent complètement et rapidement, plus les tubérosités sont fréquentes et plus aussi elles se manifestent de bonne heure. Comme exemple à l'appui, je citerai le *Clinton* et le *Taylor,* dont les nodosités pourrissent généralement de bonne heure et qui, de tous les cépages américains doués d'une notable résistance à l'insecte, sont, il me semble, ceux qui présentent le plus de tubérosités.

Ainsi que je l'ai déjà indiqué en passant, dans la vigne européenne, le sort des tubérosités est le même que celui des nodosités : comme ces dernières, elles succombent à la pourriture (fig. 28, pl. IV), mais beaucoup plus lentement. Cette différence tient surtout à l'époque tardive de leur formation et à la lenteur de la végétation pendant la mauvaise saison. D'habitude, dans les premières années de maladie, sur les racines d'un an, on trouve, au printemps, une proportion très notable de tubérosités qui sont

(1) La racine de Folle-blanche représentée dans la fig. 24 a été arrachée le 20 novembre. Il y a tout au plus la moitié des tubérosités qui soient pourries.

(2) Ces dernières m'ont été signalées en avril 1879 par M. Fréchou, pharmacien à Nérac.

complètement saines et qui ne commencent guère à pourrir avant l'été de l'année qui suit leur première apparition.

La pourriture des tubérosités, ainsi que je l'ai annoncé en 1878 ([1]), est due à la même cause que celle des nodosités, c'est-à-dire à la pénétration d'organismes parasitaires dans leur intérieur. Celle-ci a lieu à la faveur des fissures que détermine dans l'écorce (périderme) qui revêt les tubérosités l'hypertrophie du tissu sous-jacent. Or, tandis que les nodosités grandissent rapidement, grâce à la vitalité de l'extrémité des radicelles et à l'activité de la végétation pendant la saison la plus chaude de l'année, les tubérosités, pendant l'automne et l'hiver, s'accroissent beaucoup plus lentement : par suite, les désordres produits dans l'écorce qui les recouvre sont moins considérables que ceux que l'on observe, après un temps égal, dans l'épiderme des nodosités. De là, chez les premières, une pénétration plus difficile des organismes parasitaires que dans celles-ci. J'ajouterai que les champignons, une fois qu'ils ont pénétré dans l'intérieur des tissus, déterminent moins rapidement la décomposition des tubérosités que celle des nodosités, en raison du froid de la mauvaise saison. Il est d'expérience, en effet, que le développement des organismes parasitaires s'accroît considérablement avec la température.

Il semble que toutes ou presque toutes les tubérosités succombent à la pourriture dans le cours de l'année qui suit celle de leur apparition. Chez elles, de même que dans les nodosités, la pourriture, après avoir détruit l'écorce, ne tarde pas à envahir également le bois de la racine. Mais tandis qu'il peut suffire de quelques jours pour que l'axe ligneux d'une radicelle soit tout à fait décomposé, la désorganisation complète du bois des racines se fait attendre beaucoup plus longtemps. On doit sans nul doute attribuer cette différence à l'épaisseur beaucoup plus considérable de l'organe atteint et à la plus grande résistance des tissus qui le constituent.

Mais de même qu'il existe dans la nodosité des dispositions

([1]) Mémoire cité en dernier lieu.

anatomiques qui peuvent, dans quelques cas, empêcher les champignons d'atteindre l'axe ligneux de la radicelle ou au moins retarder sa marche envahissante, de même aussi la plante réussit quelquefois à opposer une barrière à la pourriture qui part des tubérosités, de manière à préserver plus ou moins longtemps de la contagion le bois de la racine. Cette barrière consiste dans une ou plusieurs plaques de liège qui, à certaines époques, se produisent dans l'épaisseur de l'écorce au-dessous des tubérosités qui commencent à pourrir *(non dans les autres)* et arrêtent les myséliums (pl. IV, fig. 27. *La plaque de liège est étendue de* l *à* l). On voit souvent se produire ainsi une, quelquefois deux de ces lames subéreuses successivement, à mesure que le champignon gagne du terrain : à peine celui-ci en a-t-il forcé une qu'une nouvelle apparaît en dedans de la première. C'est pour ainsi dire un siège et une défense en règle où l'assiégeant et l'assiégé ont leurs parallèles et leurs retranchements successifs. Le trajet de ces plaques de liège est toujours plus ou moins irrégulier et en rapport avec la disposition des tubérosités et l'accroissement des mycéliums. C'est à leur surface que se fait l'exfoliation de l'écorce qui devient alors tout à fait caractéristique par sa fréquence et son irrégularité (pl. IV, fig. 26, *a*, en *e e*). A l'état normal, en effet, ces formations subéreuses sont infiniment moins fréquentes, et, de plus, au lieu d'être irrégulières, interrompues et disposées uniquement au-dessous des tubérosités, elles forment autour de la racine un manteau cylindrique, continu et régulier. Ces phénomènes ont été déjà entrevus par quelques observateurs, mais ils n'ont été compris par aucun d'eux.

Il sera bon de faire remarquer encore que si l'action de la piqûre de l'insecte s'exerce surtout sur le parenchyme cortical, puisque ce tissu est le seul qui entre dans la formation des tubérosités (fig. 27 et 28), cependant elle peut aussi quelquefois s'étendre jusqu'à l'axe ligneux de la racine (fig. 28 surtout). Mais cette influence n'est pas immédiate. Elle ne se fait guère sentir, du reste, que sur les racines de un et deux, quelquefois trois ans, rarement sur celles qui sont plus âgées. Elle se traduit par une

épaisseur de la couche annuelle de bois plus grande du côté de la tubérosité que du côté opposé. Ce fait tient certainement au relâchement de l'écorce au niveau de la tubérosité, relâchement qui est dû aux fissures du périderme. On peut ainsi quelquefois déterminer l'âge d'une tubérosité donnée.

La lutte qui a lieu dans les tubérosités, entre la vigne européenne, la seule dont il soit question en ce moment, et les mycéliums parasites, dure un temps variable, plus ou moins long, suivant diverses circonstances sur lesquelles il serait à la fois trop long et trop malaisé d'insister. Son issue est toujours la même : après six mois, un an ou deux, le mycélium dont la marche a pu être ralentie mais presque jamais arrêtée, triomphe du dernier obstacle et pénètre enfin dans un rayon médullaire. A partir de cet instant, la racine est perdue. Un temps relativement court, une ou deux saisons, suivant son diamètre, suffisent à la désorganiser complètement sur toute son épaisseur : le bois pourrit comme l'écorce (fig. 26 *b*, 27 et 28).

Ces développements nous permettront de nous rendre compte de divers phénomènes que nous présentent les vignes phylloxerées et qui n'ont pas reçu jusqu'ici d'explication suffisante.

Pourquoi les vignes atteintes par la maladie ne meurent-elles pas avant la troisième ou la quatrième année? Cela tient à la lenteur avec laquelle les tubérosités pourrissent : il faut au moins deux ans sur les racines de 4 à 5 millimètres de diamètre pour que la pourriture se soit étendue à l'axe de la racine et ait désorganisé celle-ci sur des points assez nombreux et à une profondeur suffisante pour que ces lésions deviennent mortelles. Il ne faut pas oublier non plus que la plante peut soutenir très longtemps son existence par la production, sur la souche, de radicelles nouvelles.

C'est pour ces mêmes raisons que les chevelées et les boutures plantées en terrain phylloxeré ne meurent pas généralement avant la fin de la deuxième année, quelquefois le milieu de la troisième, à moins toutefois que le sol ne soit particulièrement aride.

Il n'y a aucun doute que la maladie phylloxerique ne soit

infiniment plus grave, toutes choses égales d'ailleurs, dans le Midi que dans le Nord. Cela tient à plusieurs raisons dont la principale me paraît être la durée beaucoup plus considérable, dans le Midi, d'une température favorable au développement des organismes parasitaires, et la pénétration de la chaleur solaire dans le sol à une bien plus grande profondeur que dans le Nord.

On peut encore s'expliquer par ce qui précède comment les vignes atteintes du phylloxera, malgré les insecticides et la submersion, demeurent ensuite au moins trois années dans un état d'affaiblissement si remarquable. C'est que toute racine qui porte un certain nombre de tubérosités (1) est fatalement destinée à périr tôt ou tard. Si cette racine est jeune, c'est-à-dire d'un faible diamètre, elle succombera deux ou trois ans après la piqûre de l'insecte; si elle est âgée, ce sera après quatre, cinq et peut-être six années seulement. Les viticulteurs devraient avoir toujours ce fait présent à l'esprit et être bien convaincus que le système radiculaire tout entier d'une vigne qui a été phylloxerée pendant deux ou trois années est condamné à disparaître. Dans une vigne malade, traitée par les insecticides ou la submersion, il n'y a plus, trois ou quatre années après le premier traitement, que des racines de ce même âge; les anciennes, si ce n'est quelques-unes des plus grosses, ont succombé à la pourriture. C'est pour cela que la vigne reprend si lentement sa vigueur primitive et que l'on est obligé de lui appliquer des fumures intensives. N'est-il pas nécessaire, en effet, de refaire à bref délai le système radiculaire tout entier qui disparaît pièces à pièces?

Le lecteur remarquera peut-être que, dans tout ce qui précède, je me suis occupé presque uniquement du danger qu'offrent les tubérosités pour la vie de la plante, et que j'ai négligé les nodosités. C'est, qu'en effet, ces dernières n'ont guère à mes yeux qu'une importance secondaire. Elles me paraissent être à peu près incapables de déterminer à elles seules la mort de la vigne, au

---

(1) Je parle ici seulement des tubérosités produites avant le commencement du traitement insecticide ou de la submersion.

moins dans les sols qui ont un peu de fraîcheur et de profondeur. Il doit être bien rare, même dans les terrains les plus phylloxerés, qu'il ne reste pas à la plante, pendant les deux premières années de maladie, assez de radicelles saines pour lui fournir l'eau suffisante à sa transpiration. Cependant, je dois dire qu'il est très probable que c'est à la destruction des radicelles par les nodosités qu'il faut attribuer les cas de mort foudroyante, pendant les deux premières années de la maladie, que l'on a, paraît-il, constatés quelquefois dans les terrains arides, en Provence et dans le Languedoc, durant les mois de juillet et août. Mais ce sont là de rares exceptions, si même elles existent; et on ne conçoit guère qu'un Délégué de l'Académie, chargé plus spécialement de l'étude de ces phénomènes, ait pu consacrer des années et des volumes à l'étude des nodosités sans presque dire un mot des tubérosités qui sont mille fois plus importantes et dangereuses. Il est vrai que c'est le même auteur qui, pendant quatre années, a tranché, examiné, décrit et dessiné des centaines de nodosités, sans y soupçonner les myceliums qui en déterminent la pourriture.

Nous avons vu précédemment que les nodosités des radicelles sont absolument caractéristiques de la présence du phylloxera. En est-il de même pour les tubérosités? C'est là une question qui vaut la peine d'être examinée avant de passer outre.

On peut répondre par l'affirmative. Le lecteur qui aura suivi attentivement la description précédente sera toujours capable de distinguer les tubérosités phylloxeriques de toutes les proéminences et renflements que l'on peut rencontrer accidentellement sur la vigne. Cependant, je dois mentionner ici une déformation particulière des racines de l'année qui pourrait peut-être induire en erreur un observateur non prévenu. J'en ai représenté un exemple type dans la figure 29 (pl. IV). On pourrait la désigner sous le nom de *déformation moniliforme*. Ses causes me sont inconnues. Quelle que soit l'analogie que présentent les renflements en chapelet dont je parle avec les tubérosités phylloxeriques, on pourra les en distinguer du premier coup, par ce fait seul qu'ils sont toujours complètement sains. Si on les coupe longitudina-

lement en promenant un canif bien affilé dans l'épaisseur de l'écorce, suivant un plan tangent à la racine, on ne mettra jamais en évidence la plus légère tache obscure, le plus petit point de pourriture; tandis que la même opération exécutée sur une racine portant des tubérosités phylloxeriques laisse toujours apparaître un nombre variable de taches brunes qui correspondent à la section de tubérosités en voie de décomposition (fig. 24, *a, a,* pl. IV). De même, si l'on enlève complètement l'écorce, dans le cas de déformation moniliforme, le bois se montrera toujours complètement sain, tandis que sur les racines phylloxerées, il présente généralement des taches brunes plus ou moins fréquentes, suivant l'âge des tubérosités auxquelles elles correspondent.

Il est nécessaire de mettre encore le lecteur en garde contre le danger de confondre les tubérosités phylloxeriques avec les bosselures que l'on trouve à la surface des racines affectées de Pourridié. J'ai dit déjà que ces dernières se distinguent généralement par leur forme allongée; mais ce n'est pas toujours le cas. Quoi qu'il en soit, on pourra facilement les reconnaître au caractère suivant : en les coupant à leur base ou en soulevant l'écorce, on trouve dans leur intérieur une houppe de mycélium d'un blanc de neige, qui correspond à la moelle du cordon de *Rhizomorpha subcorticalis* qui est caché dans leur épaisseur.

Dans le travail mentionné plus haut, nous avons constaté, M. Gayon et moi, que le sucre normal de la racine de la vigne se comporte, dans la maladie phylloxerique, exactement comme nous avons déjà vu qu'il le fait dans celle du Pourridié. Il diminue de quantité à mesure que la pourriture des nodosités et tubérosités fait des progrès pour disparaître complètement des points affectés, non du reste de la plante, dès que la pourriture est très avancée. Il nous a été impossible de reconnaître l'interversion du sucre signalée, il y a quelque temps, par M. Boutin.

J'espère avoir, dans ce qui précède, déterminé nettement les caractères du Pourridié de la vigne et ceux de la maladie phylloxerique. Les propriétaires qui ont à redouter pour leurs

vignobles l'un ou l'autre de ces fléaux me sauront gré, je l'espère, d'en avoir retracé l'évolution et la physionomie d'une façon plus nette et plus complète qu'on ne l'avait fait jusqu'ici.

Mais en commençant cette étude, j'ai mentionné ce fait que souvent le Pourridié complique la maladie phylloxerique : je dois encore, avant de quitter la plume, ajouter quelques éclaircissements à ce sujet.

Pour peu que l'on ait parcouru les publications relatives à la nouvelle maladie de la vigne, on a dû remarquer que les auteurs font très fréquemment mention de filaments ou de plaques blanches de mycélium qui se trouvent dans les écorces de la portion souterraine des souches pendant la dernière phase de la maladie ou après la mort des plantes. Quelques écrivains ont reconnu ou cru reconnaître le Pourridié dans cette végétation cryptogamique (1). On peut même dire, chose curieuse, que jamais on n'a autant parlé du Pourridié que depuis que l'on s'occupe du Phylloxera.

Pour ma part, il m'est arrivé fréquemment de constater le Pourridié sur les vignes phylloxerées arrivées à la période ultime du dépérissement. Dans le domaine de l'Observatoire de Bordeaux, notamment, où j'ai eu occasion de faire arracher un assez grand nombre de souches phylloxerées malades depuis longtemps, mais non mortes, j'ai pu m'assurer que le Pourridié se retrouve sur un tiers au moins de ces dernières, dans les points où le terrain n'est pas très sec. Le vigneron qui cultivait ce vignoble affirme n'y avoir remarqué aucune maladie avant l'apparition du Phylloxera. — Je dois dire encore qu'indépendamment du *Rhizomorpha* on trouve sur les racines des vignes atteintes depuis longtemps par le Phylloxera des cordons de mycéliums considérables qui appartiennent vraisemblablement à quelques espèces de Basidiosporées et présentent une grande ressemblance avec les mycéliums de la maladie des *mortaouses*.

(1) Il me semble certain que bon nombre d'auteurs confondent la maladie des *mortaouses* ou une affection analogue avec le Pourridié proprement dit.

Il est donc hors de doute que la maladie du Phylloxera prédispose à celle du Pourridié. Comment se fait-il que les germes de cette dernière affection, qui certainement ne sont point rares dans le sol, restent inoffensifs pour les racines de la vigne, dans les conditions normales d'existence, pour ne devenir dangereux que lorsque le Phylloxera a commencé son action destructive? C'est ce qu'il m'est impossible d'expliquer. Toutefois, je vois, quant à présent, dans ce fait, une confirmation précieuse du rôle que j'attribue aux organismes parasitaires, champignons et autres, dans la maladie phylloxerique.

Dira-t-on, dans les cas dont je parle, que la vigne succombe au Pourridié et non au Phylloxera? Evidemment non, puisque sans le Phylloxera le Pourridié ne se serait pas déclaré.

Des cas entièrement semblables se présentent, dit-on, non plus parmi nos vignobles européens, mais dans les nouveaux vignobles de composition américaine. Il arriverait, par exemple, que des *Taylors* dont les racines offrent de nombreuses tubérosités et sont pourries périssent avec les symptômes du Pourridié. Dira-t-on qu'ils sont morts de cette dernière maladie et non du Phylloxera? A ce compte, Dupont avait raison de prétendre que dans la nouvelle maladie de la vigne le Phylloxera n'était rien et le Pourridié la chose essentielle. Pourquoi conclure, dans deux cas identiques, de deux façons diamétralement opposées?

Mais, dira-t-on, les vignes américaines sont plus sensibles au Pourridié que les françaises. — C'est ce qu'il faudrait prouver d'abord! Pour moi, tant qu'on trouvera plus particulièrement le Pourridié sur les vignes américaines sensibles au Phylloxera, telles que le *Taylor*, le *Clinton* et d'autres que je pourrais citer, et tant qu'il ne se montrera que rarement sur les *Riparias* sauvages, les *Rupestris*, les *Pédroni*, *York-Madeira*, *Solonis*, etc., qui défient presque complètement les attaques de l'insecte, je me croirai autorisé à dire que dans ces vignes exotiques, comme dans les nôtres, le Pourridié n'est qu'un épiphénomène et que le Phylloxera est la cause même de la mort.

Janvier 1880.

EXPLICATION DES PLANCHES

(Toutes les figures, dessinées par l'auteur, ont été photographiées et imprimées par M. André Quinsac, photographe à Toulouse.)

POURRIDIÉ

PLANCHE I.

Fig. 1. — Racine pourridiée, âgée de quatre à six ans, à la surface de laquelle se voient plusieurs cordons rhizomorphiques, les uns simples, les autres ramifiés, qui, après être sortis de la racine en un point, rampent à sa surface pour rentrer dans son intérieur quelques centimètres plus loin. A part un léger aplatissement, ces cordons représentent la forme *subterranea* typique du *Rhizomorpha*. Au bas de la figure, une anfractuosité dans laquelle se voient plusieurs cordons appartenant à cette même forme.

Grossissement de 3/2.

Fig. 2. — Racine pourridiée, de même âge, dont la surface est couverte des irrégularités et bosselures considérables qui sont caractéristiques de la présence du *Rhizomorpha*. Sur le côté droit de la figure se voient, en deux ou trois points différents, de minces cordons rhizomorphiques qui sortent de la racine. Ces derniers ont été brisés presque à leur point d'émergence.

Grandeur naturelle.

Fig. 3. — Une racine de l'année que le *Rhizomorpha* commence à envahir à sa base, c'est-à-dire au point où elle est insérée sur la souche. Dans toute la partie de la racine qui est occupée par le *Rhizomorpha*, l'écorce est devenue plus foncée et présente des crêtes saillantes, entrecroisées, plus étendues, suivant l'axe de la racine, que transversalement. L'écorce, dans ce point, semble devenue beaucoup plus épaisse. La plupart des crêtes sont fissurées suivant leur ligne médiane; au fond de la fissure, on peut découvrir, à la loupe, un cordon noir de *R. subcorticalis*.

Grossissement de 2/1.

Fig. 4. — La même racine fendue longitudinalement, suivant son axe. L'écorce semble avoir augmenté d'épaisseur, par suite de la présence

du *Rhizomorpha*. Le périderme est soulevé en maint endroit par le parasite et disloqué. Dans les points où le périderme a éclaté sous l'effort du champignon, la couche corticale noire des cordons rhizomorphiques est à nu. Les espaces blancs que limite l'écorce noire dont je parle répondent à la moelle des cordons rhizomorphiques. Ces derniers ne forment guère dans l'écorce qu'une seule couche en épaisseur. Le bois a pris une coloration brune dans la région qui correspond au *Rhizomorpha*.

Grossissement de 2/1.

Fig. 5. — Racine pourridiée ayant séjourné plusieurs mois dans l'alcool. L'écorce a été enlevée à sa partie antérieure jusqu'aux cordons rhizomorphiques. Ce sont ces derniers que l'on aperçoit sous forme de rubans aplatis ou plissés longitudinalement, denticulés sur les bords, irrégulièrement anastomosés. Sous l'influence de l'alcool, ils ont perdu leur aspect spongieux, cotonneux, se sont aminci et ont pris plus de solidité. — Dans le bas de la figure, deux cordons de la forme *subterranea* tendus transversalement dans une anfractuosité.

Grossissement de 2/1.

Fig. 6. — Racine pourridiée dans laquelle les couches extérieures de l'écorce ont été enlevées presque en totalité. Les arborisations blanches constituent les cordons du *R. subcorticalis*. A la partie inférieure de la figure, deux de ces cordons d'un trajet à peu près rectiligne, aux points où ils s'enfoncent dans deux grands rayons médullaires.

Grossissement de 3/2 environ.

Fig. 7. — Autre racine pourridiée dont l'écorce a été enlevée sur une partie de son épaisseur, laissant à nu la portion médullaire de plusieurs cordons rhizomorphiques.

Grossissement de 3/2 environ.

Fig. 8. — Surface extérieure d'une souche de 25 ans atteinte de pourridié. Cordons et bosselures constitués par des rubans rhizomorphiques intacts, c'est-à-dire encore recouverts de leur écorce noire.

Grandeur naturelle.

Fig. 9. — Coupe transversale de la racine représentée dans les fig. 3 et 4. On y voit plusieurs cordons aplatis de *R. subcorticalis*, dans l'épaisseur de l'écorce de la racine. La moelle de ces cordons est de couleur blanche, tandis que leur écorce est d'un brun très foncé. Ils ont soulevé, disloqué les couches extérieures de l'écorce et comprimé les couches intérieures. Dans quelques points, ils font saillie au dehors. En *a*, *a*, se voient des cavités dans l'intérieur de ces cordons; en *b*, *b*, des cavités produites dans l'écorce par la désorganisation

des tissus. A gauche de la figure, touchant au cambium de la racine, se voient deux jeunes cordons rhizomorphiques dont l'écorce est encore rudimentaire. Les rayons médullaires envahis par les filaments nourriciers du parasite se distinguent par leur teinte brune. La partie centrale de la racine, qui est occupée également par le champignon, se trouve aussi colorée en brun.

Grossissement de 12/1.

PLANCHE II

Fig. 10. — Coupe transversale d'une grosse racine, au point où cette dernière est traversée par une de ces productions membraneuses qui, sur la coupe, se présentent sous forme de lignes noires. *(Voir les lignes* a, a, *fig. 15.)*

La partie moyenne de la coupe représente un rayon médullaire (*r, r*); de *a* à *a*, la production rhizomorphique membraneuse, brune dont il est question. Elle est constituée par des cellules très petites et serrées qui remplissent la cavité des éléments anatomiques du bois. Des deux surfaces de cette sorte de membrane partent de très nombreux filaments mycéliaux beaucoup plus fréquents du côté du centre de la racine (côté du bas de la planche) que du côté de la surface de cette dernière (côté du haut de la planche). Ces filaments sont également beaucoup plus abondants et faciles à suivre sur les rayons médullaires (*r, r*) que dans les faisceaux ligneux.

Les vaisseaux et trachéides sont occupés par des filaments mycéliaux quelquefois très serrés. Les thylles y sont nombreux, et souvent les filaments mycéliaux rampent dans les interstices de leurs membranes.— En *d*, un gros vaisseau occupé par une sorte de cordon rhizomorphique microscopique.

Grossissement de 100/1 environ.

Fig. 11. — Altérations produites par le parasite dans les éléments du bois. *a*, portion de la fig. 10 vers le point *a; b*, portion de la même fig. 10 vers le point *b*.

En *a*, on voit, dans l'intérieur des éléments du bois, le tissu brun si délié qui, dans la fig. 10, constitue la pseudo-membrane *a, a*. En plusieurs points, on peut voir les filaments mycéliaux passer d'une cellule dans une autre par les ponctuations de ces dernières. Dans toute cette zone *a, a*, les membranes des éléments ligneux ont conservé leur épaisseur normale.

En *b*, les filaments mycéliaux sont incolores, peu nombreux relativement. Ils semblent passer toujours d'une fibre à l'autre par les ponctuations. Sous leur influence, les membranes secondaires des éléments ligneux se sont amincies, ont été érodées irrégulièrement.

Grossissement de 300/1 environ.

Fig. 12. — Une petite racine pourridiée, fendue dans son milieu, dans laquelle deux grands rayons médullaires se trouvent occupés par une expansion du *Rhizomorpha.* A la partie supérieure de la figure, on voit, dans l'écorce, des cordons rhizomorphiques, avec leur écorce brune, coupés obliquement.

Grossissement de 2/1.

Fig. 13. — Coupe transversale de deux cordons du *R. subterranea.* — *a,* cordon ovale, pourvu d'une moelle normale; — *b,* cordon arrondi, dépourvu de moelle.

Grossissement de 20/1.

Fig. 14. — Fragment de la figure précédente (*a*) vu à un grossissement beaucoup plus fort. A droite de la figure, le tissu serré à mailles noires constitue l'écorce du cordon. A gauche, le tissu incolore, plus lâche, est la moelle. — Dans l'écorce, on peut distinguer deux couches, l'une externe, où les membranes cellulaires sont très épaisses, distinctement stratifiées; l'autre interne, où ces membranes sont beaucoup plus minces.

Dans la forme *subcorticalis,* cette seconde couche de l'écorce existe seule, ainsi qu'on le verra plus loin (fig. 18, pl. III); l'externe manque complètement.

Grossissement de 100/1 environ.

Fig. 15. — Coupe longitudinale d'une racine pourridiée. — En *a, a,* lignes noires dont un fragment se trouve représenté, à un fort grossissement, dans la coupe transversale de la fig. 10. Dans l'écorce, cordons rhizomorphiques avec leur enveloppe noire qui envoient des expansions fongueuses blanches, dans l'épaisseur des rayons médullaires.

Grossissement de 2/1.

Fig. 16.— Cordon du *R. subcorticalis* dégagé de l'écorce qui l'entourait, duquel s'élève un pinceau roussâtre qui est le commencement d'un rameau rhizomorphique. En haut et au bas de la figure, l'écorce du cordon manque: il ne reste que sa moelle qui est blanche.

Figure de droite, de grandeur naturelle; figure de gauche, le même objet à un grossissement de 3/1.

Fig. 17. — Pinceaux de filaments roussâtres qui s'élèvent d'une racine pourridiée qui, comme pour l'échantillon de la figure précédente, a été gardée d'avril à juillet dans un flacon, sur de la terre humide Dans cette figure, ces pinceaux ont percé l'écorce de la racine.

A droite, grandeur naturelle; à gauche, grossissement de 3/1.

Planche III

Fig. 18. — Portion de la figure 9 (pl. I; en bas, à gauche de la figure,

vers le point *a*), vue à un fort grossissement pour montrer la structure des cordons du *R. subcorticalis*.

Fragments de deux de ces cordons. Celui de droite est pourvu de moelle, celui de gauche en est dépourvu.

En *l*, *l*, se voit le liège de la plante soulevé et déchiré par le parasite: *p*, *p* est son parenchyme cortical plus ou moins comprimé. Ce parenchyme a perdu son amidon, sauf dans un point restreint. En *e*, *e*, l'écorce à mailles serrées, petites et brunes du *Rhizomorpha*. En *m*, moelle d'un des cordons. En *o*, la moelle manque.

Grossissement de 120/1 environ.

Fig. 19. — Point où un cordon du *R. subcorticalis* envoie une expansion dans un rayon médullaire.

L'écorce *e*, *e* du cordon rhizomorphique est moins épaisse du côté gauche que du droit. Contre le rayon médullaire, elle présente une solution de continuité. Celle-ci est traversée par un paquet serré de filaments mycéliaux émanés de la moelle du cordon rhizomorphique lesquels plongent dans un rayon médullaire *r*. Le tissu de ce dernier a disparu presque complètement: il n'en reste que quelques cellules, arrachées à leurs connexions normales, comprimées, désorganisées. Dans le haut de la figure, à gauche, une cellule à raphides traversée par quelques filaments mycéliaux. Cambium anomal.

Grossissement de 120/1 environ.

Fig. 20. — Coupe transversale de la partie souterraine d'une souche pourridiée, âgée de 25 ans.

L'écorce de la souche présente plusieurs étages de cordons du *R. subcorticalis*. Son tissu propre est tellement comprimé et désorganisé par le parasite qu'il n'est plus qu'en proportion minime relativement à ce dernier. Sur un grand nombre de points, l'écorce épaisse et noire des cordons rhizomorphiques se trouve à nu au pourtour de la souche. (Rapprocher cette figure de la fig. 8, pl. I.) Quelques-uns des cordons envoient dans les rayons médullaires des expansions fongueuses, puissantes. (Voyez, en haut et à droite de la figure, deux de ces dernières expansions.) Le bois a changé de couleur. Dans les parties le plus profondément altérées, il a pris une teinte paille; les régions moins malades sont de couleur brune.

A la partie inférieure du corps ligneux et un peu à droite, se voient deux lignes noires flexueuses qui de l'écorce s'avancent dans le bois. Elles sont de même nature que celles représentées dans les figures 10 et 15 (pl. II). — Çà et là, surtout autour de la moelle, des points très foncés où les tissus présentent une altération spéciale indépendante du *Rhizomorpha*.

Grandeur naturelle.

Fig. 21. — Extrémité d'un cordon du *R. subcorticalis* dans l'épaisseur

de l'écorce. Préparations empruntées à la racine représentée dans les figures 3 et 4 (pl. I).

Pour simplifier la figure, la moitié droite seulement du cordon rhizomorphique a été dessinée. Le lecteur la complètera facilement par la pensée.

On voit qu'à son extrémité (*s*) le cordon rhizomorphique est constitué par un pinceau serré de filaments parallèles, effilés à leur sommet, qui s'enfoncent entre les cellules dont ils décollent les membranes. A moins d'un millimètre au-dessous du sommet, le cordon se creuse d'une cavité longitudinale dans laquelle apparaissent des filaments très déliés. Ces derniers constituent bientôt la moelle (*m*) du cordon dont l'écorce est formée par le tissu extérieur, à cellules plus grandes, sans méats, développé en premier lieu (*e*). En effet, à très peu de distance, dans les points plus âgés du cordon, on trouve cette écorce colorée en brun.

Les tissus de la plante nourricière sont refoulés par le parasite. J'ai figuré, pour plus de simplicité, un point où le cordon rhizomorphique descend dans le parenchyme cortical (*p*). On peut voir qu'à mesure que le *Rhizomorpha* augmente en épaisseur, les cellules parenchymateuses environnantes se trouvent de plus en plus comprimées, amincies. En même temps, leur couleur devient d'un brun plus foncé.

En *a, a* et ailleurs, les cellules du parenchyme sont traversées par les suçoirs du parasite qui partent de la surface du cordon et rayonnent dans tous les sens à travers les tissus de la plante nourricière.

Grossissement de 200/1 environ.

PHYLLOXERA

PLANCHE IV

Fig. 22. — Fragment de racine phylloxerée de *Malbec,* arrachée à la fin de juillet.

Presque toutes les radicelles sont envahies par le phylloxera et portent des nodosités. Diverses formes de ces dernières: nodosités simples et composées. En général, les plus anciennes sont plus grosses et ont une couleur plus foncée que les jeunes, mais non toujours. En effet, leur taille ne dépend pas seulement de leur âge, mais de la grosseur de la radicelle qui leur a donné naissance et de la multiplicité des piqûres de l'insecte. Quant à leur couleur, elle est en relation étroite avec leur état: les nodosités saines sont jaunes (jeunes) ou d'un brun très clair (âgées); lorsqu'elles pourrissent, elles deviennent presque noires. Les nodosités représentées dans cette

figure sont saines, à l'exception de celles qui sont autour du point *a*, dont la teinte plus foncée indique la pourriture plus ou moins avancée. Tel est en effet l'état des nodosités, à Bordeaux, à la fin de juillet.

On voit des phylloxeras fixés dans les enfoncements des nodosités saines. L'insecte a déserté celles qui commencent à pourrir.

Grandeur naturelle.

Fig. 23. — Petites racines de l'année de *Folle-blanche* phylloxerée, arrachées à la fin de novembre.

Les radicelles sont complètement pourries ainsi que les nodosités qu'elles portaient. Il ne reste plus de traces de ces dernières. Sur les racines de un millimètre de diamètre et au-dessus, nombreuses tubérosités. Celles-ci sont simples (par ex. en haut de la figure) ou composées. Celles qui commencent à pourrir sont de couleur foncée. On voit souvent à leur surface, lorsqu'elles sont dans ce dernier état, des ulcérations plus ou moins profondes; tandis que les tubérosités saines ont la surface à peu près lisse.

Grandeur naturelle.

Fig. 24. — Grosse racine de l'année de *Folle-blanche* arrachée à la fin de novembre.

Tubérosités presque toutes composées, généralement disposées en séries longitudinales. Un tiers environ est déjà en proie à la pourriture. Ce dernier état se traduit par leur coloration foncée et leur ulcération. En *a*, *a*, les tubérosités ont été détachées avec un rasoir. Les taches brunes que l'on distingue dans l'écorce correspondent à des tubérosités pourries.

Grandeur naturelle.

Fig. 25. — Racine phylloxerée de *Malbec*, arrachée au commencement de mai. — Du côté droit, vers le tiers inférieur de la figure, radicelle coupée.

En *a*, on reconnait cinq tubérosités composées qui, toutes, commencent à pourrir.

En *b*, l'écorce a été enlevée. On voit à la surface du bois trois taches brunes qui correspondent à trois de ces tubérosités et indiquent que dans ces points la pourriture de l'écorce a gagné l'axe ligneux de la racine.

Grandeur naturelle.

Fig. 26. — Racine phylloxerée de *Malbec*, âgée de deux ans, arrachée au commencement de mai. — *a*, surface extérieure; *b*, coupe longitudinale de la même.

Cette racine est couverte de tubérosités considérables, toutes atteintes par la pourriture. Plusieurs de ces tubérosités présentent

des enfoncements analogues à de petits cratères qui représentent les points le plus anciennement et le plus profondément ulcérés. On voit que l'exfoliation de l'écorce se fait d'une manière irrégulière. En *e, e,* deux tubérosités ont été exfoliées avec l'écorce, laissant leur base saine et lisse attachée à la racine.

La coupe longitudinale montre jusqu'à quelle profondeur s'étend la pourriture. Les lignes que l'on voit dans l'écorce représentent les lames de liège de défense qui primitivement ont leur point de départ dans les tubérosités, mais qui, avec le temps, semblent pouvoir s'étendre un peu plus loin. Dans plusieurs points, l'écorce est pourrie sur presque toute son épaisseur. En deux endroits, la pourriture a été arrêtée par une lame de liège de défense, ainsi du reste que cela a eu lieu aussi en *e, e.* Sur deux autres points, la pourriture a franchi ces lames de défense et pénétré dans le corps ligneux.

Grandeur naturelle.

Fig. 27. — Coupe transversale d'une racine analogue à celle de la figure 25, âgée d'un an. Les points qui commencent à pourrir, à l'exception des faisceaux de fibres du liber, sont tenus un peu plus foncés que le reste.

La tubérosité occupe le côté droit de la figure. C'est au point *t* qu'elle est le plus développée. Là, le périderme (liège) a éclaté sous la pression des tissus hypertrophiés sous-jacents; c'est par la fissure que les mycéliums ont pénétré dans la tubérosité. La formation de cette tubérosité a eu lieu vraisemblablement d'assez bonne heure (juillet), car le corps ligneux présente, de tout ce côté droit occupé par la tubérosité, une épaisseur beaucoup plus considérable que du côté opposé. De *l* à *l,* il s'est formé une plaque de liège de défense, mais qui n'a pas empêché les mycéliums qui avaient pénétré dans la tubérosité par son sommet d'arriver jusque dans les rayons médullaires adjacents. — Aux points *e* et *e,* les mycéliums se trouvent également dans l'épaisseur de l'écorce où, sur deux points, se sont produites de légères pertes de substance.

Grossissement de 12/1.

Fig. 28. — Coupe transversale d'une tubérosité placée sur une racine de deux ans: *Malbec.* Les points pourris sont tenus un peu plus foncés que le reste.

Cette tubérosité a une forme parfaitement régulière. En *c,* méplat où se trouvait l'insecte, tout autour duquel s'est formé un gonflement considérable. Au-dessous de *c,* l'écorce n'a guère que son épaisseur normale: aussi dans ce point reste-t-il un lambeau de périderme, tandis que ce dernier a complètement disparu de chaque côté, jusqu'en *a, a,* c'est-à-dire dans toute la zone où il a été le plus fortement distendu par l'hypertrophie des tissus sous-jacents. Cette tubérosité date presque certainement de la fin de la première année

de végétation de la racine, en tous cas du commencement de la deuxième année. En effet, le cylindre ligneux correspondant à la première année de végétation est parfaitement régulier, tandis que la couche de bois formé la deuxième année est beaucoup plus épaisse du côté de la tubérosité que du côté opposé. Cette plus grande épaisseur du bois correspond à un relâchement du périderme de ce même côté. Il est hors de doute que ce relâchement a dû se produire au plus tard vers la fin de juillet, pour que la différence d'épaisseur de la couche ligneuse soit aussi caractérisée. Mais la rupture et le relâchement du périderme ne se produisent pas avant que la tubérosité ait acquis déjà un développement considérable, ce qui renvoie l'origine de celle-ci au plus tard à la fin de juin, mais probablement jusqu'au commencement de la belle saison.

Dans cette tubérosité, il ne s'est pas formé de lames de liège de défense. Les mycéliums ont pénétré de bonne heure dans l'écorce, puis dans le bois, où ils ont causé des pertes de substance considérables.

Grossissement de 12/1 environ.

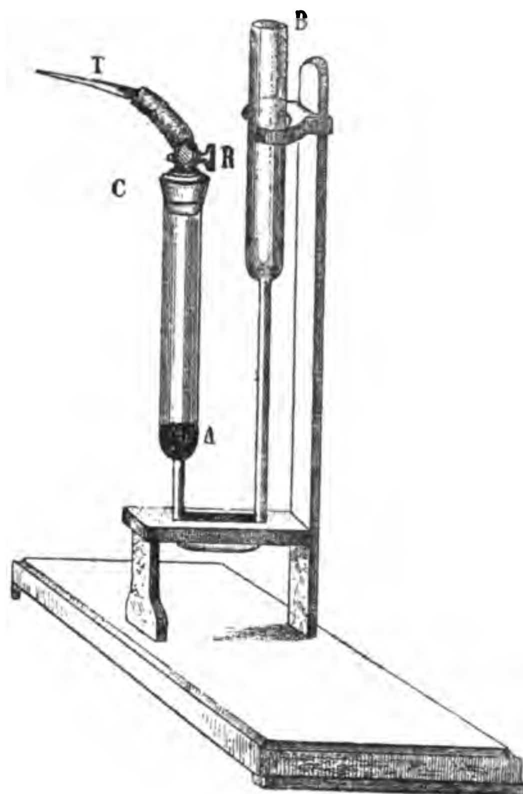
Fig. 29. — Exemple de déformation moniliforme des racines de l'année. *Mérille.*

Grossissement 3/2.

MODIFICATION DE L'APPAREIL DE MARCH

PAR M. DANNECY

Les accidents qui accompagnent l'emploi de l'appareil de March sont fréquents, surtout entre des mains peu expérimentées; souvent témoin, et moi-même victime quelquefois, du trop de précipitation à enflammer le gaz qui s'y produit, j'ai modifié cet appareil de la manière suivante :



CAB est un tube en U dont on ferme l'extrémité C par un bouchon muni d'un robinet R, et terminé par un tube capillaire.

En A, on met une couche de silex, sur laquelle on dispose quelques fragments de zinc distillés et purs, puis le robinet R étant fermé, on verse dans la branche la plus longue assez d'acide sulfurique pur étendu de huit fois son poids d'eau distillée pour le remplir presque complètement; maintenant, si l'on vient à ouvrir le robinet R, qui est refermé aussitôt que le liquide aura rempli tout le vide de la branche la plus courte, le gaz hydrogène résultant de la réaction de l'acide sulfurique forcera le liquide à remonter dans la longue branche et remplira la plus courte. Le robinet ouvert de nouveau laissera dégager le gaz, qui pourra être enflammé sans avoir à redouter le moindre accident.

A cet appareil on peut, dans le bouchon, à côté du robinet, pratiquer un orifice par lequel passe une pipette pneumatique qui permet d'introduire dans l'appareil, sans le démonter, la solution à essayer et suspectée renfermer de l'arsenic.

Ainsi modifié, cet appareil est d'un maniement très facile et d'une extrême commodité.

PRÉPARATION

DE

L'ÉTHER BROMHYDRIQUE

PAR L'ACTION SIMULTANÉE DU ZINC ET DE L'ACIDE SULFURIQUE SUR L'ALCOOL ÉTHYLIQUE ET LE BROME

PAR M. DENIGÈS

On verse dans une cornue tubulée munie d'un réfrigérant Liebig ascendant :

Brôme........ .... 2 parties

et la moitié d'un mélange refroidi de :

Acide sulfurique ordinaire............ 4 parties.
Alcool à 85°......................... 4 parties.

On introduit ensuite dans l'appareil :

Zinc en lames ou mieux en grenailles... 1 partie.

La réaction commence immédiatement à froid; si elle menaçait d'être trop violente, il faudrait plonger la panse de la cornue dans un bain d'eau à la température ordinaire.

(Pour éviter dans cette première partie de l'opération la perte d'un peu de brôme qui se dégagerait en vapeurs par l'extrémité libre du tube qu'entoure le réfrigérant, on peut relier cette extrémité par un caoutchouc à un second tube plongeant dans un verre contenant de l'eau, et dans lequel le brôme se condenserait.)

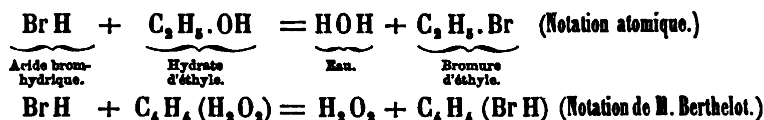
Lorsque la réaction se ralentit, on verse par petites portions la seconde moitié du mélange d'acide sulfurique et d'alcool. On chauffe alors légèrement, jusqu'à ce que le liquide qui retombe goutte à goutte du réfrigérant dans le col de la cornue soit presque entièrement décoloré.

Cela fait, on rétablit le réfrigérant dans sa position normale; on y adapte un ballon récipient, et l'on recueille le produit qui distille, en s'arrêtant au moment où les gouttes qui arrivent dans le récipient commencent à prendre un aspect laiteux.

Le produit brut ainsi obtenu est précipité par l'eau dont on le sépare par décantation, puis rectifié sur du massicot et du chlorure de calcium, en ne recueillant que ce qui passe à la distillation au-dessous de 41°.

La théorie de cette préparation peut être expliquée de la façon suivante qui paraît rationnelle :

On peut supposer que le zinc réagissant sur l'acide sulfurique donne de l'hydrogène naissant qui se combinerait immédiatement avec le brôme pour donner de l'acide bromhydrique; celui-ci réagissant à son tour sur l'alcool ferait double décomposition et donnerait de l'eau et du bromure d'éthyle. Ce qu'on peut exprimer par les formules :



$$\underbrace{BrH}_{\text{Acide bromhydrique.}} + \underbrace{C_2H_5.OH}_{\text{Hydrate d'éthyle.}} = \underbrace{HOH}_{\text{Eau.}} + \underbrace{C_2H_5.Br}_{\text{Bromure d'éthyle.}}$$ (Notation atomique.)

$$BrH + C_4H_4(H_2O_2) = H_2O_2 + C_4H_4(BrH)$$ (Notation de M. Berthelot.)

Le procédé de préparation du bromure d'éthyle par le phosphore ne donne une quantité notable de produits qu'entre des mains très exercées.

L'avantage du procédé indiqué plus haut est de donner la quantité presque théorique de l'éther.

Ainsi, dans une expérience, 29 grammes de brôme m'ont donné 37 gr. 50 de produit après rectification sur le chlorure de calcium; la théorie en eût exigé 39 gr. 50, soit 2 grammes ou environ $\frac{1}{20}$ de perte. Le rendement final est donc les $\frac{95}{100}$ du rendement théorique.

Mais si l'on tient compte que le produit ainsi obtenu est un produit rectifié et que toute rectification entraîne bien 5 p. 100 de perte nécessaire, on peut dire que ce procédé donne la quantité théorique d'éther bromhydrique.

Ce corps, peu utilisé jusqu'à présent, offre cependant des avantages incontestables sur les deux autres éthers formés par l'alcool et les autres hydracides des chloroïdes.

En effet, dans les circonstances ordinaires, le chlorure d'éthyle se présente et ne peut être employé qu'à l'état gazeux; l'éther bromhydrique ne bout que vers 40°, il peut donc être couramment employé à l'état liquide, sa manipulation est donc bien plus facile que celle du chlorure d'éthyle.

D'autre part, le bromure d'éthyle est inaltérable ou à peu près à l'action de la lumière; l'éther iodhydrique se décompose au bout de très peu de jours, même à la lumière diffuse.

L'éther bromhydrique pourra donc, dans beaucoup de cas, être substitué avantageusement au chlorure et surtout à l'iodure d'éthyle qu'on emploie presque exclusivement dans les laboratoires et dont le prix de revient même est de beaucoup supérieur à celui du bromure d'éthyle préparé par le procédé indiqué plus haut.

RECHERCHES

SUR LE

PASSAGE DU MERCURE A TRAVERS LES LIQUIDES

PAR M. E. ROYER

J'ai déjà eu l'honneur d'entretenir la Société, dans les séances du 19 février et du 18 mars, de mes recherches sur le passage du mercure à travers les liquides et de la perméabilité de ces derniers aux vapeurs mercurielles.

Je rappellerai que l'idée de ce travail m'a été suggérée par l'intéressante communication faite à la Société par notre savant et ingénieux collègue, M. Merget, sur la propriété que possède le mercure d'émettre des vapeurs d'une tension considérable et de se diffuser dans l'air et à travers les pores des corps solides, avec une énergie et une rapidité surprenantes.

Dans la note qui a été insérée au procès-verbal de la séance du 19 février, je donnais les raisons qui m'avaient conduit à supposer que les vapeurs mercurielles pourraient, avec moins de facilité peut-être que dans les gaz, cheminer dans les liquides et les traverser. Que ces raisons soient fondées ou non, c'est un point que des expériences spéciales pourront seules éclaircir. Il faut, avant tout, savoir si le fait existe; c'est ce que je me suis seulement proposé de vérifier dans la première partie de ce travail.

I

Voici, d'une manière générale, comment on a opéré tout d'abord :

On introduit dans de petites éprouvettes le liquide soumis à l'expérience, en lui donnant une épaisseur qui peut varier de quatre à cinq centimètres; puis, à l'aide d'un entonnoir effilé,

dont le bec plonge jusqu'au fond du liquide, on verse dans l'éprouvette une quantité suffisante de mercure pour en recouvrir la base. L'éprouvette est fermée par un bouchon à la partie inférieure duquel est fixé, à l'aide d'une épingle, un petit disque de papier impressionnable par les vapeurs mercurielles. On a soin de soumettre dans les mêmes conditions le papier réactif à l'action de chacun des liquides sur lesquels on expérimente, pris à l'état normal et ne contenant pas de mercure. Il est en effet indispensable de savoir, à l'aide d'un témoin dans chaque expérience, si l'altération du papier réactif est due aux vapeurs mercurielles qui pourraient traverser le liquide, ou aux vapeurs émises par le liquide lui-même.

Le premier réactif employé a été l'azotate d'argent ammoniacal recommandé par M. Merget, pour déceler les traces les plus minimes de vapeurs mercurielles. Pour le préparer, il suffit de verser dans une dissolution concentrée d'azotate d'argent, de l'ammoniaque, jusqu'à ce que le précipité blanc qui s'y forme tout d'abord se dissolve par un léger excès du précipitant.

Le papier préparé avec ce réactif s'altère très facilement à la lumière : sa sensibilité est telle pour la plupart des vapeurs, qu'il est presque impossible, quelles que soient les précautions qu'on prenne, de conserver intact le type primitif tel qu'il est au moment de sa préparation. Malgré ces imperfections, c'est lui que j'ai été obligé d'employer primitivement. Il a pu, cependant, me donner des indications assez nettes; car, bien qu'il soit plus ou moins altéré par les vapeurs propres du liquide en expérience, on peut constater que ces altérations ne sont pas identiques, pour un même liquide, dans l'éprouvette qui contient du mercure et dans celle qui n'en contient pas. Les vapeurs mercurielles produisent en effet une altération qui se traduit par une coloration noire *sui generis*, d'aspect métallique, qui permet facilement, avec un peu d'habitude, de la distinguer de celle qui pourrait provenir des vapeurs du liquide normal lui-même.

Les expériences faites au moyen de ce réactif sur neuf liquides différents ont prouvé que tous ces liquides reposant sur le mercure

émettent des vapeurs qui altèrent d'une manière particulière le papier réactif placé au-dessous du bouchon qui ferme l'éprouvette. Cette altération commence à se manifester après un temps relativement assez court, variable avec la nature du liquide et son épaisseur au-dessus du mercure (1).

Les liquides sur lesquels on a opéré sont : l'eau, l'alcool, l'essence de lavande, l'essence de térébenthine, la benzine, l'huile de pétrole et les huiles d'olive, de sésame et de colza.

Il est facile de voir, à l'aide du tableau suivant que je soumets à l'examen de la Société, dans quel ordre se placent les liquides, suivant l'altération plus ou moins profonde qu'ils font subir au papier réactif, quand ils sont seuls ou qu'ils recouvrent du mercure (2) :

A Liquides avec mercure.	B Liquides sans mercure.
1. Alcool.	1. Huile de colza.
2. Huile de pétrole.	2. Huile de sésame.
3. Essence de lavande.	3. Benzine.
4. Benzine.	4. Huile d'olive.
5. Huile de colza.	5. Essence de lavande.
6. Essence de térébenthine.	6. Essence de térébenthine.
7. Huile de sésame.	7. Huile de pétrole.
8. Huile d'olive.	8. Eau.
9. Eau.	9. Alcool.

Dans la colonne A, il y a entre les quatre premiers numéros une différence de teinte peu sensible qui décroît d'une manière assez difficile à apprécier, du noir au brun noir, au marron

(1) Il sera intéressant, et c'est ce que je me propose de faire, de déterminer les rapports des temps employés par les différents liquides, pour émettre sous des couches égales et dans des conditions analogues de température, des vapeurs mercurielles susceptibles d'altérer également le papier réactif. Toutes les expériences consignées dans le présent mémoire ont été faites à des températures variant, suivant la saison, de 0 à 15° centigrades.

(2) La difficulté de reproduire ce tableau, ainsi que ceux dont il sera question dans la suite de ce travail, avec les teintes exactes que chacun des papiers réactifs a prises sous l'influence des vapeurs des différents liquides avec ou sans mercure, m'a empêché de les joindre au texte. J'ai dû me borner à les soumettre à l'examen des membres de la Société.

foncé, et enfin jusqu'au brun jaunâtre pour l'eau qui tient le dernier rang de cette colonne.

On savait déjà que l'azotate d'argent ammoniacal est altéré par les vapeurs de beaucoup de liquides. Le tableau B nous montre que ce sont en général les huiles grasses qui, par leurs propres vapeurs ou par celles des substances qu'elles contiennent (on a opéré sur des huiles qu'on trouve dans le commerce et dont on ne connaît pas le degré de pureté), altèrent ce réactif de la manière la plus énergique, plus que les essences végétales et les huiles minérales; que c'est l'alcool dont les vapeurs ont le moins d'action sur le papier réactif, quand il est seul, bien que ce soit lui qui occupe le premier rang dans la colonne A, lorsqu'il recouvre du mercure. On peut remarquer encore que l'huile de pétrole qui occupe le n° 2 dans la colonne A, n'occupe que le n° 7 dans la colonne B [1].

II

J'ai repris les expériences en employant comme réactif le chlorure de palladium que M. Merget a aussi indiqué comme un réactif très sensible aux vapeurs mercurielles; et, d'après ses conseils, je me suis servi d'un sel de palladium additionné d'un peu de chlorure de calcium, qui empêche la trop prompte dessiccation du papier réactif, et accuse facilement la présence des vapeurs mercurielles. Ce réactif est beaucoup plus stable que l'azotate d'argent ammoniacal; il ne s'altère pas sensiblement à la lumière; il n'est pas aussi attaquable par les vapeurs des liquides, mais il est presque aussi facilement impressionnable par les vapeurs mercurielles qui lui communiquent également une teinte noire à reflets métalliques. Ce réactif m'a permis d'obtenir des résultats analogues à ceux que j'ai obtenus avec l'azotate d'argent ammoniacal, mais plus faciles à distinguer. Les expériences ont

[1] Peut-être ces remarques, dont on n'aperçoit pas bien l'utilité immédiate, pourront-elles, dans un travail spécial, donner des indications importantes, quand il s'agira de chercher à assigner le rôle que joue dans le passage des vapeurs mercurielles et leur diffusion dans les liquides, la constitution chimique et moléculaire de chaque liquide. Il suffit, pour le moment, d'en prendre note.

été disposées comme les précédentes; on a seulement modifié la manière de préparer le papier réactif. Dans le premier cas, on prenait une étiquette dont la partie centrale était légèrement enduite d'azotate d'argent ammoniacal; ce papier réactif s'altérait promptement, il donnait une tache plus ou moins noire, plus ou moins uniforme dans sa coloration, soit par les vapeurs mercurielles, soit par les vapeurs des liquides eux-mêmes.

Avec le chlorure de palladium, voici comment j'ai opéré : J'ai fait une dissolution bien étendue de ce corps; puis, avec une plume bout-d'aile, j'ai formé, au centre de l'étiquette, un quadrillé de lignes assez fines; ce quadrillé est à peine visible quand l'étiquette est sèche, et le type se conserve très longtemps. J'ai encore suivi, en agissant ainsi, les indications de M. Merget qui avait vérifié que le papier réactif est d'autant plus sensible qu'il est plus rugueux, et que la plume qui sert à tracer le quadrillé, en égratignant le papier, en augmente la rugosité, et par suite la sensibilité. Assez peu ou point altéré par les vapeurs des liquides sans mercure, ce quadrillé est profondément altéré par les vapeurs mercurielles; il devient plus ou moins foncé et sa coloration est d'autant plus facile à apprécier, qu'elle se traduit par des carreaux de plus en plus sombres sur un fond qui reste blanc.

On a fait, à l'aide du nouveau réactif, des expériences sur les liquides suivants : eau, alcool, esprit rectifié, pétrole, benzine, essences de térébenthine et de lavande, huiles d'olive, de sésame et de colza.

Les expériences faites dans deux séries distinctes ont été simultanément répétées quatre fois dans chaque série; c'est-à-dire que, dans chacune d'elles, on a, sans changer ou modifier l'expérience, renouvelé quatre fois les papiers réactifs, à intervalles à peu près égaux, depuis le 26 mars jusqu'au 12 mai. On aurait pu les renouveler plus souvent, car ils sont assez vite altérés par les vapeurs mercurielles. Les tableaux ci-joints ont été disposés de telle sorte que les résultats de chaque expérience dans les deux séries soient représentés par une double colonne dont la première contient le papier réactif soumis aux vapeurs mercurielles, et la

seconde, le papier modifié seulement par les vapeurs propres du liquide (1).

On voit facilement à l'inspection de ces tableaux :

1° Que dans les deux séries et dans les quatre colonnes que chacune d'elles comprend, les résultats concordent parfaitement;

2° Que ces résultats sont analogues à ceux qu'on a obtenus en employant, comme réactif, l'azotate d'argent ammoniacal;

3° Que l'ordre dans lequel les liquides peuvent se classer suivant l'altération plus ou moins profonde que leurs vapeurs produisent sur le papier réactif pendant la durée de l'expérience, selon qu'ils reposent ou non sur le mercure, est la même que plus haut.

III

Des expériences qui précèdent, on peut conclure que les liquides qui reposent sur le mercure émettent des vapeurs qui altèrent le papier réactif autrement que les vapeurs propres de ces liquides; mais nous ne pouvons pas encore affirmer que les vapeurs mercurielles ont cheminé dans le liquide et l'ont traversé.

Ne peut-il pas se faire, en effet, qu'avec autant de précaution et de vitesse qu'on retire l'entonnoir qui sert à introduire du mercure dans l'éprouvette, des vapeurs mercurielles se diffusent dans le milieu aérien qui sépare le liquide du bouchon? N'est-ce pas à ces vapeurs et non à celles qui semblent traverser le liquide qu'est due l'altération du papier réactif?

Il est facile de répondre à ces objections par les considérations suivantes :

Si réellement l'altération du papier réactif est due seulement aux vapeurs mercurielles qui ont pu, pendant la préparation de l'expérience, se diffuser au-dessus du liquide et non aux vapeurs qui le traversent, il n'y a pas de raison pour que les papiers

(1) La série A contient aussi des expériences faites sur de la graisse fondue à une douce chaleur, et dans laquelle on a versé, en prenant les précautions indiquées, un peu de mercure qui a été bientôt recouvert par la graisse solidifiée. Les résultats ont été analogues à ceux que donnent les liquides.

réactifs ne soient pas influencés de la même manière et dans le même temps, par tous les liquides, ce qui n'est pas.

Il faudrait aussi que l'action des vapeurs mercurielles contenues *a priori* dans le milieu aérien se fît sentir sur les papiers réactifs avec lesquels elles sont immédiatement en contact, d'une manière instantanée et avec une intensité allant en décroissant avec le temps; c'est-à-dire à mesure que s'épuise la petite quantité de vapeurs mercurielles qui auraient pu se diffuser dans l'espace aérien. Or, l'expérience prouve que le papier réactif placé sur l'éprouvette à des époques différentes est, à temps égal, au moins autant, sinon plus altéré, à mesure qu'on s'éloigne du moment où on a introduit le mercure dans l'éprouvette.

On pourrait encore objecter que les réactifs dont on se sert sont si sensibles à l'action des vapeurs mercurielles que celles qui se seraient diffusées dans l'espace aérien suffiraient pour altérer, pendant longtemps, les papiers réactifs sur lesquels on les ferait agir successivement; qu'il n'y aurait pas besoin, pour produire ce résultat, des vapeurs mercurielles qui traverseraient les liquides.

Sans doute les papiers réactifs sont extrêmement sensibles; mais il n'y a pas besoin, pour constater l'action des vapeurs mercurielles émises par les liquides qui reposent sur le mercure, de réactifs aussi délicats, pourvu qu'on laisse à l'expérience le temps d'accuser des résultats; c'est ce que montre clairement l'expérience suivante :

Dans trois petites éprouvettes d'une hauteur de dix centimètres, on a versé de l'eau, de l'huile de pétrole et de l'essence de térébenthine, de manière à remplir la moitié de l'éprouvette. On y a introduit du mercure, en prenant les mêmes précautions que précédemment. On a fermé chacune de ces éprouvettes avec un bouchon, à la partie inférieure duquel on a fixé, avec une épingle, un petit carré taillé dans une feuille d'or pur d'une épaisseur d'un millimètre. Une quatrième éprouvette, ne contenant que de l'air, bouchée d'une manière analogue et munie d'une petite plaque d'or, servait de témoin à l'expérience. Ces quatre éprouvettes, mises à l'abri de la lumière (on a toujours opéré ainsi dans les

expériences citées plus haut) le 16 février dernier, ont été examinées le 10 juin. A ce moment, la lame d'or du témoin était intacte, celle qui était au-dessus de l'eau était ternie; elle présentait, par réflexion, des reflets blanchâtres; les deux autres étaient blanches et avaient l'aspect de l'or recouvert d'une mince couche de mercure. Très probablement, si on laissait l'action se continuer, l'altération des plaques s'accentuerait de plus en plus. Dans tous les cas, il est évident déjà que l'infime quantité de vapeurs mercurielles qui se seraient diffusées dans l'espace aérien, auraient été insuffisantes pour recouvrir les plaques d'une couche de mercure; qu'il faut que les vapeurs mercurielles aient sans cesse et peu à peu traversé les liquides pour produire sur les plaques le dépôt qu'on y a constaté et dont on a vérifié en même temps la nature.

IV

Bien que les considérations précédentes et les résultats de l'expérience que je viens de citer me paraissent de nature à faire admettre que les vapeurs mercurielles traversent les liquides, je crois utile de décrire les expériences que j'ai été successivement conduit à faire pour lever complètement toutes les objections.

On verse le liquide, en lui donnant une épaisseur d'au moins un décimètre, dans une grande éprouvette qu'on ferme au moyen d'un bouchon traversé par un tube assez large pour qu'on puisse y verser du mercure à l'aide d'un petit entonnoir et qui plonge au fond du liquide; ce bouchon porte à sa partie inférieure un papier réactif. Lorsque tout est en place d'une manière fixe, on verse dans le tube, et peu à peu, une quantité de mercure suffisante pour couvrir le fond de l'éprouvette (*fig.* 1). Avec cette manière d'opérer, s'il reste des vapeurs dans le tube, elles ne peuvent évidemment agir sur le papier réactif qu'en passant à travers le liquide, puisque l'espace aérien compris entre ce dernier et le bouchon leur est complètement interdit.

On a agi de cette manière sur cinq liquides, en prenant pour témoins ces cinq liquides à l'état normal, et contenus dans des appareils identiques aux premiers.

Les résultats de cette expérience faite sur l'eau, l'alcool, la benzine, l'huile de pétrole et l'essence de térébenthine ont été absolument les mêmes que ceux déjà trouvés.

On a fait à cette manière d'opérer l'objection suivante :

N'est-il pas possible qu'en versant du mercure dans le tube ouvert, la colonne liquide qu'il contient, refoulée avec force, puisse, en vertu de sa vitesse acquise, se briser sur le fond du vase et traverser la masse liquide en entraînant avec elle des vapeurs mercurielles, qui, en se diffusant dans l'espace aérien, peuvent altérer le papier réactif? — Cette objection, très sérieuse si on opérait sur des couches liquides d'une petite épaisseur, perd de son importance quand on remarque que l'on a affaire à des épaisseurs d'au moins un décimètre; que le mercure est versé peu à peu dans le tube, de manière à ne pouvoir pas y former une espèce de piston massif qui entraînerait la colonne liquide tout d'une pièce, pour prendre brusquement sa place et la refouler assez vigoureusement pour lui faire traverser, en vertu de son choc sur le fond du vase, l'épaisseur liquide qui la sépare de la couche extérieure.

J'ai cependant modifié l'expérience de la manière suivante :

Le tube qui traverse le bouchon, au lieu d'être ouvert aux deux bouts, est fermé à sa partie inférieure et terminé en pointe très effilée. On le fixe dans le bouchon avant l'expérience, de telle sorte que sa pointe puisse arriver, lorsque ce dernier sera à peu près en place, jusqu'au fond du vase, et s'y briser quand on l'enfoncera à son point de bonne fermeture (*fig.* 2). Cela fait, on verse le liquide dans l'éprouvette et on place sur elle le bouchon traversé par le tube effilé. Ce tube contient une quantité suffisante de mercure, et le bouchon porte à sa partie inférieure un papier réactif. En forçant légèrement pour enfoncer le bouchon, la pointe du tube se brise et le mercure s'écoule peu à peu, sans vitesse acquise, par l'étroite issue qui lui est offerte. Le liquide remplace le mercure dans le tube; s'il contient ou s'il entraîne avec lui quelques vapeurs mercurielles, ces vapeurs ne peuvent pas agir, soit directement, soit indirectement, sans traverser la couche liquide

contenue dans l'éprouvette. En opérant de cette manière sur trois liquides : l'eau, l'alcool et la benzine, j'ai obtenu des résultats identiques aux précédents.

Enfin, pour couper court aux objections tirées de l'existence accidentelle des vapeurs de mercure contenues *a priori* dans l'espace aérien, j'ai agi de manière à supprimer cet espace lui-même.

Parmi les nombreuses expériences que j'ai faites, je citerai les suivantes :

Dans une éprouvette complètement pleine d'eau, on verse du mercure à l'aide d'un tube à entonnoir; on retire le tube, et si un peu de liquide a débordé, on achève immédiatement de remplir l'éprouvette. Au bout de quelque temps, alors qu'aucun mouvement ne se produit, ni à la surface du mercure, ni dans l'intérieur du liquide, on décante une partie du liquide en inclinant légèrement l'éprouvette; on la ferme aussitôt à l'aide d'un bouchon portant à sa partie inférieure un papier réactif; l'épaisseur de la couche d'eau qui repose sur le mercure est alors d'environ douze centimètres. Au bout de quelques jours, l'altération du papier commence à se manifester, croît et finit par atteindre son maximum. Si on renouvelle le papier réactif, le même phénomène se reproduit, mais l'altération du papier est plus rapide que précédemment.

— On verse par un tube à entonnoir du mercure dans une petite fiole à goulot très étroit, d'une hauteur d'environ douze centimètres et complètement pleine d'eau. On retire le tube et on achève de remplir la fiole. On attend jusqu'à ce qu'on ne distingue plus, même à l'aide d'une forte loupe, le moindre mouvement dans l'intérieur de la fiole (*fig.* 3). Puis, à l'aide d'un fil flexible préalablement attaché à son goulot, on enlève verticalement la fiole pleine et on l'introduit avec précaution, ainsi suspendue, dans une grande éprouvette qui, elle-même, est complètement remplie d'eau; une partie du liquide déborde, mais il en reste encore cinq ou six centimètres au-dessus de l'extrémité supérieure du goulot de la fiole. On ferme l'éprouvette par un bouchon portant à sa partie

inférieure un papier réactif. Un autre appareil identique au premier sert de témoin. Au bout de quelques jours, les vapeurs mercurielles ont nettement accusé leur présence par leur action sur le papier réactif. Si, lorsque ce dernier a atteint son maximum d'altération, on le remplace par un autre, celui-ci est plus vite altéré que le précédent. On peut renouveler le papier plusieurs fois de suite, on obtient toujours les mêmes résultats.

— Au lieu d'une fiole, on a pris une petite éprouvette qu'on a suspendue d'une manière identique et introduite, pleine d'eau, dans une autre plus grande, et aussi pleine d'eau; les mêmes phénomènes se produisent encore.

V

Des considérations précédentes et des expériences que je viens de citer, on pourrait conclure que c'est par leur passage à travers les liquides interposés que les vapeurs mercurielles gagnent l'espace aérien situé entre le bouchon et la surface du liquide et agissent sur le papier réactif.

Cependant, aussi nettes que soient ces expériences, il me semble utile d'en faire connaître d'autres de nature à corroborer ces conclusions.

Après avoir versé avec toutes les précautions ordinaires du mercure au fond d'un liquide incapable de dissoudre le réactif, on a fermé l'éprouvette qui le contenait avec un bouchon portant à sa partie inférieure un petit tube de verre qui s'enfonçait, sans le traverser, dans un autre bouchon d'un diamètre beaucoup plus petit que celui de l'éprouvette. Le système des deux bouchons était établi de telle sorte que le plus gros fermait exactement l'éprouvette et que le plus petit s'enfonçait entièrement dans le liquide sans toucher les parois du vase (*fig.* 4). L'extrémité inférieure du bouchon immergé se trouvait distante de six centimètres environ de la surface du mercure. Un autre appareil identique au premier, mais ne contenant que le liquide normal, servait de témoin. Les bouchons plongés dans les deux liquides portaient, sur leur

surface, plusieurs papiers réactifs. L'expérience a été faite dans de l'huile de pétrole et commencée le 13 mars. Au bout de quelques jours, l'altération du papier réactif s'est visiblement accusée; elle a acquis son maximum après une dizaine de jours. Quand on a constaté que la teinte ne changeait plus, on a muni le bouchon de nouveaux papiers réactifs, sans enlever les premiers; ceux-ci ont mis moins de temps que les autres pour prendre le maximum d'altération qu'ils ont conservé. Quant au papier qui est dans le liquide normal depuis le 13 mars, il n'est point altéré (20 juin).

— On a fixé à un petit carré de verre une lame d'or de même forme et on a suspendu horizontalement le petit système dans l'essence de térébenthine, en maintenant la lame d'or à six ou sept centimètres de la surface du mercure qu'on avait introduit dans l'éprouvette. L'expérience commencée le 18 février a été examinée le 10 juin. A ce moment, la lame d'or était devenue blanchâtre; à côté d'une lame type, elle présentait les reflets et l'aspect de l'argent. Cette lame, bien séchée et mise en présence d'un papier réactif dont elle était séparée par un double de papier à filtre, l'a promptement et profondément altéré par les vapeurs mercurielles qu'elle a émises. Une partie de cette lame légèrement chauffée à la flamme de la lampe à alcool, a repris sa couleur et son état primitif; l'autre, chauffée dans un tube fermé, en présence d'un très petit cristal d'iode, a donné de l'iodure rouge de mercure qui s'est déposé en se volatilisant sur les parois du tube. Une expérience faite dans des conditions identiques avec une lame de cuivre qui plongeait dans de la benzine, a donné des résultats analogues.

VI

Les expériences précédentes prouvent d'une manière incontestable que les vapeurs mercurielles cheminent dans le liquide, puisqu'elles peuvent agir sur le papier réactif et sur les lames métalliques qui y sont complètement immergées et isolées; elles suffiraient donc pour justifier les conclusions que je dois tirer de

mes recherches; mais on peut encore faire d'autres expériences aboutissant aux mêmes conséquences.

Si réellement le liquide est perméable aux vapeurs mercurielles, si elles traversent continuellement son épaisseur pour arriver à l'espace aérien, il est évident que dès qu'elles commencent à faire sentir d'une manière uniforme leur action sur le papier réactif, elles sont arrivées, si je puis m'exprimer ainsi, à leur maximum de tension dans les liquides; et, comme elles les traversent d'une manière continue, il faut qu'à un instant quelconque, à partir de ce moment, le liquide contienne des vapeurs mercurielles. On devra donc, en isolant une partie du liquide qui a séjourné sur le mercure, obtenir par son intermédiaire, au moins pendant quelque temps, l'action des vapeurs mercurielles sur le papier réactif, comme s'il recouvrait encore du mercure.

C'est en effet ce qui arrive. Si on recueille avec soin, au moyen d'une pipette, du liquide qui a séjourné longtemps sur le mercure et qu'on l'introduise dans une éprouvette fermée à l'aide d'un bouchon dont la partie inférieure porte un papier réactif, on verra promptement le papier s'altérer et prendre la teinte caractéristique due aux vapeurs mercurielles. Il est bien entendu qu'on a toujours opéré simultanément sur le liquide normal et dans les mêmes circonstances. Le liquide ainsi séparé du mercure peut émettre des vapeurs mercurielles pendant un temps assez considérable, qui dépend, pour chaque liquide, de celui qu'il a mis à se saturer de ces vapeurs, de sa capacité pour elles, je dirai presque, de la quantité en poids qu'il peut en renfermer.

Le tableau que j'ai l'honneur de placer sous les yeux de la Société montre clairement ce qu'on vient d'indiquer.

Il se compose de quatre colonnes dont les trois premières contiennent les papiers réactifs modifiés, et la quatrième, le papier réactif qui, placé sur le liquide sans mercure, a servi de témoin dans chaque expérience. Les liquides sur lesquels on a opéré sont restés environ quinze jours sur le mercure. La première colonne contient les résultats produits sur les réactifs par les liquides décantés, du 4 au 26 mars; la seconde, ceux du 26 mars au

4 avril; la troisième, ceux du 4 au 9 avril. Ces liquides sont l'eau, l'essence de térébenthine, l'huile de pétrole, la benzine, l'alcool, les huiles d'olive, de sésame, de pied de bœuf.

On peut remarquer que les liquides qui se sont laissé traverser le plus vite par les vapeurs mercurielles sont aussi ceux qui cessent le plus tôt d'en émettre, lorsqu'ils sont séparés du mercure : tels sont l'alcool, le pétrole, la benzine; que ceux qui en émettent le plus longtemps sont également ceux qui se sont laissé traverser avec le plus de difficulté, comme l'eau et les huiles végétales.

On aurait pu, surtout pour ces derniers liquides, établir dans ce tableau encore plusieurs colonnes; car, depuis le 9 avril jusqu'à aujourd'hui 20 juin, ils n'ont pas cessé d'émettre des vapeurs mercurielles, comme on s'en est assuré en renouvelant depuis lors, et à différentes reprises, les papiers réactifs.

On pouvait craindre qu'en prenant, à l'aide d'une pipette, le liquide qui a séjourné sur le mercure, on n'entraînât avec lui une partie des vapeurs mercurielles dont l'espace aérien était saturé, et que ce fût à elles qu'on devait l'altération du papier réactif. Bien qu'en réalité cette crainte ne soit pas fondée, puisque les liquides ainsi séparés possèdent pendant si longtemps et à des degrés si différents la propriété d'émettre des vapeurs mercurielles, j'ai cependant fait une expérience qui ne laisse aucun doute sur ce point.

J'ai versé de l'eau dans une grande éprouvette qui a été fermée de la manière suivante : le bouchon porte un tube fermé par une pointe effilée; il est en même temps traversé par un siphon dont la petite branche pourra, lorsque le bouchon sera en place, plonger et s'enfoncer à volonté dans le liquide, et dont la grande porte à son extrémité un petit robinet (*fig.* 5). On verse du mercure dans le tube effilé et on ajuste le bouchon sur l'éprouvette; la pointe du tube se brise et le mercure s'écoule. A ce moment, on amorce le siphon, et on ferme le robinet; le siphon se trouve, dès lors, continuellement amorcé. Si, au bout de quelques jours, on recueille, en ouvrant le robinet et sans rien déplacer, un peu de l'eau qui est restée sur le mercure, sans avoir à redouter d'entraîner de l'air

venant de l'éprouvette, on constate par une épreuve comparative faite avec de l'eau pure, que ce liquide, séparé du mercure, jouit de la propriété d'émettre des vapeurs mercurielles, et que l'action de ces dernières sur le papier réactif est d'autant plus vive et intense, que le liquide est resté plus longtemps sur le mercure.

J'ajoute, sans entrer dans des détails qui allongeraient trop ce mémoire, que l'expérience précédente et la plupart de celles que j'ai citées réussissent aussi bien, si, au lieu de faire reposer les liquides sur du mercure, on les laisse reposer sur de petites plaques de cuivre bien décapées et recouvertes d'une légère couche mercurielle.

VII

Des expériences et des réflexions qui précèdent, on est en droit de conclure, sans émettre d'hypothèse sur la manière dont les choses se passent, sans s'occuper s'il y a diffusion réelle du mercure dans les liquides, ou seulement transport des vapeurs mercurielles par de l'air, des gaz ou tout autre véhicule :

1° Que les liquides qui recouvrent du mercure et ne peuvent se combiner directement avec lui, émettent des vapeurs qui altèrent les papiers réactifs et les métaux, tels que l'or et le cuivre, autrement que ne le feraient leurs propres vapeurs ;

2° Que les vapeurs mercurielles traversent les liquides sous des épaisseurs assez considérables ;

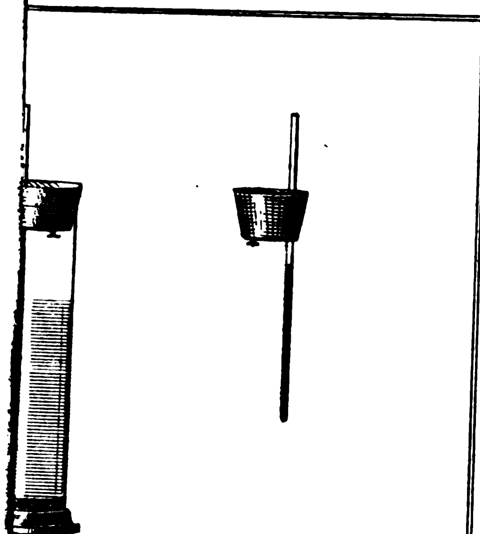
3° Que les liquides qui ont séjourné sur du mercure conservent la propriété d'émettre des vapeurs mercurielles pendant un temps assez long et qui diffère pour chacun d'eux.

24 juin 1880.

Depuis le dépôt de ce travail sur le bureau de la Société, j'ai fait de nouvelles et nombreuses expériences dans lesquelles je me suis exclusivement servi, au lieu du mercure lui-même, des plaques

de cuivre légèrement amalgamées dont j'ai parlé en dernier lieu, et auxquelles on pouvait facilement donner toutes les positions possibles dans le liquide. On mettait en regard de la plaque et à des distances variables, soit du papier réactif dans les liquides qui ne l'attiraient pas par eux-mêmes, soit une lame d'or sur laquelle on décelait ensuite la présence du mercure. Cette manière commode d'opérer m'a permis de constater que les vapeurs mercurielles traversent les liquides dans tous les sens, et, par suite, de supposer qu'elles s'y diffusent réellement comme dans les gaz.

17 août 1880.


Fig. 2

ets
de
elle
ule
ent
'aut
iges
ire,
:. Il
que
'une

:.)

sei-
ent
ons
les
tet,
e et
let,

que
: de
lans
ture
lrait
ırait
:s en


4


Fig. 5

DE LA RECONSTITUTION

ET

DU GREFFAGE DES VIGNES

PAR Mme Vve FRANCIS PONSOT

« Outre l'étude de la résistance et de la valeur des sujets
» comme production directe, il y a encore la question de
» greffage qui mérite une étude toute spéciale et sur laquelle
» nous désirons appeler l'attention des viticulteurs. Une foule
» de systèmes sont prônés et essayés, et la plupart ne donnent
» que des résultats décourageants et onéreux. Ce qu'il faut
» surtout, c'est moins aller vite que sûrement. Les avantages
» ne se mesurent pas au nombre des sujets que l'on peut faire,
» mais bien au nombre des réussites que l'on peut obtenir. Il
» vaut mieux avancer lentement, mais avec certitude, que
» d'aller trop vite et ne compter que des déceptions à la fin d'une
» campagne. »

P. Boiteau.

(*Bulletin du Comice de Libourne*, 1880, 2e fascicule.)

Il pourrait sembler téméraire et inutile de donner des renseignements sur les différentes greffes, quand viennent successivement de paraître, pour les vignerons, l'excellent *Résumé des leçons pratiques sur le greffage, en mars 1880*, à Montpellier; — pour les spécialistes, la nouvelle édition de l'*Art de greffer*, de M. Ch. Baltet, notre maître à tous; et enfin, pour les lettrés, le *Traité théorique et pratique du greffage de la vigne*, par M. Aimé Champin, si complet, si plein de verve, d'érudition et d'expérience.

Il m'a paru pourtant qu'il restait quelque chose à dire, et quelque chose d'important. On a énuméré une prodigieuse quantité de greffes; on nous a appris à les faire, et nous sommes restés dans l'embarras du choix. Je voudrais montrer le travail de la nature après celui du greffeur, et je crois que le choix deviendrait meilleur et serait tellement limité que, à mon avis, il n'y aurait qu'une bonne greffe pour reconstituer nos vignes. Les intéressés en jugeront.

Vve F. Ponsot.

Les Annereaux, près Libourne, 24 août 1880.

I. — De la Reconstitution des vignes.

Je ne m'arrêterai pas à plaider la cause des vignes américaines, cause que l'expérience et la nécessité défendent mieux que les raisonnements. A mes yeux, leur résistance se démontre avec évidence par la nature particulière de leurs racines et la manière dont elles soutiennent la lutte contre le Phylloxera. Le point important à l'heure actuelle me semble être de mettre cette résistance à profit pour reconstituer promptement des vignes aussi bonnes et aussi belles que possible.

Je formulerais volontiers ainsi la reconstitution de nos vignobles :

Au point de vue de la résistance, le plus certain est de recourir au *Riparia* sauvage.

Au point de vue de la production, à nos cépages français.

Au point de vue du greffage, à la greffe anglaise à double fente sur raciné.

II. — Du *Riparia* sauvage.

Je crois que tous les cépages américains non hybridés d'européens résistent au Phylloxera, mais ils ont, comme nos cépages, des exigences de terrain et de climat qui nous obligent à des études spéciales et peuvent induire en erreur au sujet de leur résistance. Tous pourraient servir de porte-greffe. Le *Riparia* sauvage réunit au plus haut degré les qualités essentielles d'un bon porte-greffe : facilité de reprise, vigueur, résistance exceptionnelle, adaptation à tous les terrains, à tous les climats, et affinité complète avec nos cépages.

Le *Riparia* a un grand nombre de variétés sauvages et cultivées; les variétés sauvages sont toutes bonnes comme résistance, mais il en est d'excellentes. Elles se distinguent *surtout et sûrement* aux racines. Certaines variétés ont des racines se rapprochant beaucoup soit de celles du *Clinton*, soit de celles du

Taylor, et elles donneront vraisemblablement des déceptions dans les terrains où ces cépages souffrent. D'autres ont des racines fibreuses, menues et drues, peu fournies d'embranchements et de radicelles; depuis quatre ans que j'ai distingué et que je trie ces variétés, je les trouve toujours indemnes *à l'œil nu* et ne les vois souffrir dans aucune nature de terrain.

Le feuillage et le bois des meilleures variétés peuvent avoir des différences assez sensibles : la feuille, droite, ouverte et luisante, plus ou moins lobée, a toujours les nervures tomenteuses. Ce caractère me paraît le plus constant et les nervures glabres avec la feuille plus mate distingueraient les variétés inférieures. Le bois peut se nuancer du rouge au violet ; celui qui est tomenteux appartient à une très bonne variété, mais non à la meilleure.

III. — De l'affinité entre les vignes françaises et américaines.

L'affinité entre les divers porte-greffe et nos différents cépages est une difficulté qu'on a, je crois, exagérée; nombre de faits, succès ou insuccès, ont été trop promptement interprétés dans un sens ou dans l'autre.

Les expériences ont été faites en mauvaises conditions, soit par le greffage d'américains sur français, soit par le greffage de boutures françaises *sur boutures* américaines.

Dans le premier cas, greffage d'américains sur français, il se pourrait très bien que ce que l'on considère comme répulsion fût le résultat de la vigueur du cépage américain, qui s'affranchit parce qu'il en a les moyens et qu'il ne trouve pas sa vie sur le sujet, surtout quand il est greffé sur souche phylloxerée, comme il arrive généralement. Il est à remarquer que cet affranchissement se produit dans le greffage de français sur français, sans que l'on puisse l'attribuer à la répulsion. D'ailleurs, le cépage américain, par sa vigueur, semble plutôt appelé à servir de porte-greffe que de greffon.

Dans le second cas, greffage de boutures françaises *sur boutures* américaines, l'équilibre s'établit si difficilement entre deux boutures insuffisamment nourries pour le travail qu'on leur demande, que les effets les plus capricieux peuvent se produire sur un porte-greffe qui cherche surtout à s'enraciner et un greffon qui trouve la sève où il peut. C'est par le greffage *sur raciné* et avec des quantités importantes qu'il faut, je crois, juger de l'affinité, et encore ne faudrait-il pas mettre tous les insuccès au compte de l'antipathie. Tel porte-greffe, comme les *Æstivalis*, pourrait amener un échec qui ne se serait pas produit si le mouvement de sève avait été avancé par une stratification en terrain chaud ou si le greffon français avait été retardé. Le contraire pourrait avoir lieu avec le *Riparia*, qui est si précoce, quoique ce soit une bonne condition que l'avance du porte-greffe sur le greffon.

J'ai essayé de tous nos cépages girondins et d'un grand nombre de cépages français, et j'ai toujours obtenu *sur les racinés* des différents *Riparia*, *Cordifolia* et *Æstivalis*, des soudures excellentes et durables et une proportion de reprise considérable, sans écart sensible entre les différents cépages. Nous greffons en réalité sur sauvageon (1), dit très bien M. Pulliat avec son bon sens de savant et de praticien, et non sur des sujets d'une espèce différente de celle de la vigne Les répulsions, de même que l'épuisement, ne sont donc pas à redouter comme lorsqu'il s'agit d'une union forçant la nature.

IV. — Du greffage.

On traite beaucoup trop légèrement la question du greffage. « Toutes les greffes sont bonnes pourvu qu'elles réussissent, » me disait une autorité dans la matière. Il faut s'entendre sur ce qu'on appelle réussir : le succès doit se juger à la soudure et non à une pousse vigoureuse dont l'avenir est souvent problématique.

---

(1) *La Vigne américaine*, avril 1880.

« Vous voulez faire du jardinage, » répètent les vignerons.

Il nous faut, en effet, choisir : être des jardiniers qui font du vin ou des vignerons qui boivent de l'eau.

« Pardon, Madame, mais ce sont là des procédés féminins qui ne peuvent convenir à la grande culture, me dit-on encore; j'ai cinq cent mille pieds de vigne à remplacer et vous conviendrez que je ne peux pas perdre mon temps aux détails. » — C'est précisément pour ne pas perdre son temps qu'il faut choisir une bonne greffe; le temps employé à planter et à greffer pour arracher, n'est-il pas du temps perdu?

« On a l'habitude de la greffe sur souche, c'est la plus ancienne, la plus connue, *donc* elle doit être la meilleure. »

La conclusion ne me paraît pas nécessaire, le but surtout n'étant pas le même qu'autrefois.

On a inventé une greffe plus ou moins naturelle ou compliquée. Elle ne manque jamais ou, du moins, elle donne un chaos de pousses et de racines françaises et américaines envahissant le terrain trois mois après la plantation et, vite, inventeur, commissions, délégués, la préconisent sans examen et le troupeau de moutons se précipite. On part pour Berlin et on capitulera à Sedan.

V. — De la soudure.

La soudure, les conditions dans lesquelles elle se fait et met le nouveau cep sont d'une importance capitale pour la reconstitution des vignes sur racines américaines.

Il est généralement admis parmi les nombreux greffeurs suscités par la vigne américaine que la vigne se soude dans toutes ses parties et non comme les autres arbres fruitiers par le rapprochement des cambiums; il se répète aussi que les parties amputées se cicatrisent parfaitement sous terre.

Cela est complètement faux, et c'est parce qu'on ignore les principes les plus élémentaires de la structure et de la vie de la

plante, principes que l'on peut apprendre, sans connaître les termes techniques, en coupant un bois de vigne, en faisant la section d'une greffe, en étudiant avant d'enseigner, en expérimentant avant de publier, que l'on invente et propose sérieusement, solennellement, triomphalement les greffes les plus absurdes.

Il y a pour le greffage des règles absolues et connues.

Entre les couches ligneuses et les couches corticales se trouve « une couche génératrice », dit M. Ch. Baltet, *le cambium* (*fig.* 1, pl. I), où se concentre la circulation, l'activité de la plante. Là s'élabore la sève, se forment et se transforment les nouvelles couches; là *seulement* porte-greffe et greffon peuvent se souder par le rapprochement de leurs cellules en voie de formation.

La soudure dans le greffage n'est pas une soudure comme celle des métaux, un scellement comme celui de deux pierres par le mortier, c'est une union des couches rapprochées qui est tellement complète que la circulation de la sève s'établit entre elles. — Le cambium appliqué au bois ne s'y soude pas, parce que la circulation ne peut s'établir qu'entre deux couches jeunes et actives (1). — Une coupe découverte se mortifie plus ou moins profondément et ne se cicatrise jamais, ni en l'air ni sous terre (1) (2). — Deux coupes *exactement assemblées* s'unissent par leur cambium, mais leurs surfaces ligneuses se fanent, se mortifient et ne s'unissent pas, quelque serrées qu'elles soient dans l'intérieur de la greffe (3). — Intérieure ou extérieure, la coupe du bois peut être recouverte par les sucs débordant du cambium et se solidifiant : les parties ligneuses ne produisent jamais ces sucs. Quand ces derniers les recouvrent, ils forment une soudure inerte qui prend dans toute son épaisseur un aspect mortifié et n'est qu'un *bouche-trou;* il n'y a ni rapprochement, ni formation de cellule, ni circulation de sève. Il ne faut pas compter que cette soudure s'identifiera aux tissus de la plante : elle pourra former une écorce, en apparence

(1) Voir la greffe sur souche.
(2) Voir les greffes par approche.
(3) Voir les greffes anglaises.

faire corps avec eux, mais elle ne *se développera pas*, elle les dérangera; ils feront bourrelet autour de la soudure que l'on pourrait faire sauter d'un coup d'ongle [1].

Le but du greffeur des vignes américaines doit donc être d'assembler aussi *exactement,* aussi *solidement* et aussi *complètement* que possible les parties actives du greffon et du sujet pour obtenir avec une grande facilité de reprise des ceps bien constitués et réellement à l'abri du phylloxera.

Dire que le succès en greffage est dans la multiplicité des rapprochements, des points de contact, est inexact et insuffisant, car ces rapprochements ont des lois et cette multiplicité a des limites. Une greffe dont on multiplierait les languettes ou que l'on prolongerait à l'extrême, pourrait bien être fort mauvaise; il y a en tout une juste mesure, la sève n'est pas inépuisable et il faut la bien employer.

Je ne crains pas de dire, car je ne l'ai pas inventée et l'ai beaucoup pratiquée, que *la greffe anglaise à double fente sur raciné* est la seule de tous points irréprochable; elle me semble le dernier mot du greffeur, comme la barrique contenant, enfermant, roulant le liquide est le dernier mot du tonnelier.

L'examen des coupes des principales greffes soudées en apprendra plus sur leur mérite et sur les procédés de la nature que des règles abstraites.

Dans la greffe en fente, les biseaux du greffon ne se soudent jamais aux parois de la fente du porte-greffe, la sève du cep forme un courant qui afflue sous la lamelle d'écorce du greffon; elle unit les couches corticales rapprochées du sujet et du sarment (AB, AC, *fig.* 2, pl. I), les soulève, les gorge, les tord en dehors de la souche amputée (*fig.* 3, pl. I); toute la circulation se reporte en arrière, les couches s'y superposent, rayonnant d'abord en éventail (*fig.* 4, pl. I), puis s'élevant au-dessus de l'amputation, elles s'équilibrent autour d'un nouveau centre médullaire (*fig.* 5, pl. I).

---

[1] Voir la greffe au galop, l'extrémité de la greffe Champin et la greffe sur souche.

Porte-greffe et greffon se mortifient dans toutes les parties où la circulation n'est pas établie.— Il en résulte peu de solidité pendant les premières années et une plaie béante qui se crevasse et ne se cicatrise jamais (*fig*. 6, pl. I). C'est précisément quand la greffe sur souche est dans les conditions voulues pour la résistance, vivant exclusivement des racines de la souche, qu'elle offre le moins de solidité et de vigueur, parce qu'elle n'est pas soutenue et consolidée par les racines du greffon.

Dans un rang de souches américaines, greffées en 1878, j'ai trouvé une soudure satisfaisante, toutes les autres médiocres ou inquiétantes (*fig*. 8, 9, 10, pl. I). Dans la soudure représentée par les *fig*.7 et 8, on voit deux racines au talon A et une troisième partant du haut du biseau B, en avant, qui s'est implantée dans la fente de la souche. Le greffon est fixé en *a* et *b* (*fig*. 8, pl. I) au sujet auquel il adhère et qui pourtant contribue fort peu à son alimentation. Plusieurs souches étaient dans ces conditions. L'accident le plus fréquent est l'enracinement de l'extrémité du greffon A (*fig*. 7, pl. I); il est d'autant plus à redouter que les nouvelles racines plongent assez directement, sont peu éloignées du premier collet du sujet et deviennent promptement si vigoureuses que le greffeur chargé de retrancher les racines françaises s'y trompe facilement. J'ai vu à des boutures greffées sur boutures depuis six mois, la racine du talon avoir sept millimètres de diamètre, et à une greffe sur souche de quatre ans, avoir dix-huit millimètres de diamètre. A ne considérer que la partie aérienne, ces greffes étaient les plus belles, et ce n'est qu'en les arrachant, en les dépouillant et en en faisant la section, que j'ai pu me rendre un compte exact de leur état. Qu'arrivera-t-il dans ces conditions, lorsque le phylloxera aura fait son œuvre?

Je dois tenir compte de quelques greffes de très petit diamètre qui m'ont donné de meilleurs résultats; les nouvelles couches entouraient presque complètement la partie amputée et elles finiront par l'enfermer et la faire disparaître dans une tige irrégulière mais solide. La soudure des greffes en fente sur jeunes porte-greffe serait donc de beaucoup préférable à la soudure sur

ceps de trois ou quatre ans ou davantage, mais le greffage sur souche n'en resterait pas moins coûteux et chanceux, inférieur de tous points à la greffe anglaise sur raciné.

J'examinerai la greffe sur souche à d'autres points de vue que celui de la soudure; mais je tiens à constater ici que la prédilection dont elle est l'objet de la part d'un assez grand nombre de propriétaires de notre région et particulièrement du Midi, tient plutôt à l'habitude qu'on en a qu'à son excellence. Elle a été longtemps la seule greffe connue; tout paysan un peu adroit l'a pratiquée; tout propriétaire intelligent l'a employée pour changer de cépage ou rajeunir [1] sa vigne; mais, *on ne peut trop le répéter*, les conditions faites par le phylloxera compliquent la question : on ne s'inquiétait pas des racines du greffon qui consolidaient et secondaient puissamment le greffage; on n'avait pas à craindre l'affranchissement du nouveau cep, tandis que nous devons maintenant éviter absolument les racines françaises et compter uniquement sur la soudure pour alimenter la jeune souche.

La comparaison entre les figures 11 et 12 (pl. II) et les figures précédentes prouvera avec évidence la supériorité de la greffe anglaise au point de vue de la soudure. On voit que la sève a monté circulairement, accroissant et continuant régulièrement la tige avec la moelle au centre, sans plaies qui l'exposent aux infiltrations, ni rétrécissements qui la rendent fragile.

C'est une soudure solide *et complète*, pourtant *toujours extérieure*. J'ai dit que les greffes ne se soudent que par leur cambium et que le reste de la coupe, quelque enfermé et serré qu'il soit, ne se soude pas. On pourra s'en assurer en examinant une greffe anglaise soudée. Si l'on fait pénétrer délicatement la lame d'un couteau dans une des fentes B ou C de la greffe de l'année (*fig.* 14, pl. II) et que l'on suive cette fente dans toute sa longueur,

---

[1] On semble attribuer le renouvellement, le rajeunissement d'une vigne à la greffe : il est bien plus logique de l'attribuer au remplacement d'une vieille souche noueuse et crevassée par une jeune tige dans laquelle la sève circule librement. Lorsqu'on ne veut pas changer la variété d'une vigne, le recépage la rajeunit aussi bien et plus économiquement que le greffage.

on trouvera les coupes des deux biseaux n'adhérant entre elles que par une couche ligneuse blanche et striée qui les borde et qui est enveloppée circulairement par la couche corticale. Le centre des coupes est desséché, mais ne pourrit pas, étant renfermé dans la soudure (*fig.* 15, pl. II).

Les années suivantes, les couches ligneuses se superposent (*fig.* 12 et 13, pl. II) sous l'étui cortical, qui s'élargit pour les contenir. Les surfaces sèches des coupes restent exactement les mêmes et deviennent un point insignifiant au centre de la greffe.

La greffe anglaise à double fente sur bouture est loin de donner une aussi bonne soudure que la greffe sur raciné. Il semble du reste logique que la simple bouture ne puisse fournir à la fois de bonnes racines et une bonne soudure et que le bois consistant d'un raciné fasse un meilleur porte-greffe qu'un sarment de l'année. Cette greffe fait naître beaucoup d'illusions, car il faut la butter assez haut pour que le greffon ne sèche pas; il arrive alors qu'il s'enracine mieux qu'il ne se soude et, pour qui ne veut que de bons plants, les quatre-vingt pour cent de réussite généralement proclamés se réduisent à quinze ou vingt, malgré leur belle végétation. J'en ai fait vingt-quatre mille en 1877 et au moins autant depuis, comptant toujours sur de nouveaux perfectionnements : stratification verticale, renversée, horizontale, œil d'appel sur l'extrémité, greffage et plantation tardifs ou précoces, greffon court, bouturage souterrain, etc.; j'ai toujours montré des pépinières splendides, mes succès ont été signalés avec plusieurs autres et ils n'étaient que des illusions. Puissé-je dans l'intérêt de ceux qui comptent encore greffer bouture sur bouture ouvrir la liste des aveux; j'ai lieu de croire qu'elle serait longue, mais il se pourrait que confesser un insuccès fût un procédé féminin.

A des résultats décourageants comme reprise se joint ainsi, je l'ai dit plus haut, une grande infériorité de la soudure. Elle se fait généralement par tronçons plus ou moins bien réunis : on dirait qu'on peut y suivre les efforts des deux sarments pour se tirer d'affaire ensemble ou séparément. Le greffon se met le premier en mouvement et semble aussi arriver le premier pour la soudure

avec la sève descendante, mais elle va généralement faire une racine à l'extrémité du biseau; les crans se soudent, évidemment par la collaboration des deux sèves, mais là se borne d'habitude leur union. Si le porte-greffe s'enracine bien, il donne de la vigueur au greffon, mais souvent il pousse des rejets et quelquefois émet des racines à l'extrémité supérieure. Pourriture, ablation des rejets, de la racine du talon et souvent de plusieurs autres, tout cela fait une médiocre soudure et un plant crevassé et mutilé. Les figures 16 et 17 (pl. II) présentent la coupe transversale de racinés de six mois (je choisis toujours dans les meilleures greffes). Les surfaces saines se développent, mais leurs profondes excoriations ne se modifient pas les années suivantes. La figure 18 (pl. II) est la coupe d'une bouture greffée de la pépinière de 1876, mise en place en 1877, arrachée à l'automne de 1879. La greffe sur raciné 12 et 13 (pl. II) faite sur table et soudée en place en 1878, arrachée en octobre 1879, montre sans contredit un résultat autrement satisfaisant, à tous les points de vue; actuellement, *ses contemporaines dépassent de beaucoup la plantation de boutures de 1876-77.*

Je dirai pour la greffe bouture sur bouture comme pour la greffe sur souche; elle peut donner des plants suffisants et même vigoureux, mais non irréprochables, et elle ne les donne qu'*à la condition* de faire un triage sévère qui la rend plus coûteuse que la greffe sur raciné, sans qu'elle puisse être aussi bonne.

C'est le procédé favori de la grande culture : on prend un lauréat de plusieurs concours de vitesse qui passe pour faire cent greffes à l'heure, toutes bottelées; on met sous ses ordres quelques vignerons dont il n'a pas plus envie de faire des élèves qu'eux n'ont celle de le devenir; mais l'amour-propre s'en mêle et c'est à qui fera le plus de greffes, plus ou moins râclées, plus ou moins fendues. On produit cinquante mille boutures greffées : c'est généralement le chiffre. Il y a quelques bouts français en bas, quelques américains en haut : c'est un détail. On fait stratifier dans l'eau, aux quatre vents : c'est bien bon pour des américains qui engendrent le phylloxera. On plante généralement

pour remplacer des pieds morts dans une vieille vigne couchée, recouchée, mourante, que l'on se garde bien d'arracher; car le paysan vit toujours dans l'espoir de la résurrection et le propriétaire dans celui d'un insecticide merveilleux. Parfois, on se résigne à faire une pépinière, et comme les sarments ont bonne envie de vivre, ils poussent partout. On a quatre-vingt pour cent de réussite : propriétaire et vigneron commencent à être fiers de leur œuvre. Le moment de lever la pépinière arrive; les jours sont courts; l'ouvrage presse : on arrache à force. Au soleil couchant, en entasse les plants sur des brouettes, on met en fossés à la nuit close. Le triage se fera au moment de la plantation et on a toujours quatre-vingt pour cent de reprise. Arrivent les premiers jours de printemps, l'ouvrage presse encore; le vigneron doit faire un choix : mais dépouiller l'argile, palper le plant serait bien long pour un homme pressé qui n'y connaît pas grand'chose et y croit encore moins. Les fameuses racines au talon sont celles qui font le plus d'effet; et l'on met en terre bien profondément, *pour trouver la fraîcheur*, sans s'écarter beaucoup des quatre-vingt pour cent. Pendant ce temps, l'heureux planteur fait de la théorie transcendante et bientôt le vigneron, passé maître, en remontre à son curé. Quand les racines françaises qui soutiennent la plantation succomberont, ce sera une question de résistance ou d'adaptation et le porte-greffe employé, *Riparia*, *York* ou *Taylor*, ira rejoindre le *Clinton* parmi les proscrits. Les pires ennemis des vignes américaines sont souvent ceux qui en plantent.

La *greffe par approche* est encore un procédé de grande culture sur lequel les aveux seraient précieux. Toutes les greffes par approche me paraissent suspectes, si ce n'est mauvaises; et cette qualification de greffe *naturelle* qui leur sert de passe-port convient fort mal à un procédé qui, allant chercher son modèle dans les forêts vierges, vient l'appliquer à deux malheureux plants de vigne destinés à être mutilés par le sécateur, la charrue et le phylloxera. On répondra qu'elle est fort employée par les horticulteurs. Les manuels de greffage donnent en effet un grand nombre de greffes par approche, mais ils ne nous disent pas quelle est la

proportion de reprise obtenue par les greffeurs ni même quelle est la greffe qui leur réussit le mieux; il est bien possible qu'ils pratiquent de préférence à la greffe naturelle la greffe à l'anglaise en tête ou la greffe en arc-boutant, qui sont singulièrement perfectionnées. D'ailleurs ils opèrent autrement que nous : d'après les indications de M. Ch. Baltet, ce greffage paraît se faire en l'air, entre une grosse et une petite branche de deux sujets voisins; ce ne sont pas les mêmes conditions qu'entre deux sarments d'égal diamètre simplement accolés; car la petite branche peut s'incruster solidement dans la grosse; et c'est alors une greffe en fente dans les meilleures conditions. Les horticulteurs préparent les sujets par des pinçages et font ensuite un sevrage méthodique et graduel, plein de circonspection, que nous n'entendons pas du tout pratiquer en grande culture. Il faut encore répéter que nous avons, et non pas eux, à compter avec le phylloxera.

La greffe par approche de deux boutures ou de deux racinés pourrait être bonne si les deux plants concouraient sans inconvénient à la vigueur de la tige; mais cette tige languit et s'étiole aussitôt que le couteau ou le phylloxera suppriment les racines françaises, et l'amputation de la tête américaine semble même compromettre les racines résistantes, soit par l'effet d'une taille trop radicale, soit parce que la communication par la greffe est insuffisante et ne leur fournit pas le système aérien nécessaire à leur existence.

Voici comment s'opère la soudure d'une greffe par approche simple. La section transversale donne de A à B (*fig.* 19, pl. II) une surface (*fig.* 20, pl. II) montrant les bords séchés des coupes et une première couche ligneuse réunissant les deux sarments sous les couches corticales; mais en C (*fig.* 19, pl. II) les deux sarments se séparent, comme en D, par une entaille *qui ne se soude pas* [1] et va en se crevassant; puis chaque sarment reprend son centre

---

[1] Evidemment, parce que la circulation ne s'établit (et la soudure ne se fait) que lorsque la sève peut suivre un cours normal. A la partie supérieure de la greffe, elle descendrait des sarments et il lui faudrait y remonter, car elle rencontre en A (*fig.* 19, pl. II) les couches ligneuses qui interceptent la circulation vers les racines.

médullaire (*fig.* 21, pl. II). Que se passe-t-il de A à B? La sève des racines résistantes et celle des racines françaises se mélangent-elles pour alimenter les deux tiges? J'ai un nombre insuffisant de sujets d'étude, mais je suis disposée à croire qu'il n'y a aucun mélange des deux sèves, car dans des greffes de dix-huit mois ayant conservé leurs deux tiges complètes, j'ai pu suivre très avant dans la tige française, *visiblement phylloxerée*, la décomposition des racines françaises, tandis que le côté américain était sain et vigoureux. La greffe par approche à double languette devrait amener un meilleur résultat; mais j'ai vu périr cette année la partie française, mourante l'année dernière, de quelques-unes de ces greffes faites en 1877. La suppression de la tête américaine et des racines françaises, dès que la soudure s'est opérée, me semble donc utile pour assurer l'union si nécessaire des deux sujets; *si l'opération réussit*, la greffe par approche se réduit à une greffe simple, très peu solide et très inférieure à la greffe en fente (*fig.* 22, pl. II), ou à une greffe double plus solide (*fig.* 23, pl. II), mais gardant toujours les deux moignons crevassés. Mieux vaut la greffe anglaise, en passant, si l'on veut, par la greffe Champin, qui semble parfaitement intermédiaire.

Il ne me semble pas qu'après ces réflexions la greffe par approche puisse compter des partisans ailleurs que dans les forêts vierges.

La *greffe de M. Coullon*, propriétaire à Pujols (Gironde), est exécutée chez lui avec une précision mathématique et expérimentée sérieusement, consciencieusement, sur une grande échelle. C'est une intelligente modification de la greffe par approche; car elle supprime les racines françaises qui en sont le plus grand inconvénient (*fig.* 24, pl. II). L'œil d'appel A a pour but de faciliter la reprise et la soudure en attirant la sève : je crois cette précaution inutile lorsqu'on emploie un raciné, car j'ai toujours réussi

---

L'effet inverse se produit en D et, forcément, les couches corticales qui se rencontrent en C et en D, au point de jonction des deux sarments, se mortifient et se retirent de la circulation. On peut appliquer la même observation à la jointure de la greffe Millardet, et certainement de la greffe Coullon, qui ne se soudent que par les languettes et le talon.

sans œil d'appel. Il pourrait être favorable au racinage, *probablement plus qu'à la soudure*, lorsque le sujet est une bouture; mais je n'admets pas qu'une bouture, dans quelque condition qu'on la mette, suffise à un bon système radiculaire et à une bonne soudure. Le succès de la greffe bouture sur bouture est une exception : je crains les soudures incomplètes et les amputations, surtout près des greffes, et il me paraît indubitable que cette greffe, après un début brillant, doit donner des plants qui s'étiolent.

La *greffe à cheval* dont les deux parties sont de même diamètre et se réunissent sans points saillants, sans talons ressortant ou dépassant, donne une soudure complète, comme la greffe anglaise; mais autant le biseau A (*fig.* 26, pl. II) est facile à faire à la main, autant le biseau intérieur B (*fig.* 25, pl. II) est difficile à tailler nettement et à faire coïncider avec son vis-à-vis. Il ne semble pas qu'une machine à lames fixes puisse obtenir cette coupe, et les instruments à emporte-pièce donnent des bords bien défectueux, *mâchés,* disent très justement les greffeurs, et sont trop délicats pour qui fait des milliers de greffes.

Lors même qu'une machine à greffer vaincrait la difficulté, l'ajustement de la greffe laisse beaucoup à désirer comme solidité; on a même peine à maintenir les deux parties en place pendant qu'on ligature; et, certainement, lorsque le lien pourrit, la reprise est très compromise par ce manque de solidité. — Je fais la même objection et à plus forte raison, à la greffe anglaise sans fente.

La *greffe Camuset,* greffe à cheval double, essayée par M. Raybaud L'Ange, signalée par M. Eug. Raspail, est très solide, et les languettes du greffon toutes intérieures doivent le rendre peu sujet au racinage; mais elle est longue et difficile à faire à la main, impossible jusqu'à présent à la machine; l'entaille des extrémités du porte-greffe est très défectueuse, comme on peut le voir par la figure 28 (pl. II) que j'ai exactement dessinée d'après une greffe qui m'a été envoyée par M. Eug. Raspail. La greffe anglaise est si excellente qu'il ne me semble pas qu'il y ait lieu de recourir aux complications de la greffe Camuset.

VI. — La greffe anglaise à double fente sur raciné et sa plantation.

La greffe anglaise à double fente sur raciné se fait sur plants ou mérithalles d'un an, bien constitués, ayant à trente centimètres de leur base une partie droite et unie de six à sept centimètres de longueur et au moins un centimètre de diamètre. Le greffon doit avoir de vingt à vingt-cinq centimètres de longueur et exactement le même diamètre que le raciné; au moins deux nœuds et, sous le nœud inférieur, un point favorable au greffage, ce qui est plus facile à trouver dans un sarment que dans un raciné (*fig.* 29, pl. III).

La longueur du porte-greffe peut varier, selon les habitudes locales; mais il est inutile de placer les racinés à plus de trente centimètres de profondeur, et il suffirait de les mettre à quinze ou vingt. Autour de moi, on plante à soixante et soixante-dix centimètres en sables graveleux; j'ai arraché beaucoup de vignes dans ces terrains et j'ai toujours trouvé les principales racines à vingt ou vingt-cinq centimètres au plus, s'étalant ou plongeant, suivant le terrain. On plante en palud peu profondément, mais en courbant et couchant le raciné, ce qui serait fort périlleux pour une greffe. Je peux affirmer que j'ai planté des boutures et des racinés greffés, en sable et en palud, droits en terre, toujours à vingt-cinq centimètres de profondeur environ et que j'ai eu d'excellents résultats.

Les mérithalles racinés font d'excellents porte-greffe quand ce sont des bois de l'année précédente couchés au printemps; mais ceux de l'année, couchés à la Saint-Jean, s'altèrent souvent et manquent de consistance.

Porte-greffe et greffon ont exactement la même coupe (*fig.* 31 et 32, pl. III). En voici les proportions : pour un bois d'un centimètre de diamètre, la surface oblique a de quatre à cinq centimètres de longueur (*fig.* 30, pl. III). Un greffeur habile évitera soigneusement que la coupe ne se creuse au milieu, ne soit

concave; il la fera nette des bords et soigneusement arrondie de l'extrémité. La fente commencée à un centimètre de l'extrémité inférieure suivra le sens du bois sous la moelle et s'arrêtera à un demi-centimètre en arrière du haut de la coupe (*fig.* 31 et 32, pl. III). Les deux parties seront délicatement emboîtées l'une dans l'autre (*fig.* 33, pl. III) et leur réunion formera un plant de quarante-cinq à cinquante centimètres de longueur. (*fig.* 33 et 29, pl. III).

Le raphia non préparé pourrit facilement, mais est encore la meilleure, la plus commode et la plus économique des ligatures. L'expérience m'a prouvé l'inutilité de l'argile ou du mastic : il suffit de couvrir les fentes avec le raphia de manière à ce que la terre n'y pénètre pas.

La plantation des racinés greffés peut se faire en place ou en pépinière.

En les mettant tout de suite dans la vigne, on évite un déplacement qui est coûteux et retarde toujours la végétation et la production; on obtient quelques grappes dans l'année qui suit celle de la plantation et l'on entre sérieusement en récolte l'année suivante, *mais* il faut compter sur des vides et des inégalités. — Une terre forte, ou trop humide, ou trop sèche, compromet gravement la reprise. — La ligne des plants doit être travaillée à la main sur une largeur de quatre-vingts centimètres; les plants doivent être l'objet de soins constants : il faut les maintenir buttés et sans herbe dans une terre toujours meuble, pincer les rejets du sujet, détruire, au moment propice, les racines du greffon et soutenir la jeune pousse à mesure qu'elle s'allonge. Ces travaux demandent un personnel spécial et considérable, une surveillance minutieuse; la dépense se chiffre par une somme importante et est matériellement inacceptable pour une grande plantation (1).

En mettant les racinés greffés en pépinière, on peut choisir un terrain favorable à la reprise des greffes et à la vigueur des

(1) Pour le buttage, l'échalassage et tous les soins à donner aux greffes en place, voir la greffe sur souche, page 296.

pousses; les travaux et la surveillance concentrés sur un petit espace sont faciles; une femme habituée au travail du potager peut, en une journée, soigner quelques milliers de plants. Le succès est presque assuré comme reprise, soudure et vigueur. En levant la pépinière, on peut contrôler les soudures, supprimer les racines du greffon et mettre en place, *dans les conditions ordinaires de culture,* des plants égaux et choisis, sans avoir à craindre de manquants. Il y a deux déplacements, mais il y a beaucoup moins de frais et de risques.

Le terrain de la plantation comme celui de la pépinière doivent être défoncés profondément au commencement de l'hiver, soit à la charrue, soit à la pelle, en y mêlant abondamment le fumier. Il est utile de labourer plusieurs fois pendant l'hiver.

En février, on met en place les racinés soudés, qu'il est bon, pendant les froids, de tenir à l'abri, soit en fossé, soit dans du sable à l'intérieur. La terre étant préparée, il suffit, lors de la plantation, de faire un trou assez grand pour étendre les racines à la profondeur voulue. Les ouvriers ont, pour une raison ou pour une autre, une déplorable tendance à planter profondément, et il est inutile de leur faire des démonstrations sur la nécessité de mettre la greffe à fleur de terre pour éviter les racines françaises; l'habitude ou l'entêtement l'emportent toujours. Le plus sûr est de faire tailler les plants très courts avant de les leur donner; comme ils ne peuvent les mettre sous terre, ce qui est d'ailleurs facile à contrôler, on obtient une hauteur suffisante.

La pépinière se fait, suivant les usages du pays, à l'époque ordinaire de la plantation des boutures; il faut, pour étaler les racines et ménager la greffe, mettre les plants non à la pince mais dans de petits fossés larges de vingt centimètres, où ils doivent être soigneusement alignés. Étant non soudés, ils doivent être buttés jusqu'au dernier œil. Si on peut, fin juillet ou commencement d'août, trouver une période de pluie, le greffeur supprimera les racines françaises qui se seraient produites et débuttera. C'est une opération dangereuse, à peu près inutile et bien difficile en pépinière, mais qu'il faut tâcher de faire tôt ou

tard aux plantations en place, car elle permet de s'assurer positivement de la vie du greffon par le porte-greffe et de remplacer à l'hiver les plants qui ont succombé. Si on ne supprimait les racines françaises qu'à l'hiver, on ne s'apercevrait des manquants qu'à la pousse du printemps, trop tard pour les remplacer, et ce serait une année perdue et une plantation irrégulière.

La *greffe Champin* (*fig.* 34, pl. III) est la greffe anglaise modifiée, s'éloignant sensiblement du type de la perfection avec le grand avantage d'être d'une exécution relativement facile. Le greffeur commence par faire la fente au tiers de l'épaisseur du sarment (*fig.* 35, pl. III), ce qui, dans le bois plein, demande peu de délicatesse de main; il fait le biseau du côté le plus épais, jusqu'au bout de la fente, ce qui lui évite l'arrondissement de l'extrémité; les deux parties de la greffe, absolument semblables, sont emboîtées, et, d'un coup de serpette oblique, on enlève les talons des biseaux, de manière qu'ils ne dépassent pas la coupe sur laquelle ils sont appuyés.

La fente en plein bois, l'extrémité du biseau supprimée, c'est une véritable trouvaille pour les greffeurs médiocres; mais ils peuvent encore faire des maladresses et l'ablation des deux extrémités à laquelle ce procédé oblige est loin d'amener un perfectionnement. Rien ne vaut pour la soudure l'extrémité bien arrondie, bien ajustée sur la coupe; c'est précisément dans cette extrémité A (*fig.* 30, pl. III) que s'amasse la sève élaborée et qu'on peut la voir se solidifiant, si l'on détache une greffe après quelques jours de stratification. Les cambiums exactement adaptés sembleront ne faire qu'un sujet et donneront une bonne soudure pleine de vie, tandis que la sève sur laquelle compte M. Champin pour cicatriser ou boucher son entaille ne sera bonne qu'à faire une verrue dans une dépression de la tige. C'est un très petit défaut à la partie supérieure de la greffe; mais, à la partie inférieure, la petite verrue a toutes chances de devenir une grosse racine, accident *très rare* dans les racinés greffés, *lorsque la coupe est bien faite,* parce que la sève bien dirigée établit promptement et complètement la circulation plutôt que de chercher une autre issue.

Quant à la greffe indéfiniment prolongée et à la théorie des lignes droites et des surfaces parallèles pour augmenter les points de contact et alimenter les soudures, elle est discutable; et les praticiens doivent souvent la laisser dans le domaine de la théorie, surtout à la coupe des racinés, car ils font ce qu'ils peuvent, souvent ce qu'ils veulent, et quelquefois cela n'en va pas plus mal.

J'ai une greffeuse dont les coupes « courtes comme un sabot » sont fort dédaignées des greffeurs; comme elles sont nettes et soignées, ont les extrémités irréprochables, je la laisse faire. Il y a deux ans, les hommes greffant sur souche, elle finit seule les greffes anglaises et fit dans la pépinière les deux derniers rangs; il me fut très facile de vérifier, à la pousse et à la levée des plants, que le millier de greffes faites comme un sabot valait autant que les autres, quoique la greffeuse eût eu à employer le rebut des plants.

Je laisse donc faire des greffes courtes et des longues et aussi des coupes Champin, mais la perfection est certainement dans la greffe proportionnée et les extrémités arrondies; il est bon de la maintenir comme type, et, heureusement, greffeurs et machines peuvent en approcher.

J'ai une grande prédilection pour les machines, probablement parce que je n'ai jamais pu me tirer convenablement d'une greffe à la serpette, et j'y vois une foule d'avantages pratiques. On peut *faire* un greffeur à la machine : il s'agit de *trouver* un bon greffeur à la serpette et on ne le trouve facilement ni chez soi, ni ailleurs. J'ajouterai qu'un homme qui greffe bien est immédiatement possédé d'un orgueil qui le rend difficile à manier. Tout ouvrier patient et adroit fait en quelques heures un excellent *machiniste* et partage modestement sa gloire avec la machine.

Le triomphe de la machine est dans le biseau; le greffeur tend toujours à le faire concave; il en résulte des greffes étranglées et adhérant mal, quelque serrées qu'elles soient par la ligature. La machine (1) donne un biseau d'une obliquité parfaite et avec des

---

(1) Je parle de la machine de M. Petit, que je mets volontiers au rang de la barrique et de la greffe anglaise, car elle est solide, simple, exacte, facile à manœuvrer et à entretenir, et remplit avec ces qualités la condition si importante de pouvoir

bois de même diamètre, étant nécessairement posés à la même place sur la tablette; on obtient mathématiquement la même obliquité, la même longueur de coupe et un ajustage parfait, si la fente est bien faite. C'est un résultat qu'on obtient difficilement avec le meilleur greffeur; donnez-lui dix bois du même diamètre, vous aurez des différences de longueur, par conséquent d'obliquité, qu'il n'égalisera qu'en forçant la fente ou champinisant l'extrémité. Restent, pour la machine, la fente et l'arrondissement de l'extrémité qui sont moins mécaniques; mais avec du soin, on les obtient *plus facilement qu'à la serpette.*

Voici comment j'organise un atelier :

Deux hommes avec deux machines, l'un faisant les coupes des racinés, l'autre celles des greffons;

Deux greffeurs assemblant, corrigeant, faisant au besoin recommencer les coupes;

Quatre femmes liant;

Une femme, aidée à certains moments par les attacheuses ou les machinistes, choisit et coupe les racinés et les greffons et met les plants achevés sur de la mousse humide, dans des caisses de cinq cents qui, une fois remplies, sont recouvertes de mousse, mises à l'abri au frais, puis emportées sur une brouette, soit à la plantation, soit à la pépinière.

Les femmes excellent dans les petits soins et les arrangements des plants greffés: elles comprennent vite quel parti on peut tirer d'un bois ou d'un raciné; elles utilisent mieux que les hommes et font pourtant plus de rebut, ce dont je ne me plains pas, car je ne veux que de bons plants frais et sains. Je mets aussi volontiers une femme à assembler les greffes : ses tendances maternelles lui font parfaitement surveiller et reprendre le machiniste, tandis que le greffeur recommence la coupe plutôt que de la lui rendre.

Tous ces détails contribuent à la perfection du travail, à sa

---

faire une campagne et même deux, de 40 ou 50,000 coupes, sans avoir besoin d'être affilée, mise à point par d'autres que les ouvriers de la maison.

promptitude et à l'économie de la main-d'œuvre. J'arrive ainsi, avec deux hommes et sept femmes, à obtenir plus de trois mille greffes par jour avec des plants de premier choix, deux mille cinq cents à deux mille sept cents avec des plants de toutes grosseurs à utiliser en pépinière, et je peux faire mes greffes au moment de la plantation et la plantation en saison, ce qui est une grande condition de succès.

VII. — La greffe sur souche.

Nous avons vu que la soudure de la greffe sur souche est peu satisfaisante; elle est encore des plus capricieuses comme reprise : sans que l'on puisse y trouver d'explication, d'une année à l'autre, d'une pièce à l'autre, les résultats diffèrent et peuvent devenir désastreux, surtout, paraît-il, dans nos régions. — Le greffage en est long et pénible à faire, contrarié par la pluie, le vent, le froid, le soleil. Un greffeur habile fait, *dit-on,* quatre cents greffes par jour, — je ne les ai jamais obtenues, loin de là. — Mais s'il fait quatre cents greffes, lorsqu'il peut trouver une belle journée, les intempéries du printemps ne lui permettent certainement jamais d'en faire quatre mille en six semaines, pendant qu'un greffeur sur table en ferait facilement dix mille à la serpette, sans avoir à s'inquiéter du temps, et un greffeur à la machine quinze ou vingt mille. — Le greffage sur souche oblige à butter, à travailler les approches des rangs à l'outil, à donner enfin à des plants espacés les soins d'une pépinière. Si les manquants sont remplacés par le greffage des rejets, on en a pour plusieurs années à égaliser la plantation et à cultiver à grands frais.

Il faut calculer au minimum trois ans pour que les porte-greffe soient bons à greffer (1), deux ans pour arriver à un rendement

(1) A moins de pratiquer la greffe en fente sur pied d'un ou deux ans, qui est la greffe à cheval renversée, fendant le sujet et taillant en biseau le greffon *de même diamètre* que le sujet; greffe qui peut être facile à faire, assez solide, le greffon étant simplement fendu, mais inférieure, sous tous les rapports, à la greffe anglaise, surtout par la saillie des deux extrémités du porte-greffe.

moyen, ce qui met l'entrée en récolte au moins à la cinquième année. On obtient le même résultat à la quatrième année avec le raciné greffé, mais il y a deux années de pépinière et il n'occupe le terrain que depuis deux ans; il donne une plantation sans vides, parfaitement égale et qui peut se travailler à la charrue. Enfin une vigne arrachée pendant l'hiver de 1877-78, remplacée au printemps de 1878 avec des racinés greffés, soudés en pépinière, peut entrer en rapport en 1880 dans les meilleures conditions de résistance, de vigueur et d'économie, tandis qu'une vigne plantée au printemps de 1878 avec des boutures américaines sera greffée en 1881 et n'entrera en rapport, *sur les greffes réussies,* qu'en 1883, avec des inégalités dans la plantation, des incertitudes sur les conditions de résistance et des frais considérables de greffage et de culture à la main.

Sans employer la greffe sur souche pour la reconstitution d'un vignoble, on peut y recourir pour juger promptement un cépage et ses fruits, multiplier des bois rares ou utiliser des souches dont les produits ne conviennent pas.

Les différentes greffes sur souche donnent à peu près la même soudure, si ce n'est la même proportion de reprise. Lorsque j'ai de très jeunes ceps, je les greffe autant que possible à la greffe anglaise en employant de gros sarments; mais je réussis toujours moins bien en place que sur table, soit parce que le greffeur se fatigue, soit, comme j'ai lieu de le croire, parce que le sujet a trop de sève. J'ai fait les expériences les plus concluantes au sujet de la proportion de reprise des greffes en place ou sur table, et j'ajoute que *toutes* les expériences sur lesquelles je suis affirmative reposent sur des quantités importantes, des milliers plutôt que des centaines.

Si la souche est d'un diamètre sensiblement plus grand que celui du sarment, je fais toujours la greffe anglaise, m'attachant à faire coïncider exactement un des côtés de la coupe et l'extrémité du biseau du greffon avec un des côtés du porte-greffe, et je fais donner au sommet du porte-greffe un coup de serpette semblable à celui de la greffe Champin, prenant des proportions en rapport

avec la différence de grosseur des deux bois (*fig.* 36 et 37, pl. IV). L'extrémité du greffon est toujours arrondie.

Sur les souches de deux à trois centimètres ou davantage, je cherche encore à me rapprocher de la greffe anglaise, et voici comment je fais opérer (*fig.* 38, pl. IV). La souche étant coupée, le greffeur donne un coup de serpette qui incline légèrement cette coupe AB, puis revient à l'opposé faire un biseau allongé, *aussi étroit que possible* CD. Il fait la fente en appuyant fortement sa serpette DEF en arrière de la seconde coupe et il insère dans la languette son sarment taillé comme pour la greffe anglaise, long de vingt-cinq à trente centimètres et *préparé sur place,* en vue de chaque pied à greffer. C'est la *greffe au galop,* signalée pour la première fois par M. Ch. Baltet, *fig.* 60, page 149, dans son édition de 1880. Elle en diffère en ce que la fente part toujours du haut des coupes, pour être faite plus facilement, et que la première coupe est inclinée pour éviter les infiltrations. On peut mettre deux greffons (*fig.* 39, pl. IV), lorsque la souche est très forte, pour cicatriser la fente des deux côtés et pour augmenter les chances de reprise.

Le greffeur fixe lui-même la position du greffon par quelques tours d'une ficelle fine et solide, et une femme vient après lui lier avec de l'osier et recouvrir soigneusement avec du mastic Lhomme Lefort qui est coûteux, mais protège beaucoup mieux que l'argile contre l'humidité.

Cette greffe me donne, depuis deux ans, une proportion de reprise supérieure à celle de la greffe en fente, et l'expérience des greffeurs anglais semble d'accord avec la mienne; elle est solide et sa soudure se fait sur une plus grande étendue que celle de la greffe en fente, mais n'est pas une soudure complète.

J'emploie volontiers de très gros sarments, parce qu'ils sèchent moins vite, présentent plus de points de contact au greffage et couvrent mieux le porte-greffe. Je crois que la base des sarments donne des ceps aussi fertiles que leur extrémité, car la taille en aurait fait des hastes et j'ai des greffages de 1879 faits avec de gros bois et qui sont chargés de grappes. L'important est de

choisir des bois sains et fructifères sur des ceps soigneusement marqués avant les vendanges et suivis, s'il est possible, depuis plusieurs années. La même observation s'applique nécessairement au choix des bois qui servent au greffage des racinés.

J'hésite entre les greffons courts qui offrent moins de surface à l'évaporation et les longs qui donnent plus de sève et permettent de butter plus haut, de maintenir la greffe plus fraîche, mais peuvent produire des racines françaises; j'ai eu de bons résultats des deux manières, et cette année je penche pour la seconde, car je trouve moins de greffons secs.

Je retarde les sarments dans du sable abondamment arrosé, retourné à l'automne et placé dans un lieu frais et fermé; si le sable sèche au printemps, on l'arrose légèrement à la pomme de l'arrosoir. Je conserve aussi bien, mais retarde moins (ce qui peut être nécessaire pour le greffage, suivant l'époque à laquelle on veut le faire ou les espèces que l'on veut réunir) dans des fossés en terre sablo-graveleuse. En terre argileuse, la végétation est retardée, mais la conservation plus difficile : je garnis le fond des fossés avec des sarments secs ou des roseaux recouverts de sable ou de terre légère, afin que l'eau s'écoule dans un fonds perméable et n'altère pas les plants soumis à la stratification.

Au commencement du printemps, après une pluie, la vigne à greffer, comme les rangs à planter avec des racinés non soudés, est chaussée très haut, à la charrue, sur une grande largeur, afin de conserver à la terre son humidité, s'il survient une période de sécheresse. Il faut beaucoup de temps pour déchausser à l'outil autour des souches, et il semble qu'il vaudrait mieux préparer le terrain en déchaussant à la charrue; mais cet inconvénient est bien compensé par l'avantage de trouver une terre fraîche et à portée pour former autour des greffes un mamelon de quatre-vingts centimètres de diamètre environ et de vingt-cinq à trente centimètres de hauteur. La charrue doit passer, pour les façons de l'été, dans l'intervalle des rangs, sans atteindre ce mamelon. On place de petits échalas pour que les rangs soient indiqués au laboureur et pour attacher plus tard les pousses; mais ils doivent

être éloignés des greffes qu'ils secoueraient au moindre vent, au moindre choc. J'ai vu manquer, à très peu d'exceptions près, un rang entier de greffes, sans pouvoir attribuer d'autre cause à l'insuccès, prévu et risqué, que le rapprochement des greffes et des échalas.

Il est très nécessaire de veiller à ce que les greffes soient faites à fleur de terre pour éviter les racines françaises; les greffeurs les plus intelligents s'oublient en cherchant le point le plus favorable à l'opération.

« MM. Mersens et Forckel affirment, dit M. Ch. Baltet, que dans les grandes pépinières d'outre-Manche, un bon greffeur, accompagné de deux aides qui ligaturent et engluent, ayant étêté les sujets la veille, peut, dans une journée de douze heures, faire mille Whip-grafts. » Chez moi, deux greffeurs exercés se donnent la tâche de faire à eux deux, dans une belle journée, trois rangs de cent greffes parmi lesquelles se trouvent toujours quelques greffes doubles. Ils les font tranquillement et parfaitement, mais ne perdent pas leur temps. Ils coupent eux-mêmes la souche, taillent le greffon sur place et font la première ligature. Un homme les précède suffisant à déchausser la vigne. Une femme suffit également à lier et mastiquer, un autre homme à faire les mamelons. Quatre hommes et une femme, pour faire trois cents greffes *au plus,* rendent, on le voit, l'opération fort coûteuse et fort longue par un temps pluvieux.

L'ablation des racines françaises doit se faire, s'il est possible, avant la fin de l'été, surtout si l'on veut remplacer à l'hiver les manquants par des racinés soudés; mais, je le répète, elle est très dangereuse pendant les chaleurs.

Après des pluies violentes, la terre se tasse et le greffon trop découvert peut se sécher ou se casser, s'il n'est pas bien soudé : il faut y remédier promptement.

Les repousses doivent être pincées aussitôt leur apparition et *non arrachées*: on évite ainsi des secousses dangereuses et la sève descendante donne de la vigueur à la greffe.

VIII. — Greffes pour assurer la reprise des Æstivalis.

Ici, nous n'avons plus à craindre l'enracinement du greffon, nous avons, au contraire, à le seconder, et la tâche semble facile; mais précisément l'*Æstivalis* n'y met pas la bonne volonté de nos cépages français.

Il ne faut pas se faire d'illusions sur le bouturage des *Æstivalis :* il est très incertain et des succès plus ou moins grands sont l'exception et non la règle. Il réussit fort mal, au moins dans la Gironde, dans les véritables terrains de pépinière, légers, fertiles et frais, où les *Riparia* atteignent des proportions extraordinaires. Il semble que les sols chauds, argileux, même calcaires, les saisons sèches et chaudes leur soient favorables, si l'on peut arroser abondamment.

La *greffe Fermaud*, qui est la greffe par approche d'une bouture entière sur le côté d'un cep amputé, est la meilleure greffe sur souche pour les plants résistants, car on n'a pas à craindre les racines du greffon, et il a chance de prendre à la fois comme bouture et comme greffe; mais je préfère de beaucoup à la plantation de bouture ou au greffage sur souche des *Æstivalis* le greffage sur raciné, qui peut se faire sur table, dans les conditions les plus sûres et les plus économiques.

Il se pratique de différentes manières; les principales sont :

La greffe anglaise à double fente;

La greffe à cheval;

La greffe Millardet.

La *greffe anglaise sur raciné* réussit dans de grandes proportions. Il est prudent de prendre un raciné résistant, car il se peut que lui seul ait à soutenir le plant. On le met très court : un mérithalle suffit. On met le greffon très long, à l'inverse des plants greffés en français, et l'on a chance d'obtenir quelques racines du greffon qui se développeront et peut-être l'affranchiront.

La *greffe Champin* convient parfaitement au greffage des

Æstivalis et elle est très ingénieusement modifiée par son auteur pour employer les bouts gros et courts (*fig.* 40, pl. III). On ménage un nœud à l'extrémité du greffon pour en faciliter le racinage et on laisse une grande épaisseur de bois du côté de ce nœud.

La *greffe à cheval* devient d'une coupe très facile quand on n'a pas à s'inquiéter des talons du greffon, car elle est simplement fendue; elle est aussi plus solide que lorsque l'intérieur en est taillé en biseau. Il est important que les couches corticales du greffon coïncident au moins d'un côté avec celles du sujet; autrement, on obtiendrait non une vraie soudure mais un accolement qui faciliterait peu l'émission des racines du greffon; le porte-greffe ferait des rejets ou succomberait (*fig.* 41, pl. IV).

La *greffe Millardet* est certainement celle qui donne les meilleurs résultats pour le bouturage des *Æstivalis*. Essayée avec succès par M. Lespiault de Nérac, elle a été décrite par lui dans *la Vigne américaine* de décembre 1879. Il en est à sa troisième année d'expériences sérieuses et concluantes. D'après ses conseils, je l'ai employée en 1879, et, sur quinze cents bois de rebut, j'ai eu douze cents réussites. Cette année, sur plus de dix mille *Æstivalis*, soit en place, soit en pépinière, je dépasse soixante-dix pour cent de *très belles reprises*.

Cette greffe a le grand avantage, en laissant la bouture dans son entier, de lui permettre de développer complètement ses racines propres; après avoir aidé l'*Æstivalis* à attendre leur très lente émission, elle contribue à lui faire faire une pousse vigoureuse et d'une *complète maturité*. Les planteurs savent par expérience qu'en 1879 les racinés et les marcottes n'avaient pas le bois mûr lors de la gelée du 17 octobre, et qu'ils en ont beaucoup souffert. Les greffes Millardet ont *seules* fait exception chez moi, et leurs bois, longs de 60 à 80 centimètres, étaient complètement mûrs. Le résultat de ce greffage m'a semblé tellement satisfaisant à tous égards, que j'ai employé cette année la greffe Millardet sur une grande échelle, non seulement pour les *Æstivalis*, mais pour les boutures résistantes de facile reprise,

auxquelles ce greffage a donné une très grande vigueur. Il est peut-être utile d'ajouter que la greffe Millardet ne conviendrait pas pour les boutures françaises, car elle leur laisserait développer leurs racines non résistantes et nécessiterait leur amputation, comme dans la greffe par approche.

M. Lespiault fixe la longueur du raciné à vingt-cinq centimètres et le greffe à peu près au milieu de la bouture, ce qui donne deux extrémités d'égale longueur. D'après les conseils de M. Delbruck, de Langoiran, j'ai beaucoup raccourci le raciné et je le greffe à un endroit favorable, au milieu ou au tiers de la bouture (*fig.* 42, 43, 44 et 45, pl. IV). M. Delbruck y voyait l'avantage de pouvoir enfoncer l'extrémité de la bouture de l'*Æstivalis* dans une terre tassée qui la soutiendrait pendant la buttage et la ferait mieux raciner, et il pensait que les racines se développeraient mieux à l'extrémité de la bouture, si elles n'étaient pas à la même hauteur que celles du raciné. En tenant compte de l'observation qui me semblait très juste, j'ai trouvé un grand avantage dans le maniement des plants greffés; ce compas ouvert, dont une des branches est racinée, s'accroche et s'écarte dans l'atelier; sur le terrain, lors de la mise en pépinière, les mains maladroites pèsent sur le plant qu'il s'agit d'installer sur ses deux jambes dans le fossé et elles brisent la greffe; lors de la levée de la pépinière, plus fréquents encore sont les accidents. Certainement, le danger est beaucoup moindre avec un raciné court et serré contre la bouture.

Autant la greffe Millardet est délicate au greffage, à la plantation et à la levée de la pépinière, autant elle l'est peu à travailler, parce qu'elle est profonde et bien soutenue par la terre; aussi suis-je fort disposée à la *planter en place* profondément, la soignant comme une plantation ordinaire et préparant des remplaçants en pépinière pour les manquants. On obtient ainsi, à la seconde année, un cep presque fait et, avec le Jacquez, une récolte à la troisième année. Lorsqu'on emploie un raciné résistant, il n'y a pas à s'occuper des racines de l'*Æstivalis*, et c'est alors que l'on peut dire justement que toutes les greffes sont bonnes quand elles poussent.

On peut employer pour le greffage tous les rebuts de racinés, des plants cassés, des morceaux de racines et même de grosses racines divisées dans leur épaisseur. L'important est que la greffe soit bien faite et bien ajustée bord à bord, au moins d'un côté. On pourrait certainement aider au bouturage des *Æstivalis* avec des mérithalles non racinés, mais la moindre racine est bien préférable; j'ajouterai qu'un petit raciné vaut mieux qu'un gros qui semble attirer à lui toute la force et nuire au racinage de l'*Æstivalis*.

Le raciné peut se tailler à la machine, mais la coupe de la bouture se fait forcément à la main. Trois greffeurs, aidés par une machine, font de seize à dix-huit cents greffes par jour, avec deux femmes pour lier. La ligature doit être faite solidement avec une grande longueur de raphia. Je greffe toujours, autant que possible, au moment de la plantation, qui se fait comme celle des racinés greffés.

DE LA TAILLE ET DE L'ESPACEMENT.

Je ne veux pas terminer sans faire un appel à l'intelligence et à l'expérience des viticulteurs, au sujet de l'espacement et de la taille des vignes, car ma conviction est que, par des études consciencieuses, on parviendra non seulement à conjurer le fléau, mais certainement à *en profiter* et à faire un grand pas en avant dans le progrès viticole. Je suis un vigneron novice, par cela même téméraire peut-être. — Je n'hésite pas, lorsqu'une vigne est atteinte, à la faire arracher, car il est douteux que la vigne que j'arrache arrive dans un dernier effort à me donner, une année ou l'autre, quelques grappes souffreteuses, tandis que je suis certaine que celle qui la remplacera entrera en récolte dans un temps donné. — Je n'hésite pas à replanter vigne sur vigne, immédiatement, car un bon défoncement et une forte fumure, des engrais verts, excités par des engrais chimiques, renouvelleront certainement mieux mon sol que trois ou quatre ans de maigres fumures et de cultures variées pour le faire reposer. Une bonne

vendange à bref délai paiera vite les frais. — Je ne crains pas de faire mes plantations avec des racinés, quoique, en beaucoup de localités, on trouve le procédé détestable; mais un grand nombre de viticulteurs n'admettent que ce système, et j'ai vu des vignes splendides de trente et quarante ans obtenues ainsi. — Nous ne pouvons plus coucher, recoucher, provigner, de crainte des racines françaises, et j'y vois un grand bien : si les vignes résistent à tous les supplices, elles sont certainement en beaucoup meilleures conditions quand elles étalent librement leurs racines et trouvent un trajet direct pour leur sève.

Là où j'hésite et fais appel à l'intelligence et à l'observation des propriétaires, c'est sur la question d'espacement et de taille. Profitons du désastre pour sortir de la routine. Quelle est sa part, quelle est celle de l'expérience?

Æstivalis ou plants greffés, achetés ou faits chez soi, coûtent fort cher; et les propriétaires ruinés, hésitants, voudront-ils, pourront-ils replanter beaucoup d'hectares à 6, 8 ou 10,000 ceps, ne reviendraient-ils qu'à vingt-cinq centimes le cep? — Quelques-uns replantent en joualle, mais ils *perdent la qualité*, assure-t-on. Il est bien certain que le vin de joualles est inférieur, mais est-il aussi certain que cela tienne à l'espacement? Les joualles sont ordinairement plantées par des paysans en cépages communs; elles profitent de la fumure des cultures intercalaires et sont vigoureuses et chargées sans discernement, toutes conditions pour faire de mauvais vin; mais de bons cépages, dans un espacement doublé, avec une fumure et une taille raisonnées, sans culture étrangère, donneraient-ils de mauvais vin? L'étiolement des ceps est-il une condition absolue de perfection vinicole?

L'espacement, en tous cas, est sujet à des appréciations bien différentes : je disais à un vigneron de la Côte-d'Or qui avait vingt mille ceps rabougris à l'hectare, si ce n'est davantage, que l'on en mettait environ huit mille dans le Médoc, et il me répondit sans hésitation que l'on devait faire du vin bien commun dans ce pays-là. Où commence le préjugé?

On me dira que les terrains maigres n'amènent les ceps qu'à

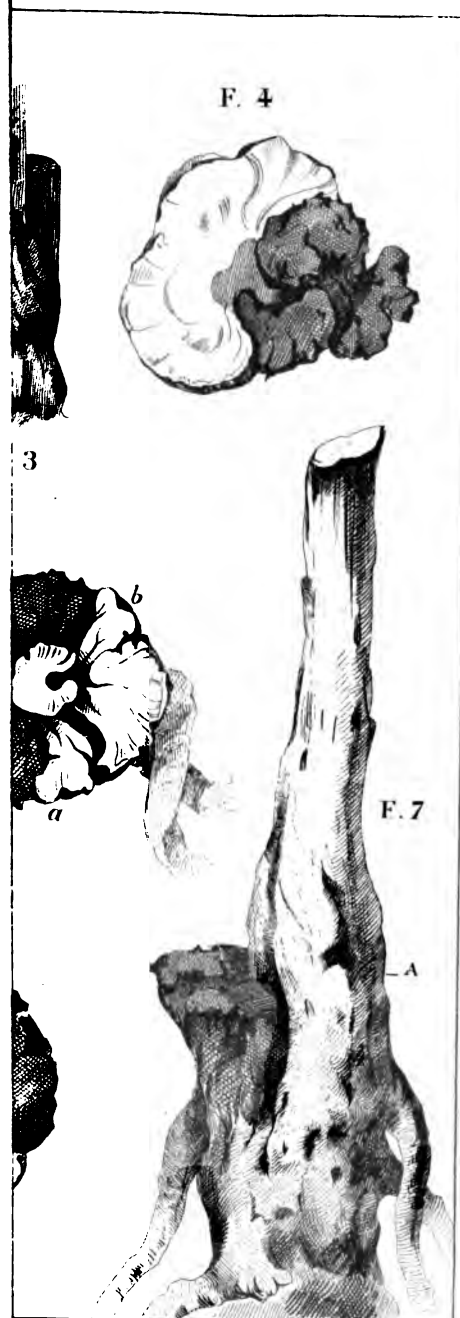
une certaine vigueur, expérimentée dans chaque localité, et qu'on ne peut obtenir de rendement suffisant qu'en rapprochant les pieds de vigne suivant les usages du pays. On voit pourtant de belles treilles et de beaux ceps de bouts de rangs dans tous les pays, et les joualles sont partout plus vigoureuses que les vignes en plein : cela doit bien tenir à l'espacement.

Une vigne de six mille ceps à l'hectare rapporte évidemment plus à trois ou quatre ans qu'une vigne de trois mille ceps, surtout en bois ; mais à six ans elle commencera à perdre de sa fougue et demandera des ménagements, tandis que celle de trois mille ceps ira toujours s'accroissant et supportant une plus forte charge. Je crois que, lorsque la vigne a de la place, elle en profite toujours et nous en fait profiter, qu'elle entre plus vite en *plein rapport* et s'y maintient mieux ; que la gelée, l'anthracnose, la coulure, l'oïdium, l'échaudage épargnent beaucoup plus une vigne aérée qu'une vigne étouffée, que la maturité y est plus grande et plus égale. Ce sont là d'immenses avantages *comme qualité* aussi bien que comme quantité, et les frais de main-d'œuvre, d'échalas, de transport peuvent être diminués de moitié. J'ajoute que *la résistance au phylloxera en sera beaucoup plus assurée*, car il est logique que des ceps se défendent mieux avec un vigoureux système radiculaire qui se développe à l'aise, que dans un chaos de racines et de phylloxeras accumulés, et je vois dans la Gironde, comme je l'ai vu dans le Midi, les ceps espacés, ceux des treilles, les bouts de rangs survivre à tous les autres. Et pourtant on ose à peine aborder cette question ! Grands propriétaires et paysans sont d'accord pour chercher la qualité dans le rapprochement des ceps et n'admettent pas que l'on discute leur espacement et leur taille traditionnels.

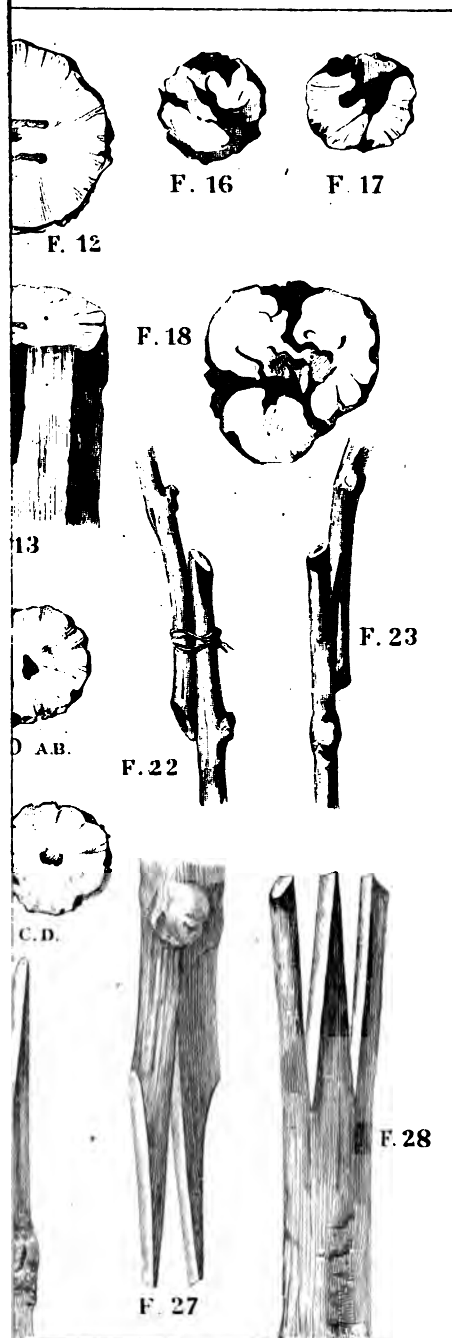
J'aurais à citer beaucoup de faits soigneusement recueillis et condamnant les usages établis, mais je me borne à appeler l'attention des planteurs de vignes américaines sur ces deux points de vue : l'économie de la plantation, la *santé* des vignes, et j'espère que leur intérêt si évident les décidera à étudier sérieusement la question de la qualité dans ses rapports avec l'espacement et la taille.

Le changement d'espacement amènerait forcément le changement de taille, et là encore on se heurte à des usages établis. Il est admis et bien certain qu'une vigne *chargée* donne du vin inférieur. Qu'est-ce qu'une vigne chargée? c'est une vigne taillée au delà de ses forces; mais lorsqu'une vigne suffit à sa charge, a assez de racines et de feuilles pour s'alimenter, d'air et de soleil pour mûrir parfaitement ses fruits, est-ce une vigne *chargée*, donne-t-elle de mauvais vin?

« Tout cep et toute treille qui porte *trop* de fruit, dit le docteur » Jules Guyot, ne donne pas de bons vins, cela est vrai; mais » tout cep et toute treille qui ne portent que la quantité de fruit » proportionnée à leur force et à l'étendue de leur arborescence, » donnent d'aussi bons vins sur des hastes que sur des coursons. »



ouches ligneuses_B. couches corticales
elle.
de la fig.2_ 4, section transversale de
F.6, *Souche greffée de 4 ans.*
transversale en A de la souche fig 7.
ans.



ble fente sur raciné de 18 mois, ½ grandeur aturelle. — F. 14 & 15, *Coupes d'un transversales de Greffes anglaises, bouture Greffe bouture sur bouture de 3 ans et approche simple.* — F. 20 & 21, *Coupes de sevrée.* — F. 23, *Greffe par approche à* — F. 25 & 26, *Greffe à cheval pr français*
.



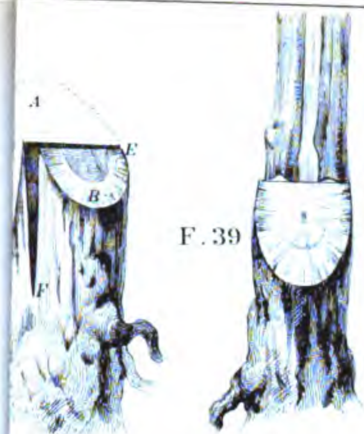
fente sur raciné

Greffe Anglaise.

upe de la Greffe Champin.

valis sur raciné.

valis sur raciné.





souche. — F. 38. *Coupe de*

,44, *Coupes de la Greffe Millardet.*

NOTE

SUR UN

NOUVEAU BAROMÈTRE AMPLIFICATEUR

PAR M. E. DEBRUN

Préparateur de Physique à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Depuis longtemps on s'occupe d'augmenter l'amplitude des mouvements du baromètre; mais jusqu'ici les instruments que l'on a proposés se sont trouvés un peu compliqués, si bien qu'en Angleterre on s'est décidé à construire avec de la glycérine un baromètre de plus de huit mètres de haut. Aussi j'ai pensé qu'un instrument réunissant à l'exactitude du baromètre à mercure la sensibilité du baromètre à glycérine serait capable de rendre quelques services aux météorologistes.

L'appareil se compose d'un baromètre à syphon à double cuvette dont l'une est très large et l'autre du diamètre du tube barométrique. La cuvette très large C est fermée par un bouchon qui donne passage à un tube de trois millimètres de diamètre intérieur; la partie de cette cuvette non occupée par le mercure est remplie d'eau légèrement colorée, il en est de même de la moitié du tube *t*. Un sac en caoutchouc plein de mercure placé dans un étau compresseur sert à rendre le niveau constant comme dans un baromètre de Fortin. Le point d'affleurement a été choisi dans la chambre barométrique, et comme cette place était incommode pour observer, la pointe est remplacée par un fil de platine en communication avec un des pôles d'une pile, tandis que le mercure du baromètre communique avec l'autre

pôle. Dans le circuit est intercalée une sonnerie électrique qui par son tintement avertit que le contact est effectué. Il résulte de cette disposition que c'est sur la branche A B que se reporte tout le mouvement.

Or, nous avons des vases communicants à deux liquides tCAB qui doivent satisfaire à la condition

$$\beta Y \times 13{,}6 = h' ;$$

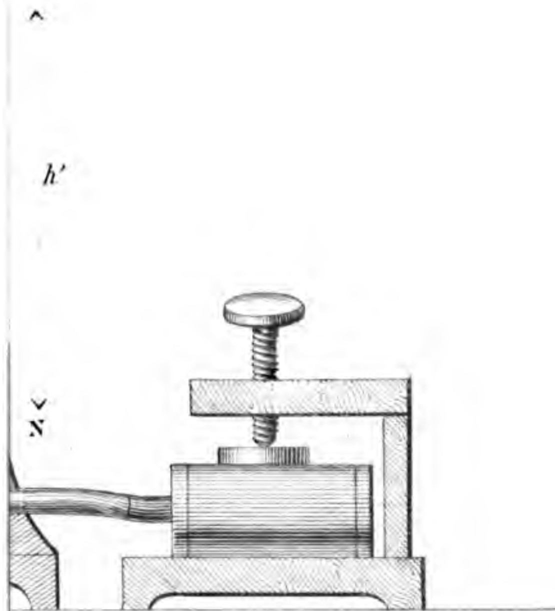
h' est la hauteur de l'eau dans le tube t si le niveau NY dans la large cuvette est constant, les variations de la pression atmosphérique seront représentées par la variation de la longueur BY et par conséquent par des variations 13,6 fois plus grandes que ne seraient celles du mercure. Mais j'ai spécifié que la cuvette avait un très grand diamètre par rapport au tube t, si bien que je puis négliger les variations du niveau NY. La cuvette constitue une sorte de gros thermomètre; on devrait donc tenir compte de la dilatation de l'eau, mais vu le grand diamètre de la cuvette cela est absolument négligeable.

Ce dont il faut tenir compte, c'est du changement de densité de l'eau, correction qui se fait identiquement comme pour un baromètre à mercure, à cela près que le coefficient de dilatation et la densité du mercure sont remplacés par le coefficient de la densité de l'eau.

Pour graduer l'instrument, on place derrière le tube t une division en millimètres, puis on relève avec beaucoup de soin au cathétomètre la hauteur Cβ qui représente la pression barométrique et on inscrit le nombre en regard de la divison δ sur le tube t, il ne reste plus qu'à se rappeler qu'un millimètre de mercure en vaut 13,6 d'eau. A partir de ce moment l'instrument ne doit plus être changé de position. Pour observer, on fait l'affleurement comme avec un Fortin, et il suffit de lire la hauteur de l'eau. L'avantage de cet appareil est qu'il est 13,6 fois plus sensible que le baromètre ordinaire, tout en conservant la même précision, ce qui permet de l'employer à l'observation de certains phénomènes de météorologie présentant des variations très faibles.

M. E. DEBRUN

BAROMÈTRE AMPLIFICATEUR



P Reiller

Cependant on peut ne vouloir faire que des observations de courte durée mais d'une sensibilité excessive.

On prend alors un baromètre dont la cuvette et la chambre sont aussi larges que possible; on bouche la cuvette avec un bouchon en caoutchouc percé de deux trous. Dans l'un passe un tube capillaire qui se recourbe *presque* horizontalement, dans l'autre passe le tube d'une poire à compression : Le tout est plein d'eau colorée. Pour observer, on place derrière le tube horizontal une graduation et à l'aide de la poire on amène la colonne colorée à être au milieu du tube, et on suit les mouvements. Comme la pesanteur n'y entre plus ou du moins pour peu de chose, car il vaut mieux que le tube soit un peu incliné, la sensibilité n'est limitée que par le rapport des diamètres du tube capillaire et de la cuvette. C'est par comparaison avec le baromètre amplificateur exact que l'on gradue ce baromètre à sensibilité extrême. D'ailleurs ce n'est là qu'un baromètre de variation et non un baromètre d'observation absolue, destiné seulement à suivre la marche d'un accident météorologique.

SUR LA

MESURE DU CERCLE D'ARCHIMÈDE

PAR M. PAUL TANNERY

L'opuscule connu sous le nom de Κύκλου μέτρησις d'Archimède, et publié, avec les commentaires d'Eutocius, pages 203-217 de l'édition de Torelli, ne consiste qu'en trois théorèmes que ne précède aucun préambule. Ce n'est certainement pas là un livre complet du géomètre de Syracuse; ces trois théorèmes, en raison de leur importance capitale, ont été extraits, pour l'enseignement classique dans l'antiquité, d'un ouvrage étendu, probablement intitulé : Περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας *(Sur la circonférence du Cercle)*. — (Pappus, éd. Hultsch, V. 312, 18.)

Le premier des trois théorèmes démontre que la surface du cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et l'autre à la circonférence du cercle.

Le second suppose le troisième; il établit que le rapport de la surface du cercle au carré de son diamètre est approximativement $\frac{11}{14}$.

Le troisième, enfin, qui devait logiquement devancer les deux autres, prouve que le rapport de la circonférence au diamètre est compris entre $3\frac{1}{7}$ et $3\frac{10}{71}$.

La démonstration, purement géométrique, ne donne aucun détail sur les procédés de calcul employés dans la détermination

de ces limites. Les commentaires d'Eutocius ne renferment d'ailleurs que des vérifications, et par suite, ne comblent en rien la lacune.

Il y a là, pour l'histoire des mathématiques, un point qui a déjà donné lieu à de nombreuses controverses. J'espère, dans l'étude qui va suivre, apporter quelques éléments nouveaux à la discussion.

I

La méthode d'Archimède, pour le calcul du rapport de la circonférence au diamètre, repose en fait sur la proposition suivante.

Si l'on a une suite double de nombres :

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, \ldots,$$
$$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n, \ldots,$$

engendrés par les règles suivantes :

$$a_n = a_{n-1} + b_{n-1}, \qquad b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2},$$

si d'ailleurs :

$$\frac{a_0}{c} = \sqrt{3},$$

et, par conséquent,

$$b_0 = 2c,$$

on aura

$$\frac{2^n c}{a_n} > \frac{\pi}{6} > \frac{2^n c}{b_n}.$$

Pour appliquer cette proposition à la détermination numérique des limites comprenant π, la rigueur exige que a_n soit calculé par défaut et b_n par excès; Archimède fait donc deux séries de calculs.

Dans la première, il part d'une valeur de $\sqrt{3}$ approchée par défaut et calcule successivement *par défaut* les termes de la suite

double (a, b); dans la seconde, il part au contraire d'une valeur de $\sqrt{3}$ approchée par excès, et calcule successivement *par excès* les termes (a, b).

SÉRIE PAR DÉFAUT.

n	a	b	c
0	265	306	
1	571	$591\frac{1}{8}$	
2	$1162\frac{1}{8}$	$1172\frac{1}{8}$	153
3	$2334\frac{1}{4}$	$2339\frac{1}{4}$	
4	$4673\frac{1}{2}$	»	

SÉRIE PAR EXCÈS.

a	b	c
1351	1560	
2911	$3013\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	780
$5924\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$	»	
1823	$1838\frac{9}{11}$	240
$3661\frac{9}{11}$	»	
1007	$1009\frac{1}{6}$	66
$2016\frac{1}{6}$	$2017\frac{1}{4}$	

Les valeurs doubles de a_1 et a_2 dans la série par excès correspondent à une simplification apportée, en multipliant successivement c par les rapports $\frac{4}{13}$ et $\frac{11}{40}$.

Comme pour les deux séries :

$$n = 4, \qquad 2^n \times 6 = 96,$$

on conclura

$$\frac{96 \times 153}{4673\frac{1}{2}} > \pi > \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}};$$

d'où identiquement :

$$3\frac{1}{7 - \cfrac{1}{111\frac{1}{2}}} > \pi > 3\frac{1}{7 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{3 - \frac{1}{37}}}}.$$

et *a fortiori :*

$$3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{1}{7+\frac{1}{10}}.$$

Si j'emploie l'algorithme des fractions continues, c'est qu'Archimède s'est écarté, pour exprimer la limite inférieure de π, de la règle de l'école, à savoir l'emploi exclusif de fractions ayant pour numérateur l'unité. Il a donc employé un procédé spécial; or la forme de la fraction $\frac{10}{71}$ à laquelle il a ramené le rapport $\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$, et où le dénominateur, rapporté au numérateur, a 1 pour résidu, indique que ce procédé spécial devait revenir à celui du calcul des fractions continues (au moins bornées à quelques termes).

Pour examiner l'ensemble des calculs précédents, nous laisserons de côté, pour le moment, le choix des valeurs de $\sqrt{3}$ qui servent de point de départ :

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

cette question devant être traitée spécialement plus loin.

Au premier abord, les calculs des termes b paraissent exorbitants; mais on s'aperçoit bientôt que pour avoir

$$b_n = \sqrt{a_n^2 + c^2},$$

l'élévation de a_n au carré est inutile; car on peut considérer ce nombre comme une partie déjà extraite de la racine b_n; il suffit donc de poursuivre l'extraction sur le terme constant c^2 considéré comme reste.

Comme, dans la numération grecque, les chiffres (lettres) n'ont pas de valeur de position, ce procédé pouvait être suivi sans difficulté dès l'origine; de fait, le texte d'Archimède ne suppose que le calcul de a_1^2 dans la série par défaut.

Si toutefois a_n se présente, suivant les habitudes ordinaires du calcul grec, sous la forme d'un entier suivi d'une fraction ayant

pour numérateur l'unité, soit $a_n = p + \frac{1}{q}$, il sera plus simple de ne prendre que p pour représenter la partie déjà extraite de la racine b_n; alors on continuera l'extraction en ajoutant à c^2, $\frac{2p}{q} + \frac{1}{q^2}$, qui se forment très rapidement. D'ailleurs $\frac{1}{q^2}$ peut être négligé sans inconvénient.

Quant au procédé d'extraction de la racine en lui-même, il est hors de doute que, pour Archimède, il devait en essence être le même que le nôtre; diviser le reste par le double de la racine obtenue, ce qui donne par excès le complément de la racine; choisir un complément par défaut et retrancher du reste primitif le produit de ce complément par défaut et de la somme obtenue en l'ajoutant au double de la racine déjà formée.

Mais lorsque, la partie entière de la racine étant déterminée, le reste se trouve inférieur au double, le procédé subissait une modification que nous avons déjà étudiée en parlant de l'*Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (1).

Comme les erreurs commises sur chaque racine s'ajoutent tout au plus dans le résultat final, Archimède pouvait se contenter d'une approximation au premier degré, au moins quand la fraction complémentaire était inférieure à $\frac{1}{2}$. La règle de l'école était dans ce cas, ainsi que nous l'avons déjà reconnu, de prendre pour numérateur de cette fraction l'unité et d'en former le dénominateur en divisant par le reste le double de la racine déjà formée. Si la racine doit être obtenue par défaut, on force la partie entière de ce quotient; si la racine doit au contraire être obtenue par excès, on prend simplement pour dénominateur cette partie entière.

J'ai représenté ci-dessous l'application de ces règles aux extractions de racines qu'Archimède a dû calculer; pour cette application, j'ai d'ailleurs adopté un schème analogue à celui de notre pratique vulgaire, tout en séparant par le signe + les parties de racines considérées comme obtenues successivement.

---

(1) Tome IV des *Mémoires de la Société*, p. 161 et suivantes.

SÉRIE PAR DÉFAUT.

$c^2 = 23409$	$571 + 20 + \frac{1}{7}$
23240	$1142 + 20$
169	1182

$c^2 = 23409$

$\frac{2p}{q} + \frac{1}{q^2} = 1167\frac{1}{4}$

$24576\frac{1}{4}$	$2334 + 5 + \frac{1}{4}$
23365	$4668 + 5$
$1211\frac{1}{4}$	4678

$c^2 = 23409$

$\frac{2p}{q} + \frac{1}{q^2} = 290\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{64}$

$23699\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{64}$	$1162 + 10 + \frac{1}{7}$
23340	$2324 + 10$
$359\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{64}$	2344

SÉRIE PAR EXCÈS.

$c^2 = 608400$	$2911 + 100 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$
592200	$5822 + 100$
16200	$6022 + 2$
12048	
4152	$6026 + \frac{1}{2}$
$3013\ \frac{1}{4}$	
$1138\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	

$\overline{240}^2 = 57600$	$1823 + 10 + 5 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
36560	$3646 + 10$
21040	$3666 + 5$
18355	
2685	$3676 + \frac{1}{2}$
$1838\ \frac{1}{4}$	
$846\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4}$	3677

$\overline{66}^2 = 4356$	$1007 + 2 + \frac{1}{6}$
4032	$2014 + 2$
324	2018

$\overline{66}^2 = 4356$

$\frac{2p}{q} + \frac{1}{q^2} = 672\ \frac{1}{36}$

$5028\ \frac{1}{36}$	$2016 + 1 + \frac{1}{4}$
4033	$4032 + 1$
$995\ \frac{1}{36}$	4034

En somme, il est facile de voir que le procédé de calcul que nous supposons est simple, suffisamment pratique; qu'il se prête d'ailleurs à la recherche d'une approximation plus grande. Apollonius de Perge et Philon de Gadare qui, au dire d'Eutocius, ont déterminé des limites plus rapprochées, n'ont donc pas eu besoin de méthodes essentiellement différentes de celle d'Archimède; elle permet notamment, en partant de valeurs plus approchées de $\sqrt{3}$, et en poussant les calculs un peu plus loin, de trouver l'approximation $\pi = 3{,}1416$ qu'on a rencontrée dans l'Inde [1].

II

Si l'on compare les racines trouvées par les calculs ci-dessus, avec les valeurs que donne Archimède, on constate quelques différences dans les fractions complémentaires.

Dans la série par défaut, pour b_1 et pour b_1, $\frac{1}{8}$ est pris au lieu de $\frac{1}{7}$. C'est évidemment pour faciliter les calculs ultérieurs.

De même, dans la série par excès, pour b_1, $\frac{1}{4}$ est pris au lieu de $\frac{1}{5}$. Ce choix est particulièrement fait en vue d'une simplification qui mérite d'appeler notre attention. Au risque des calculs supplémentaires auxquels il sera ainsi conduit, Archimède change son unité c; c'est qu'il y a grand avantage à opérer sur des nombres de peu de chiffres, et qu'en particulier, les Grecs avaient intérêt à ne pas dépasser 10,000, pour la clarté de leurs calculs. Archimède s'est donc proposé d'éliminer le facteur 13 de 780; or, comme le résidu, par rapport à 13, de la partie entière de a_1, soit 5924, se trouve de 9, il était tout indiqué de prendre la fraction complémentaire égale à $\frac{3}{4}$.

---

(1) *Leçons de calcul d'Aryabhata*, par M. Léon Rodet; Paris, 1879, p. 22-23.

Dans le calcul de b_1, nous rencontrons de même $\frac{9}{11}$ au lieu de $\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ $\left(\text{la différence est de plus de } \frac{1}{15}\right)$: ici, c'est pour supprimer le facteur 40. La partie entière de a_1 étant 3661, le choix de $\frac{9}{11}$ est immédiatement indiqué pour la suppression du facteur 10; mais, isolée, elle n'offrirait aucun avantage, puisque Archimède chasse le dénominateur 11. L'artifice est donc plus singulier, mais, en fait, il n'offre rien d'extraordinaire; car on doit supposer que le géomètre de Syracuse, après avoir obtenu les limites dont il s'est contenté, a remanié tous ses calculs, de façon à leur donner plus d'élégance.

En résumé, nous ne voyons, dans ces diverses dérogations aux règles que nous avons supposées, rien qui nous paraisse infirmer nos précédentes conclusions sur les procédés des Grecs pour l'extraction de la racine carrée.

Nous laisserons donc ce point, pour nous attacher à la méthode même du calcul de π. Si nous en avons fait ressortir la valeur pratique, nous devons en signaler les inconvénients.

L'emploi d'une double série est notamment un vice; si elle permet de calculer rapidement et avec une approximation convenable deux limites entre lesquelles π se trouve compris, il arrive bientôt qu'à la suite des erreurs commises sur chaque terme, ces limites cessent de converger et la prolongation des calculs est dès lors sans intérêt.

On a évidemment :

$$2^{n+1}c > a_n > 2^n a_0 = 2^n c\sqrt{3},$$
$$2^{n+1}c = 2^n b_0 > b_n > 2^n c\sqrt{3},$$

et d'ailleurs

$$b_n - a_n < \frac{1}{2}\frac{c^2}{a_n} < \frac{c}{2^{n+1}\sqrt{3}}.$$

Soient

$$L = 6\frac{2^n c}{a_n}, \qquad l = 6\frac{2^n c}{b_n}.$$

les limites supérieures et inférieures de π, supposées exactement calculées,

$$L - l = L\frac{b_n - a_n}{b_n} < \frac{L}{3}\frac{1}{2^{2n+1}}.$$

Mais, soit α l'erreur commise sur a_n dans la série par défaut, l'erreur commise sur L, c'est-à-dire $\frac{L\alpha}{a_n - \alpha}$ sera évidemment inférieure à l'erreur ε commise sur π, en prenant pour le représenter la valeur approchée de L.

Il est clair par là qu'il n'y a plus d'avantage à prolonger les calculs dès que

$$\varepsilon > \frac{L\alpha}{a_n - \alpha} > \frac{L}{3}\frac{1}{2^{2n+1}} > L - l.$$

Or ceci aura lieu au moins dès que

$$\alpha > \frac{c}{3.2^n}.$$

On ferait un semblable raisonnement pour les calculs de la série par excès.

Il s'ensuit de là que le nombre n d'extractions de racines à faire utilement est limité par c, c'est-à-dire par le degré d'approximation de la valeur de $\sqrt{3}$ qui sert de point de départ. Comme en pratique, α a des limites inférieures qui sont loin d'être négligeables, ce nombre n est rapidement atteint, à moins d'augmenter outre mesure la valeur de c, ce qui complique beaucoup les calculs.

Ces remarques étant faites, nous pouvons aborder la question du choix fait par Archimède des valeurs approchées de $\sqrt{3}$, $\frac{265}{153}$ et $\frac{1351}{780}$ qui lui ont servi de point de départ.

Est-il possible de les regarder comme obtenues par l'extraction

de la racine carrée, suivant le procédé de l'école. Appliquons ce procédé :

	3	$1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{15} - \frac{1}{780} = \frac{1351}{780}$
	1	
1er reste	2	$2\frac{2}{3} = \frac{8}{3}$
	16/9	
2e reste	2/9	$\frac{10}{3} + \frac{1}{15} = \left(\frac{153}{45}\right)$
3e reste	— $1/15^2$	$\frac{10}{3} + \frac{2}{15} = \frac{52}{15}$
4e reste	— $1/780^2$	

Nous trouvons effectivement la valeur approchée par excès. Nous avons déterminé la première fraction complémentaire $\frac{2}{3}$ en prenant, suivant la règle, la plus grande fraction simple (pour les anciens) contenue dans le quotient du premier reste par le double de la racine obtenue; elle correspond pour $\sqrt{3}$ à la valeur par défaut $\frac{5}{3}$ qui se trouve dans les écrits héroniens.

Nous avons déterminé la seconde fraction complémentaire en divisant le 2e reste par le double de la racine obtenue. Il se trouve que ce quotient est exactement une fraction ayant pour numérateur l'unité. Par suite, sans plus de calcul, le 3e reste sera égal au carré de cette fraction complémentaire pris négativement.

Nous avons ainsi une valeur par excès de $\sqrt{3}$ qui se retrouve également dans les écrits héroniens, $\frac{26}{15}$, et qui jouit de cette propriété que les deux termes sont des solutions en nombres entiers de l'équation

$$(1) \qquad p^2 - 3q^2 = 1,$$

car

$$\left(\frac{26}{15}\right)^2 - 3 = \left(\frac{1}{15}\right)^2.$$

A partir de là, la règle nous conduit à diviser le nouveau

reste, $-\frac{1}{q^2}$, par le double de la racine déjà obtenue, c'est-à-dire par $\frac{2p}{q}$; la nouvelle fraction complémentaire sera donc $-\frac{1}{2pq}$; et le nouveau reste $-\frac{1}{4p^2q^2}$.

Ainsi l'application de la règle nous conduit immédiatement, dès qu'elle nous a fait trouver une solution (p, q) de l'équation (1), à en trouver une infinité d'autres (p_1, q_1) par les relations :

$$(a) \qquad \begin{cases} p_1 = 2p^2 - 1, \\ q_1 = 2pq, \end{cases}$$

indépendantes du nombre dont on extrait la racine.

Nous n'avons pas dès lors à nous proposer de rechercher par l'application rigoureuse de cette règle une valeur par défaut qu'elle ne peut donner. Mais alors que le calcul donnait pour commencer une telle valeur, avec un reste dont le numérateur est 2, et le dénominateur carré, c'est-à-dire une valeur $\frac{p}{q}$ dont les deux termes sont des solutions en nombres entiers de l'équation,

$$3q^2 - p^2 = 2.$$

Archimède ne pouvait-il pas être tenté de chercher un artifice simple pour arriver à une valeur analogue plus approchée?

Cet artifice a pu se présenter de lui-même. Après avoir formé le troisième reste, la racine étant par excès $\frac{26}{15}$, pour en trouver une plus approchée par défaut, il convenait de forcer la fraction complémentaire négative; quoi de plus simple pour cela, au lieu de prendre pour diviseur le double de la racine obtenue, de se borner à ce double diminué de la fraction complémentaire précédente, valeur formée précédemment,

$$\frac{10}{3} + \frac{1}{15} = \frac{51}{15}?$$

On trouve ainsi la nouvelle fraction $-\frac{1}{51 \times 15}$, et la nouvelle

valeur approchée $\frac{26}{15} - \frac{1}{51 \times 15} = \frac{265}{153}$ est par défaut, le nouveau reste étant d'ailleurs $\frac{2}{(153)^2}$.

La règle est générale : toute solution (p, q) de l'équation

$$(2) \qquad p^2 - Aq^2 = -2$$

conduit immédiatement à une solution (r, s) de l'équation

$$r^2 - As^2 = 1$$

par les relations

$$(b) \qquad \begin{cases} r = p^2 + 1, \\ s = pq. \end{cases}$$

et médiatement à une autre solution (p_1, q_1) de l'équation (2) par les relations

$$(c) \qquad \begin{cases} p_1 = p(2p^2 + 3), \\ q_1 = q(2p^2 + 1). \end{cases}$$

On voit qu'ainsi il est nécessaire d'admettre que, plus ou moins consciemment, Archimède possédait de fait des solutions incomplètes des équations

$$p^2 - Aq^2 = 1,$$
$$p^2 - Aq^2 = -2,$$

consistant à poursuivre, suivant le procédé de l'école, l'extraction de la racine de A, jusqu'à l'obtention d'une première solution, moment à partir duquel il lui était loisible d'en obtenir indéfiniment, mais sans construire d'ailleurs toutes les solutions possibles.

Il est inutile de remarquer que, s'il était arrivé à dégager les relations (*a*), (*b*), (*c*), rien ne lui était plus facile que de les démontrer synthétiquement.

Mais nous sommes conduits à nous poser une autre question. Archimède n'avait-il pas été plus loin? ne pouvait-il connaître notamment la solution complète pour $A = 3$?

Cette hypothèse n'est pas nouvelle, et la principale objection

qu'on y fasse consiste à demander pourquoi alors il aurait choisi dans la série complète :

SOLUTIONS DE $p^2 - 3q^2 = 1$.

p : 2.7.26.97.362.1351.5042.18817.
q : 1.4.15.56.209. 780.2911.10864.

SOLUTIONS DE $p^2 - 3q^2 = -2$.

p : 1.5.19.71.265.989.3691.13775....
q : 1.3.11.41.153.571.2131. 7952....

précisément tel et tel terme. (Voir Heiberg, *Quæstiones Archimedeæ*, p. 63-65.)

Mais cette question trouve une réponse qui est, au contraire, une excellente confirmation de l'hypothèse. La valeur choisie par Archimède se trouve dans chaque série, la plus simple permettant de calculer pour $n = 4$, les limites qu'il a trouvées et dont la différence $\frac{1}{500}$ environ devait avoir été prise *a priori* par lui comme maximum de l'erreur sur π. Or comme pour l'élégance de la démonstration géométrique, portant sur le polygone de 96 côtés, il était indispensable que l'ordre du dernier terme calculé fût le même dans la série par défaut et dans la série par excès, une telle coïncidence ne semble guère devoir être attribuée au hasard, comme cela résulterait de l'admission, sans plus, des déductions exposées plus haut comme possibles pour les valeurs $\frac{265}{153}$ et $\frac{1351}{780}$. On doit être au contraire porté à croire qu'Archimède aura essayé sa méthode sur les diverses valeurs fournies par les solutions ci-dessus, en commençant par de plus simples, et que son choix définitif aura été le résultat de ce tâtonnement.

Mais si nous essayons d'aller plus loin et de spéculer sur les connaissances à attribuer à Archimède sur ce sujet, nous entrons évidemment dans le domaine de l'hypothèse, car nous ne pouvons considérer comme acquis historiquement qu'un point, celui de la position, dès cette époque, dans toute sa généralité, du problème

auquel est resté attaché le nom moderne de Pell. (Voir le ***post-scriptum*** de notre étude sur l'*Arithmétique des Grecs dans Pappus*.) (1)

Tout en définissant ainsi le caractère conjectural des études que nous allons poursuivre, nous ne pouvons cependant nous empêcher de remarquer qu'à notre sens du moins, dans les essais de ce genre qui ont été tentés jusqu'à présent, on a trop négligé de partir des données positives sur les connaissances arithmétiques des anciens, et l'on a privé par là les résultats de ces essais du meilleur élément de probabilité. Nous laisserons au lecteur à juger si nos efforts auront été plus heureux.

Mais il ne se méprendra pas sur notre but. Il faut distinguer dans la solution du problème de Pell, d'une part la théorie spéciale indispensable pour cette solution complète; de l'autre, la pratique des calculs. Aucun des anciens n'a certainement possédé la première; une telle découverte eût été célèbre et elle ne se serait pas perdue sans laisser aucune trace. Il sera donc naturel que nous nous abstenions de toute démonstration sur les points délicats que nous rencontrerons; il suffira que nous n'énoncions aucune proposition théorique qui ne soit connue des modernes. Nous voulons exposer une voie probable d'invention de méthodes de calculs; nous réclamons donc le droit de nous appuyer sur des inductions, des analogies, des faits de calcul, tous arguments à bannir et à bon droit de l'exposition des méthodes, destinée à l'enseignement. D'ailleurs nous suivrons jusqu'au bout l'ordre des idées où nous allons entrer, en nous attachant à toutes les conséquences qui nous paraîtront naturelles; mais, puisque nous serons en pleines conjectures, sans nous inquiéter sans plus de discuter si les Grecs ont réellement franchi tel ou tel degré. Ce qui ne sera pas valable pour Archimède, peut l'être pour les Hindous, peut l'être pour Fermat ou pour quelque autre inventeur.

D'un autre côté, nous serons naturellement obligés de recourir,

---

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tome III (2e série), p. 351.

dans notre exposition, aux signes algébriques modernes; il est à peine utile de remarquer que, si nous supposons la même voie suivie par les Grecs, ils auront, la plupart du temps, opéré sur des nombres donnés, sauf à recourir, pour quelques lemmes indispensables, à des calculs où les nombres étaient représentés par des longueurs, ou bien sauf à employer, comme Diophante, quelques procédés particuliers pour la représentation de telle inconnue ou de telle indéterminée. Nous nous sommes astreints en fait à ne tirer aucune déduction qui leur fût impossible ou même réellement difficile par ces moyens. Mais nous n'aurions pu nous borner nous-mêmes à leur emploi sans allonger outre mesure notre exposition et sans la rendre beaucoup moins saisissable pour la grande majorité de nos lecteurs.

III

Revenons à l'extraction de la racine carrée par le procédé grec, et cherchons à l'analyser plus profondément.

Soit $\frac{p}{q}$ une valeur approchée de $\sqrt{a}$, telle que l'on ait :

$$aq^2 + r = p^2.$$

J'adopte le signe $+$ pour r, parce que le procédé conduit naturellement, comme nous l'avons vu pour $\sqrt{3}$, à des racines par excès. Mais cette particularité n'a pas d'influence notable sur le caractère de nos déductions.

La règle de l'école conduit, pour continuer l'extraction, à retrancher une fraction complémentaire ayant pour numérateur l'unité.

Pour faciliter les calculs, il est tout indiqué de faire entrer q comme facteur au dénominateur de cette fraction complémentaire, de la prendre par suite de la forme $\frac{1}{qq_1}$; la nouvelle valeur approchée de $\sqrt{a}$ sera dès lors

$$\frac{pq_1 - 1}{qq_1},$$

et le nouveau reste

$$-\frac{1}{q^2 q_1^2}[(rq_1-2p)q_1+1].$$

Mais, toujours dans un but de simplification, et pour obtenir immédiatement les valeurs approchées de $\sqrt{a}$ sous formes de fractions irréductibles, on est également amené à choisir q_1 de façon à éliminer le facteur q dans la nouvelle valeur, en sorte que l'on ait

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{pq_1-1}{qq_1}$$

ou

(3) $$pq_1-p_1q=1.$$

Mais comment faire ce choix de q_1? Sa valeur approchée est $\frac{2p}{r}$, d'après la règle de l'école; d'autre part, d'après cette condition (3), son produit par p doit, après retranchement de l'unité, être divisible par q. D'ailleurs, on peut supposer p, q, r premiers entre eux.

Si l'on remarque que :

$$p\frac{p}{r}-1=\frac{p^2-r}{r}=\frac{aq^2}{r},$$

a son numérateur divisible par q, on en conclura immédiatement qu'en supposant q_1 entier sous la forme $\frac{p+t}{r}$, la condition (3) exige, pour être satisfaite, que t soit divisible par q.

Nous pouvons donc poser :

$$q_1=\frac{p+qs}{r},$$

d'où l'on tirera

$$p_1=\frac{pq_1-1}{q}=\frac{ps+aq}{r},$$

et il suffit évidemment de choisir s, de façon que q_1 soit entier,

et en même temps le prendre le plus voisin possible de $\sqrt{a}$, puisque si l'on avait exactement

$$\sqrt{a} = \frac{p}{q} - \frac{1}{qq_1},$$

c'est-à-dire si la fraction complémentaire faisait arriver à la véritable valeur de la racine, l'on aurait :

$$q_1 = \frac{1}{p - q\sqrt{a}} = \frac{p + q\sqrt{a}}{p^2 - aq^2} = \frac{p + q\sqrt{a}}{r}.$$

Arrêtons-nous un moment ici; nous sommes arrivés à des principes absolument identiques à ceux de la méthode des Hindous pour la solution de l'équation de Pell, tels qu'ils sont exposés par Hankel dans son ouvrage *Zur Geschichte der Mathematik*, p. 200-202. Mais que l'on compare la marche que je viens de suivre avec le procédé d'invention que propose le savant historien, et que l'on juge de quel côté est la simplicité et l'ordre naturel!

Je crois m'être acquitté de la promesse que j'ai faite au sujet de cette méthode hindoue dans mon étude sur l'*Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie*, et je ne pourrais que répéter au reste ce que j'ai dit alors sur l'origine qu'elle peut avoir. Son existence ancienne dans l'Inde prouve au moins qu'on a pu, en Grèce, arriver facilement à la constituer; je viens de montrer quel lien la rattache d'ailleurs à un procédé de calcul appartenant historiquement à la Grèce.

Il s'agit maintenant de la compléter.

La détermination de s exige de fait la solution d'une équation indéterminée du premier degré. Mais que cette solution fût connue ou que les premiers calculs étant faits par tâtonnements, — ce qui ne présente pas de difficultés pour les valeurs de a peu élevées, —on ait remarqué empiriquement comment les nombres p, q, r, s s'engendrent les uns les autres, rien n'était plus facile que de trouver les lois linéaires de leur construction.

Soit z une indéterminée, la condition (3) sera satisfaite en posant

$$p_1 = pz - p_0.$$
$$q_1 = qz - q_0,$$

d'où l'on tire

$$s = rz + aqq_0 - pp_0,$$

et comme d'ailleurs

$$s = pp_1 - aqq_1,$$

on conclut

$$s = rz - s_0.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} r_1 &= p_1^2 - aq_1^2 = (p^2 - aq^2)z^2 - 2(pp_0 - aqq_0)z + p_0^2 - aq_0^2 \\ &= rz^2 - 2s_0 z + r_0 = (s - s_0)z + r_0. \end{aligned}$$

Soit P la partie entière de la racine, on peut commencer immédiatement la déduction sériaire, en prenant

$$p_0 = 1, \quad q_0 = 0, \quad r_0 = 1, \quad s_0 = \mathrm{P},$$
$$p = \mathrm{P}, \quad q = 1, \quad r = -\mathrm{R},$$

si

$$\mathrm{R} = a - \mathrm{P}^2.$$

On peut s'astreindre facilement à avoir pour r des valeurs constamment positives; mais pour abréger les calculs, il convient de choisir toujours z, de façon que s soit le plus voisin possible de $\sqrt{a}$, soit en plus, soit en moins. Si r est négatif, z le sera, s étant toujours positif. L'emploi des formules reste facile, et il est tel chez les Hindous.

Il est au reste aisé de voir que

$$s^2 - rr_1 = s_0^2 - rr_0 = a,$$

ce qui montre que pour que les valeurs de r soient positives, il faudrait prendre constamment $s > \sqrt{a}$.

On remarquera que les z des formules ci-dessus représentent

en valeur absolue les éléments d'une fraction continue développant la partie non entière de la racine. Mais, malgré la remarque faite au commencement de cet essai, nous ne sommes nullement portés, pour l'extraction de la racine carrée chez les Grecs, à supposer rien de semblable à cet algorithme spécial, puisque au lieu de la forme

$$\sqrt{a} = \mathrm{P} - \cfrac{1}{z - \cfrac{1}{z_1 - \cfrac{1}{z_2 - \cfrac{1}{z_3 - \text{etc.},}}}}$$

nous employons, pour représenter le mode d'extraction pouvant les conduire au même but, la forme

$$\sqrt{a} = \mathrm{P} - \frac{1}{z} - \frac{1}{z(zz_1 - 1)} - \ldots - \frac{1}{q_0} - \frac{1}{q_0 q} - \frac{1}{q(qz_n - q_0)} - \text{etc.}$$

En tout cas, pourvu que l'on procède régulièrement, en prenant s toujours supérieur à $\sqrt{a}$ (r, r_1 toujours de même signe), s toujours inférieur à $\sqrt{a}$ (r et r_1 toujours de signe contraire, fractions continues régulières) ou encore le plus voisin possible de $\sqrt{a}$, les valeurs de z et de s seront chaque fois rigoureusement déterminées. Or cette dernière étant comprise entre des limites dont la différence est $\sqrt{a}$, on devra retomber nécessairement au bout d'un certain nombre de fois limité par là-même sur une valeur déjà précédemment admise. Il en sera de même pour r, limité de la même façon. L'expérience du calcul, répétée pour un certain nombre de racines, a dû montrer, bien avant qu'on essayât de le prouver théoriquement, que cette répétition est liée à l'existence de périodes suivant lesquelles reviennent les nombres r et s. Il s'ensuit de là qu'au bout d'une période complète, r redevient toujours égal à sa valeur initiale $+1$, correspondant à

$$p = 1, \qquad q = 0,$$

et qu'on obtient ainsi toujours une solution de l'équation.

$$p^2 - aq^2 = 1.$$

On observe également que si on rencontre une valeur de r égale à -1, elle se trouve au milieu de la période complète entre deux valeurs successives $+1$, et que les valeurs $+2$ et -2 amènent immédiatement à la valeur $+1$.

L'existence de la période étant reconnue, il est clair qu'on peut calculer une infinité de couples de valeurs p, q, correspondant à chacune des valeurs de r faisant partie de la période; mais le calcul ainsi possible de proche en proche est d'une longueur rebutante. On doit donc tendre à l'abréger par l'invention d'autres méthodes dans lesquelles on profitera de la connaissance d'une solution trouvée soit par ce procédé, soit par tâtonnement, pour en déduire une infinité d'autres.

IV

Les problèmes de Diophante sont pour la très grande partie relatifs à des questions de ce genre, avec cette différence toutefois qu'il se propose seulement des solutions en nombres rationnels. Mais rien n'est plus simple que d'étendre ses artifices à la solution en nombres entiers, pourvu qu'on ne se propose pas de démontrer que la solution ainsi obtenue sera plus ou moins complète. Prenons pour le montrer le lemme 16 du VIe livre.

On a une solution (p, q) de l'équation

$$p^2 - aq^2 = 1,$$

on veut trouver une autre solution (p_1, q_1).

Diophante posera, par exemple :

$$p_1 = mx - p,$$
$$q_1 = x + q,$$

d'où

$$x = 2\frac{mp + aq}{m^2 - a},$$

et

$$p_1 = \frac{(m^2 + a)p + 2aq}{m^2 - a},$$
$$q_1 = \frac{2mp + (m^2 + a)q}{m^2 - a}.$$

Supposons p, q entiers et cherchons à rendre également entiers p_1, q_1, soit

$$m = \frac{u}{v}.$$

et supposons

$$(4) \qquad u^2 - av^2 = 1,$$

nous avons immédiatement

$$p_1 = (u^2 + av^2)p + 2auvq,$$
$$q_1 = 2uvp + (u^2 + av^2)q.$$

Si d'ailleurs nous posons, pour simplifier,

$$u^2 + av^2 = \alpha,$$
$$2uv = \gamma,$$

on remarque très facilement que

$$\alpha^2 - a\gamma^2 = 1,$$

et que cette dernière condition, substituée à (4), suffit pour la solution de la question proposée.

Que ce soit par une tentative semblable, que ce soit par l'analyse de l'extraction de $\sqrt{2}$, poursuivie dans le sens indiqué plus haut, ou simplement en formant par tâtonnement les premiers termes de la série des (p, q), et en découvrant empiriquement les relations très simples qui existent entre eux, sauf à démontrer ensuite théoriquement la généralité de ces relations, il est certain qu'en tous cas les Grecs avaient complètement résolu le problème pour l'équation

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1,$$

par le moyen des relations

$$p_1 = p + 2q,$$
$$q_1 = p + q.$$

Ces relations que donne Théon de Smyrne ont été connues de très bonne heure, puisque le terme technique de *diamètre* sous

lequel p est désigné par rapport au *côté* q, se trouve employé par ce sens dans Platon. Il y a là une preuve authentique des travaux des Grecs dans la théorie des nombres.

Comment croire que cette remarquable proposition soit restée isolée? Comment penser qu'on n'en aura pas conclu *a priori* qu'il devait y avoir une loi analogue pour la formation des solutions successives de l'équation

$$(\delta) \qquad p^2 - aq^2 = r ?$$

Soit en général

$$(d) \qquad \begin{cases} p_1 = \alpha p + \beta q, \\ q_1 = \gamma p + \delta q, \end{cases}$$

la représentation des relations de ce genre, il suffit pour déterminer α, β, γ, δ, de connaître les trois groupes de solutions les plus simples et de résoudre deux couples d'équations du premier degré à deux inconnues.

Ainsi pour l'équation

$$p^2 - 3q^2 = 1$$

on a immédiatement les trois groupes (1,0) (2,1) (7,4), d'où l'on déduit immédiatement :

$$\alpha = 2, \qquad \beta = 3, \qquad \gamma = 1, \qquad \delta = 2,$$

et l'on peut voir que la loi est indépendante de la valeur donnée à r.

Des tâtonnements de ce genre pouvaient facilement conduire à l'induction de la formation générale des coefficients α, β, γ, δ, d'ailleurs également aisée à découvrir directement.

Si l'on propose que

$$p_1^2 - aq_1^2 = \pm r = \pm (p^2 - aq^2),$$

comme

$$p_1^2 - aq_1^2 = (\alpha^2 - a\gamma^2)p^2 - (a\delta^2 - \beta^2)q^2 + 2(\alpha\beta - a\gamma\delta)pq,$$

on sera amené à poser :

$$(6) \qquad \begin{aligned} \alpha^2 - a\gamma^2 &= \pm 1, \\ a\delta^2 - \beta^2 &= a(\alpha^2 - a\gamma^2), \\ \alpha\beta &= a\gamma\delta, \end{aligned}$$

et à satisfaire aux deux dernières conditions en faisant

$$\begin{aligned} \beta &= a\gamma, \\ \delta &= \alpha, \end{aligned}$$

en sorte qu'une solution (α, γ) de l'équation (6) et une (p, q) de (5) permettront d'en trouver une nouvelle (p_1, q_1) de cette dernière, par les relations

$$(d) \qquad \begin{cases} p_1 = \alpha p + a\gamma q, \\ q_1 = \gamma p + \alpha q. \end{cases}$$

Les Grecs n'ignoraient pas d'ailleurs que l'équation

$$(7) \qquad \alpha^2 - a\gamma^2 = -1$$

n'est pas toujours possible. Nous trouvons notamment dans Théon de Smyrne, pour $a = 3$, cette proposition sous la forme suivante : Tout carré est un multiple de 3 ou un multiple de 3 augmenté d'une unité. De là deux cas dont les nombres 2 et 3 leur offraient des exemples faciles.

Si l'on a la solution *in minimis* de l'équation (7), soit (α, γ) cette solution, d'après les formules (d), par

$$\begin{aligned} p &= \alpha^2 + a\gamma^2, \\ q &= 2\alpha\gamma, \end{aligned}$$

on obtiendra la solution *in minimis* (p, q) différente de $(1,0)$ de l'équation

$$(8) \qquad p^2 - aq^2 = 1,$$

et en continuant l'emploi des mêmes formules (d), une série de valeurs

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_n}{q_n}$$

alternativement approchées par défaut et par excès de $\sqrt{a}$, et dont les termes satisfont alternativement aux équations (7), (8).

Si au contraire l'équation (7) est impossible et que l'on ait la solution *in minimis* (α, γ) différente de (1,0) de l'équation (8), les mêmes formules donneront la suite indéfinie des solutions de cette équation, toutes les valeurs de $\sqrt{a}$ que l'on en déduira étant approchées par excès.

Ces formules permettent enfin, si l'on a la solution *in minimis* (α, γ) de (7) ou de (8), et celle (p, q) de l'équation (5), où r peut avoir une valeur quelconque, positive ou négative, de déduire dans un cas une série de solutions de (5) ou une série de groupes (p, q) correspondant alternativement à (5) et à

$$p^2 - aq^2 = -r.$$

Mais ces séries n'embrassent pas en général toutes les solutions; cela tient à ce que, dans la même période des r, lors de la recherche de la solution *in minimis* pour $r = 1$, les mêmes termes se répètent de part et d'autre à égale distance des extrêmes.

Il est clair d'ailleurs qu'aux formules (d) il faut joindre les suivantes :

$$(d') \qquad \begin{cases} p_1 = \pm(\alpha p - a\gamma q), \\ q_1 = \pm(\gamma p - \alpha q), \end{cases}$$

où les signes $\pm$ sont choisis suivant que r est positif ou négatif. La seule condition de leur emploi est qu'elles puissent fournir de nouvelles solutions. Or on voit facilement que les substitutions (d') opérées deux fois de suite font retomber sur la solution originaire, tandis que le résultat est le même, qu'on fasse suivre les substitutions (d') des substitutions (d) ou inversement. On aura donc en général deux séries distinctes de solutions progressant chacune suivant les substitutions (d), et telles que l'on pourra passer de l'une à l'autre, à n'importe quel terme, par les substitutions (d').

Si l'on connaît deux couples (p, q), (p_1, q_1) de solutions succes-

sives de l'équation (5), on pourra en tirer la solution (α, γ) *in minimis* de (8) par les relations :

$$\alpha = \frac{pp_1 \pm aqq_1}{r}, \qquad q = \frac{pq_1 \pm qp_1}{r},$$

les signes $\pm$ étant choisis de façon que α, γ soient entiers.

Enfin de la solution *in minimis* (p, q) de l'équation

$$p^2 - aq^2 = \pm 2,$$

on peut, par des formules que nous avons déjà rencontrées,

$$\alpha = p^2 \pm 1,$$
$$\gamma = pq,$$

tirer la solution *in minimis* (α, γ) de l'équation (8).

Tel est l'ensemble des règles pratiques pour la solution du problème de Pell, ainsi qu'elles ont pu être plus ou moins partiellement découvertes ou retrouvées sans difficultés majeures, à diverses époques et par divers génies. Les obstacles que présentait au contraire l'établissement de la théorie, obstacles qui n'ont été vaincus que par Lagrange, ont seuls, à notre avis, empêché qu'elles ne se constituassent de bonne heure en un corps de doctrine, et ce fait, en entravant leur transmission, a pu suffire longtemps à effacer la mémoire de leur emploi.

THÉORIE GÉOMÉTRIQUE

DU

PENDULE DE FOUCAULT

PAR M. L. ORDINAIRE DE LACOLONGE

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

En juillet 1879, cherchant un renseignement dans les œuvres d'Arago, je tombai sur le pendule de Foucault. L'explication théorique de M. Liouville, citée par l'illustre astronome, ne me satisfit pas. Les professeurs de notre Faculté des Sciences partaient pour les vacances : eux seuls auraient pu m'indiquer les auteurs à consulter. Je remis mes recherches à leur retour; mais, à chaque moment de loisir, l'idée me poursuivait. Réduit à mes propres forces, je finis par aborder une question que les plus grands géomètres du siècle avaient approfondie; j'ignorais ce fait, qui eût certainement empêché ma tentative. J'arrivai à des résultats tellement imprévus, que je soumis une première rédaction au jugement d'un astronome dont l'autorité scientifique est aussi incontestable qu'incontestée.

M. Yvon Villarceau, avec une complaisance dont je ne saurais assez le remercier, voulut bien me répondre le 28 octobre 1879. Son opinion, émise avec une extrême urbanité, que je ne suis pas obligé d'imiter en parlant de moi-même, peut se résumer ainsi : vous partez d'un principe faux et vous ne tenez pas compte d'une circonstance fort importante.

Quant au principe, je reconnais le bien fondé de la critique, d'autant mieux que je la prévoyais dans une note de mon premier travail.

Pour l'omission, malgré tout le respect dû à mon juge, je lui demande pardon de ne point partager son avis. Ma pensée aura son développement dans ce qui suit (n° 2).

La lettre de M. Villarceau et l'envoi gracieux de son Mémoire du 21 juillet 1879, ont été pour moi du plus grand prix. Connaissant, grâce à lui, les travaux à consulter dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, j'ai pu suivre la question depuis son origine et comprendre son extrême difficulté. J'ajouterai de suite que cette étude n'a rien changé à mes convictions, au contraire. Rien n'est plus tenace que la foi de l'inventeur. Je puis bien être entaché de ce vice, qui a parfois l'avantage de conduire à la vérité en passant par le faux.

En suivant l'ordre chronologique, voici l'indication des Notes, Mémoires et Communications que je relève dans les *Comptes rendus*. Je leur donne des lettres d'ordre pour abréger les citations dans le cours de ce travail :

				Pages
A.	3 février	1851.	Communication de M. Foucault	135
B.	10 id.	1851.	Note de M. Binet	157
C.	10 id.	1851.	Opinion de M. Liouville	159
D.	17 id.	1851.	Suite de la Note de M. Binet	197
E.	17 id.	1851.	Remarques de M. Poinsot	206
F.	28 avril	1851.	Anciennes observations de Viviani	635
G.	24 septembre	1860.	Mémoire de M. Poncelet	467
H.	1er octobre	1860.	Suite de ce Mémoire	511
I.	29 janvier	1872.	Mémoire de M. Serret	269
J.	14 avril	1879.	Expériences de M. Dejean de Fonroque	771
K.	21 juillet	1879.	Mémoire de M. Yvon Villarceau	113

---

1. Il y a une douzaine d'années, à Bordeaux, nous avons, avec beaucoup d'autres, vu répéter la curieuse expérience de Foucault. M. Laurendeau, notre habile horloger mécanicien, avait suivi toutes les indications données par l'inventeur (A) et par Arago, sauf de légères modifications de détail commandées par le local dont il disposait. Le pendule, long de 10 mètres, occupait le milieu d'une salle planchéiée, M. Laurendeau, avec un cordeau de charpentier, battait un trait blanc passant par la projection du

point de suspension du pendule et par celle du point fixe auquel la sphère était fixée par un fil. Ce fil brûlé, l'expérience commençait et donnait tous les résultats constatés par Foucault. La première oscillation s'accomplissait en suivant exactement le trait blanc, autant que l'œil peut le percevoir, quand il n'est aidé d'aucun instrument.

Il est évident que Foucault a conçu son appareil en se basant sur la persistance du plan des oscillations pendulaires dans l'espace libre, et en admettant que la translation de la terre sur l'écliptique est sans influence sur elles.

Cette seconde hypothèse est généralement adoptée par les géomètres qui se sont occupés de la question. Il n'en est pas ainsi de la première. Seul Poinsot (E) l'admet avec une certaine réserve; car il indique à Foucault un autre moyen de se procurer dans l'espace un plan invariable. C'est peut-être à cette circonstance qu'est due la création du gyroscope, dont l'ingénieux physicien s'est servi plus tard, pour fournir une nouvelle démonstration de la rotation terrestre.

Il a été observé, en Toscane dès 1661 (F), en France par Clairaut au siècle dernier, et plus récemment par Pouillet (B), que la projection horizontale du point mobile du pendule décrit une orbite elliptique, dont le centre répond à la verticale. Mais ces savants avaient négligé l'influence de la rotation diurne. Binet, en la faisant entrer dans ses calculs (D), trouve que cette projection est *une ellipse dont les deux axes sont constants. C'est le plan azimutal du grand axe qui se déplace* dans l'expérience de Foucault. Mais Binet fait abstraction de la résistance de l'air, qui est assez appréciable pour finir par arrêter le mouvement. En outre, il ne considère que de très petits arcs d'oscillation.

Abordant le problème comme Binet, au moyen de la dynamique analytique, et par une méthode qui lui est propre, Poncelet (G) arrive à une équation dont il tire, entre autres conséquences, que le pendule décrirait autour de la verticale des nappes, ou surfaces coniques, rentrant sur elles-mêmes, et affectant, à la limite de petitesse de leur ouverture, la forme elliptique démontrée par

Clairaut, pour le cas où l'on néglige l'influence de la rotation terrestre.

Poncelet n'admet pas, comme Poinsot, que la question soit purement géométrique. M. Serret (I) ne l'admet pas davantage, et fait quelques réserves relativement aux idées émises par le savant général. Il repousse comme lui la notion du *prétendu plan d'oscillation.*

Dans son mémoire (K), M. Yvon Villarceau ne donne pas les équations qui lui servent de point de départ, *équations,* dit-il, *que chacun écrirait avec la plus grande facilité.*

Il ajoute que *la difficulté est tout entière dans l'intégration des équations différentielles.*

Quoi qu'il en soit, tous les savants dont les travaux viennent d'être cités, arrivent par des voies analytiques différentes, et en faisant des réserves sur les opinions de leurs devanciers, à des conclusions concordant avec les faits préparés et constatés par Foucault, partant d'un principe faux.

Binet concluait (D) : *Le plan azimutal du grand axe de l'ellipse se déplace, dans un sens rétrograde, avec une vitesse dont la partie uniforme est ω sin λ, c'est-à-dire la rotation angulaire de la terre estimée parallèlement à l'horizon.*

M. Villarceau (K), parlant d'amplitudes atteignant 45°, dit :

Le mouvement du plan des oscillations autour de la verticale s'effectue avec une vitesse à peu près constante, vitesse qui, en raison des amplitudes initiales, pourra différer de celle que Foucault avait trouvée pour le cas des amplitudes infiniment petites.

Cette concordance entre les conclusions fournies par les équations basées sur les lois de la dynamique et les résultats de l'expérience, conduit à penser que l'erreur, qui tient à l'hypothèse de la persistance des oscillations pendulaires, est de même ordre que celle qui, dans l'état actuel de l'analyse, est la conséquence de l'imperfection des méthodes d'intégration plus ou moins approximatives.

De plus, la dernière citation de M. Villarceau fait concevoir

que, pour des amplitudes initiales de 45°, la vitesse de la trace pourrait bien ne pas être absolument celle trouvée par Foucault.

Une autre circonstance contribue à faire naître cette idée. D'après Foucault, la trace ne fait pas un tour complet en 24 heures (A), ce qui est la conséquence de la vitesse $\omega \sin \lambda$.

Ainsi, sur le parallèle de 45° de latitude, où $\sin \lambda = 0{,}7071$, après le mouvement diurne complet, la trace n'aurait marché que de 250° 33′ 32″ environ.

Sur le parallèle de 30°, où $\sin \lambda = 0{,}5$, la trace n'ayant parcouru que 180° se trouverait sur le prolongement de sa position primitive et semblerait avoir décrit une révolution entière, ce qui serait une pure illusion.

Il est difficile de croire qu'un pendule qui, pendant toute la révolution diurne, est constamment sollicité par les mêmes forces, ne se retrouve pas, après les 24 heures, dans sa primitive position. Par quelle voie y revient-il?

La question n'est donc pas épuisée. Foucault, partant d'un principe reconnu faux depuis, a combiné une très remarquable expérience, expliquée postérieurement par la mécanique rationnelle, mais il n'a pas été jusqu'au bout. Du même principe découlent d'autres faits que la science expliquera peut-être aussi un jour. C'est notre espoir en les faisant connaître.

Que le plan d'oscillation, le grand axe de la trace du cône décrit par le fil, le plan de la révolution du gyroscope, soit pris comme point de départ, nous le regarderons comme invariable dans l'espace absolu.

2. Soient (*fig.* 1) O le centre de la terre;
OO′ la ligne des pôles, qui est l'axe de rotation de la terre;
P le point du parallèle de latitude λ, où se fait une observation;
Ω le centre de ce parallèle;
R le rayon terrestre.

Le point de suspension du pendule est situé sur le prolongement

de ce rayon, à une distance appréciable, mais très petite par rapport à lui.

On a pour le rayon du parallèle :

$$(1) \qquad \Omega P = R \cos\lambda.$$

La distance du parallèle au point O′, est

$$(2) \qquad \Omega O' = \frac{R \cos^2\lambda}{\sin\lambda} = \frac{R \cos\lambda}{\operatorname{tang}\lambda}.$$

On a aussi :

$$(3) \qquad O'P = \frac{R \cos\lambda}{\sin\lambda} = \frac{R}{\operatorname{tang}\lambda}.$$

Par la ligne O′P, menons le plan tangent à la sphère. Il est (*fig.* 2) coupé par le plan de l'oscillation suivant une trace PU qui fait, avec le méridien PO′, un angle β.

Prenons Ω pour origine des coordonnées rectangulaires;
$\Omega O'$ l'axe terrestre, pour axe des Z;
$P\Omega O'$ le plan méridien, pour plan des XZ;
$P\Omega S$ le plan du parallèle, pour plan des XY;
$O'\Omega S$ sera le plan des YZ.

Déterminons l'angle φ que la trace pendulaire fait avec le plan des XY, et la projection Ψ de l'angle β sur le même plan. On a (1) (2) (3)

$$UP = \frac{O'P}{\cos\beta} = \frac{R}{\operatorname{tang}\lambda \cos\beta},$$

$$(4) \qquad O'\Omega = US = \frac{R\cos\lambda}{\operatorname{tang}\lambda} = UP\sin\varphi = \frac{R\sin\varphi}{\operatorname{tang}\lambda\cos\beta},$$

d'où

$$(5) \qquad \sin\varphi = \cos\beta\cos\lambda.$$

On a encore

$$O'U = \Omega S = O'P\operatorname{tang}\beta = \frac{R\operatorname{tang}\beta}{\operatorname{tang}\lambda} = \Omega P\operatorname{tang}\Psi = R\cos\lambda\operatorname{tang}\Psi,$$

d'où

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\Psi = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda}.$$

Voilà donc une ligne faisant avec le plan du parallèle un angle φ, et sur le plan des XY un angle Ψ qui, en 24 heures, tourne autour de l'axe terrestre en s'appuyant sur une directrice qui n'est autre chose que la circonférence du parallèle de latitude λ. Cette droite est donc la génératrice d'un hyperboloïde de révolution à une nappe.

3. Nous ne nous arrêterons pas à la recherche, très facile du reste, de l'équation de cette surface, pouvant arriver à notre but par une voie plus rapide [1].

Il nous suffit de faire les remarques suivantes :

Si, par l'origine Ω, on mène des parallèles à toutes les génératrices de l'hyperboloïde, elles formeront deux cônes opposés par le sommet.

Si on coupe ces cônes par un plan passant par l'axe des Z, l'intersection formera deux angles opposés par le sommet, entre les côtés desquels se projetteront toutes les génératrices des cônes. Aucune d'elles ne tombera sur le plan du parallèle, à moins que la surface de l'hyperboloïde ne se réduise au plan même de ce parallèle. Dans ce cas, la génératrice, ou trace blanche, est située dans le plan des XY et tangente à la circonférence du parallèle.

4. La suite des plans tangents, tels que celui passant par PO′ (*fig.* 1), et menés à l'extrémité de rayons terrestres, faisant entre

[1] Cette équation est :

$$x^2 + y^2 - \frac{\sin^2\lambda + \tang^2\beta}{\cos^2\lambda} z^2 + 2Rz\sin\lambda = R^2\cos^2\lambda.$$

Comme elle contient des termes du premier degré, sa surface n'est pas rapportée à son centre. Pour l'y amener, il faut y remplacer z par $z+a$ et égaler à zéro les termes en z, ce qui conduit à :

$$x^2 + y^2 - \frac{\sin^2\lambda + \tang^2\beta}{\cos^2\lambda} z^2 = \frac{R^2\cos^2\lambda\tang^2\beta}{\sin^2\lambda + \tang^2\beta} = \rho^2$$

et

$$a = \frac{R\sin\lambda\cos^2\lambda}{\sin^2\lambda + \tang^2\beta},$$

ρ désignant le rayon du cercle de gorge, qui est aussi la plus courte distance de la génératrice à l'axe de rotation.

La surface est donc parfaitement déterminée.

eux des angles égaux, forme une pyramide dont les faces sont des triangles à bases aussi petites qu'on le voudra par rapport à leur hauteur. L'ensemble de ces bases constitue un polygone d'un très grand nombre de côtés qui se confond sensiblement avec la circonférence du parallèle de rayon ΩP. Elle est aussi la périphérie de la base du cône ayant O pour sommet, cône dont les arêtes prolongées donnent la suite des points de suspension du pendule dans l'espace. Les éléments de la circonférence de cette base sont perpendiculaires à la fois à la verticale du point de suspension, aux arêtes du cône qui a O′ pour sommet, et aux rayons du parallèle tels que ΩP.

Soit (*fig.* 3) P′ le point de départ, c'est-à-dire celui où le pendule, suspendu en A′, fait sa première oscillation au-dessus du trait blanc battu à l'avance sur le plan tangent qui coupe le parallèle suivant P′ *b*′. Observons que le point A′ n'est pas dans le plan du parallèle, mais sur le cône dont le sommet est en O (*fig.* 1).

Quand, par suite de la rotation diurne, le globe aura tourné d'un angle L°, le point P′ sera venu en P et le point de suspension en A. Là aussi, dans notre hypothèse, le plan d'oscillation coupera le méridien suivant l'angle β, mais la trace blanche pourra ne pas se trouver dans le nouveau plan d'oscillation. Pour le savoir, il suffit de projeter la trace blanche battue en P′ sur un plan fixe, tel que celui des ZY, et ensuite de ce plan sur celui tangent en P [1].

5. Pour préciser les choses, traçons (*fig.* 4) une épure en

(1) Cette méthode, qui simplifie le calcul, rend moins bien compte des faits que la suivante. Menons (*fig.* 3) PA″ égal et parallèle à P′A′. Cette ligne ne sera pas, comme P′A′, une génératrice du cône dont le sommet est en O.

Par P, perpendiculairement à PA″, menons dans l'espace P*b*″ égal et parallèle à P′*b*′. La ligne P*b*″ ne sera pas située dans le plan du parallèle.

Par P*b*″ menons un plan perpendiculaire à PA″ et parallèle au plan tangent passant par P*b*′. Ce plan coupera la ligne OO′ entre les deux points Ω et O′ (*fig.* 1).

Supposons que P*b*″ = P′*b*′ soit égal à la demi-base du triangle qui forme l'un des côtés de la pyramide circonscrite. Par P, dans le plan passant par P*b*″, menons la ligne formant la hauteur de ce triangle. Cette ligne ne sera pas située dans le méridien passant par P.

Entre PA″ et le plan P*b*″ il existera identiquement les mêmes relations qu'entre

prenant les mêmes axes de coordonnées que précédemment et désignons les mêmes points par les mêmes lettres.

La trace pendulaire, ou génératrice, représentée par la ligne PU (*fig.* 2), l'est, sur l'épure, par ses trois projections PS, ΩU, PO', dont trois points P,O',S ont été déterminés précédemment. Il serait donc facile de poser les équations de cette droite.

Admettons que le pendule soit en mouvement lors de son arrivée dans le méridien passant par ΩP.

Il aura dû être mis en oscillation antérieurement, quand son point de suspension se trouvait, dans l'espace, sur un autre méridien, tel que celui passant par ΩP' et faisant avec le premier un angle

$$P'\Omega P = L^{\circ}.$$

C'est sur le plan tangent au parallèle en P' que l'on a battu le trait blanc, constatant que la trace pendulaire faisait alors avec la ligne méridienne PO' un angle β. Dans notre hypothèse, cet angle est constant et se reproduit dans tous les méridiens où le point de suspension et l'observateur se trouvent successivement placés.

6. Il s'agit de projeter sur le plan tangent, transporté en P, la trace blanche battue en P'. On y arrivera, comme on l'a dit, en projetant cette trace sur le plan des XY;

P'A' et le plan P*b*'. La trace blanche occupera sur le plan P*b*'' la même position que sur le plan P' *b*', absolument comme si le pendule, suspendu en A'', avait coupé, suivant l'angle constant β, un plan passant par A''P et parallèle au méridien P'A'.

Pour avoir la position de la trace blanche primitive sur le plan P*b*, il faudrait imprimer au plan P*b*'' :

Un premier mouvement angulaire autour du point P comme pivot; il amènerait la ligne-milieu de son triangle, dans le méridien passant par P;

Un second mouvement angulaire autour de cette ligne milieu comme charnière; il ferait coïncider la base P*b*'' avec celle P*b*;

Un troisième mouvement angulaire, dont les bases identifiées formeraient la charnière; il ferait coïncider le plan passant par P*b*'' avec celui passant par P*b*. On calculerait ensuite la position que ces trois mouvements feraient successivement prendre à la trace blanche. On arriverait ainsi à celle qui en réalité est due au changement de position du point de suspension dans l'espace.

En y menant ensuite, par l'origine Ω, une parallèle à cette projection;

Et enfin en projetant cette parallèle sur le plan tangent transporté en P.

Il faut d'abord déterminer sur l'épure les trois traces de la génératrice passant par P'.

Le point P' est connu par la condition que l'angle

$$P\Omega P' = L^{\circ}.$$

La trace pendulaire doit, sur le plan des XY, faire avec le rayon $\Omega P'$ un angle égal à Ψ. Le point D et la trace P'D sont donc déterminés.

La trace pendulaire doit, avec le plan des XY, faire un angle φ. Menons au point P' une droite P'T suivant cet angle. Élevons en D une perpendiculaire à P'D, on obtiendra par l'intersection de ces deux lignes le point T. Il suffit de le reporter, par un arc de cercle, dans le plan des ZY, pour avoir le point où la ligne coupe ce plan. On aura ainsi la trace HT. Celle dans le plan des ZX s'en déduit facilement.

Ceci suffit pour que l'épure parle aux yeux, mais il importe d'avoir l'équation de celle de ces traces qui est située dans le plan des ZY.

L'équation (4) donne US. On a ensuite :

$$PS = \frac{\Omega P}{\cos\Psi} = \frac{R\cos\lambda}{\cos\Psi}.$$

On en tire :

$$\frac{US}{PS} = \frac{\cos\Psi}{\text{tang}\,\lambda} = \text{tang}\,\varphi. \tag{7}$$

On a encore :

$$\Omega Q = R\cos\lambda\cos L^{\circ},$$
$$\Omega H = R\cos\lambda\sin L^{\circ} = y', \qquad z' = 0;$$

puis

$$P'D = \frac{R\cos\lambda\cos L^{\circ}}{\cos(\Psi - L^{\circ})}.$$

$$\Omega D = \frac{P'D\sin\Psi}{\cos L} = \frac{R\cos\lambda\sin\Psi}{\cos(\Psi - L^{\circ})} = y'',$$

et à cause de (7)

$$DT = P'D \operatorname{tang} \varphi = \frac{R \cos\lambda \cos L^{0}}{\operatorname{tang}\lambda} \cdot \frac{\cos \Psi}{\cos(\Psi - L^{0})} = z''.$$

L'équation de la trace HT est :

$$y - y'' = \frac{y' - y''}{z' - z''}(z - z''),$$

dans laquelle le coefficient $\frac{y' - y''}{z' - z''}$ est la tangente de l'angle p, que cette trace fait avec l'axe des Z. Comme $z' = 0$, on peut aussi écrire cette expression

$$\frac{y''}{z''} - \frac{y'}{z''} = \operatorname{tang} p.$$

On a, d'après ce qui précède,

$$\frac{y''}{z''} = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos L^{0}} \cdot \operatorname{tang}\Psi,$$

et à cause de (6)

$$\frac{y''}{z''} = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\cos\lambda \cos L^{0}}.$$

On a également

$$\frac{y'}{z''} = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} L^{0}. \frac{\cos(\Psi - L^{0})}{\cos\Psi},$$

qui devient, en développant $\cos(\Psi - L^{0})$,

$$\frac{y'}{z''} = \operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang} L^{0} (\cos L^{0} - \sin L^{0} \operatorname{tang}\Psi).$$

et à cause de (6)

$$\frac{y'}{z''} = \operatorname{tang}\lambda \sin L^{0} + \frac{\sin^{2} L \operatorname{tang}\beta}{\cos\lambda \cos L^{0}};$$

de sorte que, toutes réductions faites, on arrive à

$$(8) \qquad \frac{y''}{z''} - \frac{y'}{z''} = \operatorname{tang} p = \frac{1}{\cos\lambda}(\operatorname{tang}\beta \cos L^{0} - \sin\lambda \sin L^{0}).$$

Telle est la tangente de l'angle que la trace blanche, battue primitivement sur le plan tangent au méridien passant par le point P', fait, dans le plan des ZY, avec l'axe des Z.

7. Il reste à projeter cet angle sur le plan tangent en P lieu de l'observation. Ce plan coupe celui des ZY suivant la droite O'U (*fig.* 2). Par Ω menons ΩT faisant avec l'axe des Z un angle p; joignons le point T au point P; cette dernière ligne fera avec PO' l'angle cherché P.

On a

$$O'T = O'P \tang P = O'\Omega \tang p,$$

et à cause de (2) et (3)

$$\tang P = \cos\lambda \tang p = \tang\beta \cos L^{\circ} - \sin\lambda \sin L^{\circ}. \tag{9}$$

8. Il est utile d'avoir aussi la projection de cet angle sur le plan des XY. Appelons p' l'angle projeté et remarquons (*fig.* 4), qu'il est égal à HP'D, différence des angles Ψ et L°. On peut donc écrire

$$p' = \pm(\Psi - L^{\circ}). \tag{10}$$

9. L'équation (9) montre que, β et λ une fois donnés, tang P ne saurait être égal à tang β, que pour des valeurs particulières de L°. La trace blanche, battue au moment du départ, et la trace pendulaire observée à un autre instant ne coïncideront donc généralement pas, ainsi que Foucault l'avait prévu, et l'a demontré expérimentalement.

10. Avant d'aller plus loin, il est bon de tirer de l'équation (9) une importante conclusion.

Pour que le mouvement de translation de la trace blanche se fît avec une vitesse uniforme, il faudrait que cette vitesse fût proportionnelle à L°, c'est-à-dire que l'on eût

$$\frac{\beta - P}{L^{\circ}} = \pm m \qquad \text{ou} \qquad P = \beta \pm m L^{\circ},$$

m étant une constante; d'où l'on déduit en différentiant

$$\frac{dP}{dL^{\circ}} = \pm m.$$

De l'équation (9) on tire, à cause de

$$\frac{1}{\cos^2 P} = 1 + \text{tang}^2 P,$$

$$\frac{dP}{dL^0} = \pm \frac{\text{tang}\,\beta \sin L^0 + \sin\lambda \cos L^0}{1 + (\text{tang}\,\beta \cos L^0 - \sin\lambda \sin L^0)^2},$$

qui devrait donc être une quantité constante. Alors la seconde derivée $\frac{d^2P}{dL^{0^2}}$ devrait être égale à 0.

Cette seconde dérivée peut s'écrire :

$$(11) \qquad \frac{d^2P}{dL^{0^2}} = \pm \frac{A.B}{C},$$

A, B, C ayant les valeurs suivantes :

$$A = \text{tang}\,\beta \cos L^0 - \sin\lambda \sin L^0 = \text{tang}\,P,$$

$$B = 1 + (\text{tang}\,\beta \cos L^0 - \sin\lambda \sin L^0)^2 + 2(\text{tang}\,\beta \sin L^0 - \sin\lambda \cos L^0)^2,$$

$$C = [1 + (\text{tang}\,\beta \cos L^0 - \sin\lambda \sin L^0)^2]^2.$$

Pour que cette seconde dérivée fût égale à 0, il faudrait que l'on eût, ou $A = 0$, ou $B = 0$, ou $C = \infty$.

A, c'est-à-dire tang P, ne peut être égal à zéro que pour $P = 0°$ où $P = 180°$, ce qui donnerait :

$$\beta = \pm mL^0 \qquad \text{ou} \qquad \beta = 180 \pm mL^0.$$

Or, on a supposé β invariable.

B ne peut être égal à zéro, puisque c'est la somme de quatre carrés.

C ne peut être égal à l'infini que pour

$$\text{tang}\,\beta = \infty, \qquad \beta = 90° \quad \text{ou} \quad 270°,$$

c'est-à-dire la génératrice couchée dans le plan du parallèle et tangente à sa circonférence.

Dans l'équation (11), divisons haut et bas par $\tang^2 \beta$; on aura, pour ces valeurs de β,

$$\frac{d^2 P}{d L^{o2}} = \frac{0}{0}.$$

En effet, dans ce cas, la trace ne semble pas bouger, ainsi qu'on le verra au n° 22.

Ainsi, dans tous les cas où la formule (9) est applicable, c'est-à-dire pour toute la surface de la terre, sauf les deux pôles et l'équateur, le mouvement de translation de la trace blanche n'a pas lieu avec une vitesse uniforme. On en verra au n° 15 un exemple frappant; au n° 23 on prouvera qu'il en est encore ainsi à l'équateur. Ce qui se rapporte aux pôles est présenté au n° 27.

11. Les formules (8), (9) et (10) donnent les moyens de calculer le mouvement de la trace pendulaire, le point de suspension étant en un point quelconque de la surface du globe.

Pour fixer les idées, supposons l'observateur placé dans notre hémisphère, le dos tourné au pôle, le visage vers l'équateur : pour lui, la terre tourne de droite à gauche.

Dans la formule (9), λ étant la latitude du lieu et β l'angle que fait, avec le méridien, la direction initiale imprimée au pendule, L^o est seul variable. En le faisant progresser de 0° à 360°, on aura toutes les valeurs possibles de tang P. Ainsi, en faisant dans la formule $L^o = 15°$, on aura la position que la trace blanche devra occuper aux yeux de l'observateur une heure après qu'il aura mis le pendule en activité. Si donc l'appareil pouvait rester en mouvement pendant 24 heures, l'observateur aurait la liberté de constater toutes les positions que la trace blanche peut occuper pendant la révolution diurne et de les comparer aux indications du calcul.

12. Il y a plusieurs cas à examiner.

Quand on n'opère ni à l'équateur ni au pôle, λ est compris entre 0° et 90°, aussi bien sur un hémisphère que sur l'autre, puisque sur chacun d'eux les latitudes se comptent positives, de l'équateur au pôle.

Pour β positif, on peut, dans la formule (9), avoir tang β plus grand, plus petit ou égal à sin λ; ce qui constitue. . . . . 3 cas

Pour β négatif, on peut avoir, en vraie grandeur, tang β plus grand, plus petit ou égal à sin λ; d'où . . . . 3 cas

On peut avoir encore $\beta = 0°$. . . . . 1 cas

ou $\beta = 90°$ . . . . 1 cas

Ces 8 cas constituent tous ceux possibles en dehors du pôle ou de l'équateur.

A l'équateur, où $\lambda = 0$, on peut avoir β positif, négatif, égal à 0° ou à 90°; d'où. 4 cas

Au pôle, $\lambda = 90°$; d'où . . . . 1 cas

En tout. . . . . 13 cas

Avant d'entreprendre leur examen, il convient de faire deux observations générales.

13. En se donnant

$$\lambda > 0° < 90°, \qquad \beta > 0° < 90°.$$

on est sur un point quelconque du globe en dehors du pôle et de l'équateur; sin λ, ainsi que cos λ, est toujours compris entre 0 et 1, sans y atteindre; tang β est susceptible de toutes les valeurs, sauf 0 et ∞.

Pour que tang P fût égal à l'infini, c'est-à-dire $P = 90°$, et que la trace blanche vînt se placer dans le plan du parallèle, il faudrait que l'on eût

$$\operatorname{tang} P = \operatorname{tang}\beta \cos L° - \sin L° \sin\lambda = \infty,$$

équation qui, dans les conditions indiquées, ne peut être satisfaite par aucune valeur de L°. Par suite, en pareils cas, la trace blanche ne se placera pas dans le plan du parallèle, lequel fait avec l'axe terrestre un angle de 90°; ce qui avait été pressenti au n° 3.

Pour que

$$\operatorname{tang} P = 0,$$

il faudra que

$$\operatorname{tang}\beta \cos L° - \sin L° \sin\lambda = 0,$$

condition qui sera remplie quand on aura

$$\operatorname{tang} L^\circ = \frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda} = \operatorname{tang}\Psi.$$

On voit effectivement sur l'épure (*fig.* 4) que les traces PH' et HT seront dans le prolongement l'une de l'autre, et cette dernière parallèle à l'axe des Z quand $L = \Psi$. Mais $\operatorname{tang}\Psi$ est positif aussi bien pour $\frac{+\sin\Psi}{+\cos\Psi}$ que pour $\frac{-\sin\Psi}{-\cos\Psi}$. Il y aura donc deux angles qui satisferont à la précédente condition, celui Ψ et celui $180^\circ + \Psi$.

14. Passons à l'examen des 13 cas.

Pour le premier, on a :

$$\beta > 0^\circ < 90^\circ, \qquad \lambda > 0^\circ < 90^\circ, \qquad \operatorname{tang}\beta > \sin\lambda,$$

et à cause de (6)

$$\operatorname{tang}\Psi > 1, \qquad \Psi > 45^\circ, \qquad 2\Psi > 90^\circ.$$

Remarquons qu'à Bordeaux, où la latitude est de $44^\circ 50' 19''$, pour que $\operatorname{tang}\beta > \sin\lambda$, il faudra que l'on ait

$$\operatorname{tang}\beta > \sin 44^\circ 50' 19'',$$

ce qui exige que

$$\beta > 35^\circ 12'.$$

Revenons au premier cas. Donnant successivement à L°, dans l'équation (9), la valeur des quatre quadrants, on obtiendra les valeurs de $\operatorname{tang} P$ portées dans le colonnes 1, 4, 5, 8 et 9 du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L°	0°	$270^\circ + 2\Psi$	Ψ	90°	180°	$90^\circ + 2\Psi$	$180^\circ + \Psi$	270°	360°
$\operatorname{tang} P$	$+\operatorname{tang}\beta$	$+\sin\lambda$	0	$-\sin\lambda$	$-\operatorname{tang}\beta$	$-\sin\lambda$	0	$+\sin\lambda$	$+\operatorname{tang}\beta$

On a observé précédemment que L° variait d'une façon continue, et que la fonction $\operatorname{tang}\beta$ ne passait pas par l'infini (n° 13). Il faut donc qu'en allant du positif au négatif, elle passe par 0.

Nous avons vu aussi que pour $L^\circ = \Psi$ et $L = 180^\circ + \Psi$ on avait $\tang P = 0$, ce qui permet de remplir les colonnes 3 et 7 du tableau.

Mais tang P a dû, en allant de tang β à 0, passer par un point où

$$\tang P = \sin\lambda,$$

puisque tang β est plus grand que sin λ; et de même, en allant de — tang β à 0°, en un point où

$$\tang P = -\sin\lambda.$$

Il faut donc qu'il y ait des valeurs de L° telles que l'on ait

$$\tang\beta \cos L^\circ - \sin L^\circ \sin\lambda = \pm \sin\lambda.$$

On tire de cette équation, à cause de (6)

$$\tang\Psi = \frac{\pm 1 + \sin L^\circ}{\cos L^\circ} = \pm \frac{1}{\cos L^\circ} + \tang L^\circ = \sqrt{1 + \tang^2 L^\circ} + \tang L^\circ;$$

élevant au carré et réduisant, on arrive à

$$\tang L^\circ = \frac{\tang^2\Psi - 1}{2\tang\Psi} = - \cot 2\Psi,$$

équation satisfaite par les valeurs

$$L^\circ = 270 + 2\Psi, \qquad L^\circ = 90^\circ + 2\Psi,$$

A cause de $2\Psi > 90^\circ$, on a

$$270^\circ + 2\Psi > 360^\circ, \qquad 90^\circ + 2\Psi > 180^\circ,$$

ce qui permet de compléter les colonnes 2 et 6 du tableau.

En reportant ces indications sur la figure 5, on voit que dans le cas présent, la trace blanche partant du point où

$$\tang P = \tang\beta$$

marche d'abord en sens inverse de la rotation du globe, atteint le méridien, le dépasse, arrive après 12 heures à la position

— tang β, puis revient sur ses pas pour reprendre, après 24 heures, sa primitive position au point de départ.

15. Faisons ici une remarque qui vient à l'appui de ce qui a été dit au n° 10. Pendant que la trace a passé de + β à 0°, la terre a tourné de l'angle Ψ. Pendant que cette trace passe de 0° à — β, le globe tourne de 180 — Ψ. Pour que la durée du mouvement ait été égale de part et d'autre, il faudrait que l'on ait

$$180^\circ - \Psi = \Psi \qquad \text{ou} \qquad \Psi = 90^\circ,$$

et à cause de la valeur de tang Ψ (6)

$$\frac{\operatorname{tang}\beta}{\sin\lambda} = \operatorname{tang} 90^\circ = \infty,$$

équation qui ne peut être satisfaite avec les valeurs qui dans le cas présent sont attribuées à β et λ.

16. Dans le second cas, λ et β restant tels qu'ils sont dans le premier, on a

$$\operatorname{tang}\beta < \sin\lambda, \quad \operatorname{tang}\Psi < 1, \quad \Psi < 45^\circ, \quad 2\Psi < 90^\circ.$$

En donnant successivement à L°, dans l'équation (9), les valeurs des quatre quadrants, on aura pour tang P, les valeurs notées aux colonnes 1, 4, 5, 8 et 9 du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L°	0°	Ψ	2Ψ	90°	180°	180° + Ψ	180° + 2Ψ	270°	360°
tang P	+ tang β	0	— tang β	— sin λ	— tang β	0	+ tang β	+ sin λ	+ tang β

Comme dans le cas précédent on aura, colonnes 2 et 6, tang P = 0 pour les angles Ψ et 180° + Ψ.

Ici sin λ étant plus grand que tang β, la trace, en allant de 0° à — sin λ doit passer par — tang β; et plus tard, en allant de 0° à + sin λ, doit passer par + tang β; il faut donc que certaines valeurs de L° donnent,

$$\operatorname{tang} P = \operatorname{tang}\beta \cos L^\circ - \sin L^\circ \sin\lambda = \pm \operatorname{tang}\beta.$$

A cause de (6) cette équation peut s'écrire après réduction.

$$(\cos L^\circ \pm 1) \operatorname{tang}\Psi = \sin L^\circ.$$

Ellé devient, à cause de $\frac{1}{\cos L^\circ} = \sqrt{1 + \text{tang}^2 L^\circ}$,

$$\sqrt{1 + \text{tang}\, L^\circ} = \frac{\text{tang}\, \Psi - \text{tang}\, L^\circ}{\text{tang}\, \Psi},$$

d'où l'on déduit, en élevant au carré et réduisant,

$$\text{tang}\, L = \frac{2\, \text{tang}\, \Psi}{1 - \text{tang}^2 \Psi} = \text{tang}\, 2\Psi,$$

d'où l'on tire

$$L = 2\Psi, \qquad L = 180^\circ + 2\Psi.$$

Les colonnes 3 et 7 du tableau se trouvent ainsi remplies.

En reportant ces indications sur la figure 6, on voit que la trace, partant de tang β, reculera jusqu'à $-\sin\lambda$, puis reviendra sur ses pas jusqu'en $+\sin\lambda$, et de ce point reprenant son mouvement initial, atteindra tang β après 24 heures.

17. Dans le troisième cas, λ et β restant tels que précédemment, on a

$$\text{tang}\, \beta = \sin\lambda, \qquad \text{tang}\, \Psi = 1, \qquad \Psi = 45^\circ.$$

En suivant toujours la même marche, on aura d'abord la valeur de tang P pour les quatre quadrants. On observera ensuite que, pour avoir tang $P = 0$, il faut que dans l'équation (9) on ait :

$$\cos L^\circ = \sin L^\circ,$$

ce qui n'existe que pour les angles de 45° et de $180^\circ + 45^\circ$.

Cette même équation donne, pour ceux de $90^\circ + 45^\circ$ et $270^\circ + 45^\circ$,

$$\text{tang}\, P = \sin\lambda\, (\mp \cos 45^\circ \mp \sin 45^\circ) = \mp \sqrt{2}.\sin\lambda,$$

ce qui permettra de tracer le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L°	0°	45°	90°	$90^\circ + 45^\circ$	180°	$180^\circ + 45^\circ$	270°	$270^\circ + 45^\circ$	360°
tang P	$+\sin\lambda$	0	$-\sin\lambda$	$-\sqrt{2}.\sin\lambda$	$-\sin\lambda$	0	$+\sin\lambda$	$+\sqrt{2}.\sin\lambda$	$+\sin\lambda$

Dans ce cas la trace (*fig*. 6) marche absolument comme dans le cas précédent où $\tang \beta < \sin \lambda$.

18. Dans les trois cas suivants, β est négatif, c'est-à-dire que la trace coupe le méridien à gauche. Ils se traitent par les mêmes moyens que les précédents. Mais on peut se dispenser de faire la majeure partie des calculs. En effet, puisque β est négatif, $\tang \beta$ l'est aussi, et par suite $\tang \Psi$ également. Il suffit donc dans tous les résultats obtenus jusqu'ici de changer le signe de Ψ.

Dans le quatrième cas, λ est toujours compris entre 0° et 90°, et nous supposerons qu'en vraie grandeur, et abstraction faite du signe, on ait $\tang \beta > \sin \lambda$, d'où

$$\tang \Psi > 1, \qquad \Psi > 45^\circ, \qquad 2\Psi > 90^\circ.$$

Pour avoir $\tang P = 0$, il faut alors que l'on ait $\tang L = -\tang \Psi$, d'où

$$L^\circ = -\Psi \quad \text{ou} \quad 360^\circ - \Psi \quad \text{et} \quad L^\circ = 180^\circ - \Psi.$$

Pour avoir $\tang P = \pm \sin \lambda$, il faut que l'on ait $\tang L = \cot 2\Psi$, d'où

$$L^\circ = 90' - 2\Psi \quad \text{et} \quad L^\circ = 270^\circ - 2\Psi.$$

On en conclut le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L°	0°	90°	$180^\circ + \Psi$	$270^\circ - 2\Psi$	180°	270°	$360^\circ - \Psi$	$90^\circ - 2\Psi$	360°
$\tang P$	$-\tang \beta$	$-\sin \lambda$	0	$+\sin \lambda$	$+\tang \beta$	$+\sin \lambda$	0	$-\sin \lambda$	$-\tang \beta$

Ici la trace part de $-\tang \beta$, atteint $+\tang \beta$ et regagne son point de départ. Pendant les douze premières heures elle marche dans le sens de la rotation terrestre, et en sens contraire pendant les douze autres (*fig*. 7). C'est l'inverse de ce qui se passe dans le premier cas, n° 14 (*fig*. 3).

19. Dans le cinquième cas, λ est toujours compris entre 0° et 90° et β négatif. L'on suppose que, en vraie grandeur, $\tang \beta < \sin \lambda$; d'où

$$\tang \Psi < 1, \qquad \Psi < 45^\circ, \qquad 2\Psi < 90^\circ.$$

Pour avoir $\tang P = 0$, il faut alors $\tang L^\circ = -\tang \Psi$ comme au n° précédent, ce qui entraîne les mêmes valeurs de L°.

Pour avoir $\tang P = \pm \tang \beta$, il faut que $\tang L^\circ = -\tang 2\Psi$, d'où

$$L^\circ = -2\Psi \quad \text{ou} \quad 360^\circ - 2\Psi \quad \text{et} \quad L^\circ = 180^\circ - 2\Psi,$$

On en conclut le tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L°	0°	90°	$180^\circ - 2\Psi$	$180^\circ - \Psi$	180°	270°	$360^\circ - 2\Psi$	$360^\circ - \Psi$	360°
$\tang P$	$-\tang \beta$	$-\sin \lambda$	$-\tang \beta$	0	$+\tang \beta$	$+\sin \lambda$	$+\tang \beta$	0	$-\tang \beta$

Dans ce cas, la trace blanche se comporte comme dans le n° 16, mais se meut en sens inverse (*fig.* 8).

20. Dans le sixième cas, λ est toujours compris entre 0° et 90°, et β négatif. On suppose que, en vraie grandeur, $\tang \beta = \sin \lambda$; d'où

$$\tang \Psi = 1, \qquad \Psi = 45^\circ, \qquad 2\Psi = 90^\circ.$$

Pour avoir $\tang P = 0$, il faut alors que l'on ait :

$$L^\circ = 180^\circ - 45^\circ \quad \text{et} \quad L^\circ = 360^\circ - 45^\circ,$$

et pour avoir $\tang P = \pm \sqrt{2} \sin \lambda$, que l'on ait

$$L^\circ = 90^\circ - 45^\circ \quad \text{et} \quad L^\circ = 270^\circ - 45^\circ,$$

ce qui fournit les éléments du tableau suivant :

	1	2	3	4	5	6	7°	8	9
L°	0°	$90^\circ - 45^\circ$	90°	$180^\circ - 45^\circ$	180°	$270^\circ - 45^\circ$	270°	$360^\circ - 45^\circ$	360°
$\tang P$	$-\sin \lambda$	$-\sqrt{2} \sin \lambda$	$-\sin \lambda$	0°	$+\sin \lambda$	$+\sqrt{2} \sin \lambda$	$+\sin \lambda$	0	$-\sin \lambda$

La trace se comporte absolument comme dans le cas précédent.

21. Dans le septième cas, λ restant compris entre 0° et 90° comme précédemment, on a $\beta = 0^\circ$ et $\tang \beta = 0$. Alors le mouvement initial du pendule a lieu dans le plan même du méridien.

L'équation (9) devient

$$\tang P = -\sin L^\circ \sin \lambda,$$

et l'on a

L^0	0°	90°	180°	270°	360
$\tang \rho$	0	$-\sin\lambda$	0	$+\sin\lambda$	0

ce qui, avec la figure 9, dispense de toute autre explication.

22. Dans le huitième cas, λ restant toujours compris entre 0° et 90°, on a $\beta = 90^\circ$. Le mouvement initial du pendule a lieu dans le plan même du parallèle et la trace blanche ne sort point de ce plan, quel que soit L; car on a

$$\tang P = \infty - \sin L^0 \sin\lambda = \infty.$$

Alors la trace blanche ne paraît plus bouger (n° 10). Cette expérience serait intéressante à opérer.

23. Les neuvième, dixième, onzième et douzième cas sont relatifs à ce qui doit se passer à l'équateur où l'on a

$$\lambda = 0^\circ, \quad \sin\lambda = 0, \quad \cos\lambda = 1.$$

Le plan tangent est ici parallèle à celui des ZY, sur lequel la valeur de tang P est donnée par l'équation (8).

Dans le neuvième cas, où l'on se donne $\beta > 0^\circ < 90^\circ$, cette équation devient

$$\tang P = \tang\beta \cos L^0.$$

On en tire, par les substitutions habituelles,

L^0	0°	90°	180°	270°	360°
$\tang P$	$+\tang\beta$	0	$-\tang\beta$	0	$+\tang\lambda$

Dans ce cas la trace, partie de l'angle β, passe au méridien, atteint $-\beta$ et rétrograde pour reprendre, après 24 heures, sa position initiale (*fig.* 10). Ici, pour passer à $\pm\beta$ depuis 0°, ou réciproquement, la trace met le même temps soit six heures; mais pour cela, son mouvement n'est pas uniforme. Puisque tang β, dans un cas donné, est invariable, on a

$$\frac{\tang P}{\tang L^0} = \text{const}.$$

Or, pour que le mouvement fût uniforme on devrait avoir

$$\frac{P}{L} = \text{const};$$

donc il ne l'est pas, ce qui a été démontré au n° 10.

24. Dans le dixième cas, le point de suspension étant toujours sur l'équateur, on prend β négatif. En opérant comme dans le neuvième, on verrait que tang β change ici simplement de signe, de sorte que le mouvement est pareil à celui indiqué (*fig.* 10), mais s'opère en sens inverse.

25. Dans le onzième cas on est encore à l'équateur, mais $\beta = 0$, c'est-à-dire que le mouvement initial se fait sur le méridien du lieu; on a

$$\tang \beta = 0, \qquad \tang p = 0.$$

La trace ne sort pas du méridien et ne semble pas bouger; l'hyperboloïde devient alors un cylindre ayant l'axe terrestre pour axe et le rayon du globe pour rayon.

26. Dans le douzième cas, toujours à l'équateur, on se donne $\beta = 90°$. La trace est dans le plan même de l'équateur, et l'on a

$$\tang \beta = \infty, \qquad \text{d'où} \qquad \tang P = \infty.$$

Elle coupe toujours le méridien à angle droit et ne semble pas bouger. Il peut cependant y avoir du doute quand on fait

$$\cos L^{0} = 0,$$

car alors on a

$$\tang p = \frac{0}{0} - \sin \lambda.$$

Pour connaître la véritable valeur de cette indéterminée, il suffit de chercher la dérivée de la fonction.

$$\tang p = \tang \beta \cos L^{0} - \sin L^{0} \sin \lambda,$$

laquelle est

$$\frac{d \operatorname{tang} P}{d L^{0}} = - \operatorname{tang} \sin L^{0} + \sin \lambda \cos L^{0} = - \infty + \sin \lambda,$$

ce qui prouve que, même alors, la trace coupe le méridien à angle droit.

27. Dans le treizième et dernier cas on est au pôle, où l'on a

$$\lambda = 90, \qquad \sin \lambda = 1, \qquad \cos \lambda = 0.$$

Le plan tangent au point P est parallèle à celui des XY et il faut avoir recours à la formule (10)

$$\operatorname{tang} p' = \operatorname{tang} (\Psi - L),$$

dans laquelle à cause de (6), Ψ devient égal à β, d'où l'on tire

$$p' = \beta - L^{0}.$$

Mais comme β peut être positif ou négatif, il faut poser

$$p' = \pm \beta - L^{0},$$

qui pour toutes les valeurs de L^{0} donne pour p toutes celles de la circonférence. Il en est de même quand $\beta = 0$. Ainsi au pôle, la trace marche comme l'aiguille d'une montre et animée d'un mouvement uniforme.

28. Il doit être fort difficile dans la pratique de lancer exactement le pendule, soit dans le plan du méridien, soit dans celui du parallèle ou de l'équateur, ou même dans une direction angulaire mathématiquement juste. Sans parler des autres causes qui agissent, il est certain qu'une différence angulaire insaisissable à l'œil est sensible pour le pendule. Il pourrait donc se faire que des expériences tentées, soit dans le plan du méridien, soit dans celui du parallèle, fournissent des résultats pareils à ceux du cas général. Nous indiquerons des essais à tenter avec plus de certitude de succès.

29. Quoi qu'il en soit, les résultats fournis par le calcul géomé-

trique, basé sur le principe admis par Foucault peuvent se résumer ainsi :

1° Au pôle, la trace blanche est animée d'une vitesse uniforme et, en 24 heures, accomplit une révolution complète autour de l'axe de la terre.

2° A l'équateur, si le plan d'oscillation coïncide avec le plan méridien, la trace y reste toujours située; ne dévie ni à droite ni à gauche, et ne semble pas bouger.

3° Quand le plan d'oscillation coïncide avec le plan du parallèle, la trace reste invariablement dans ce plan, et ne semble pas bouger.

4° Il en est de même, quand le parallèle est à 0°, c'est-à-dire est l'équateur.

5° Sauf ces quatre cas, la trace se meut entre des limites déterminées, marchant avec une vitesse variable, d'abord dans un sens, puis dans l'autre, pour revenir à son point de départ. Alors elle ne se place jamais dans le plan, soit du parallèle, soit de l'équateur.

30. Voici les cas qui nous semblent le plus facile à réaliser, particulièrement dans le but de vérifier les prévisions de la théorie présentée.

Celui du n° 18 (*fig.* 7), où l'angle β est négatif, serait d'une réalisation aisée partout, et présenterait de l'intérêt à cause de la marche de la trace en sens inverse de la rotation terrestre.

Celui du n° 19 (*fig.* 8), où β est négatif et tang $\beta < \sin \lambda$, serait également curieux, à cause de la marche d'abord dans un sens, puis dans l'autre. En prenant tang β très peu plus petit que $\sin \lambda$, 1 ou 2 degrés de différence, la marche serait pendant 6 heures d'une lentéur extrême et s'accélèrerait à partir du rebroussement. La difficulté semble devoir être de maintenir pendant 6 heures le pendule en oscillation.

31. Nous disions dans notre premier travail « ces faits n'ont » encore été, à notre connaissance, signalés par aucun observa-

» teur. Ce qui peut tenir à deux causes : ou l'observation n'a pas » été assez prolongée, ou le pendule est entré dans le repos bien » avant que le globe ait acccompli une révolution entière. » C'était vrai alors, car nous ignorions les expériences de M. de Fonroque, ainsi résumées par M. Yvon Villarceau (K).

« *J'avais laissé complètement de côté cette étude, depuis une* » *vingtaine d'années, lorsque, dans ces derniers temps, je fus* » *témoin d'expériences exécutées par M. Dejean de Fonroque, au* » *sujet desquelles une communication a été présentée à l'Académie* » *par M. Cornu, dans la séance du 14 avril dernier.*

» *M. de Fonroque a fait osciller un pendule conique, en l'écar-* » *tant de la verticale d'un angle d'environ 45°, au lieu de ne lui* » *faire faire que de très petites oscillations. Dans ces conditions* » *le mouvement pouvait être observé pendant un temps considéra-* » *ble. Le plan des oscillations étant, à l'origine, perpendiculaire* » *au méridien, on le voyait tout d'abord se rapprocher du* » *méridien, comme dans l'expérience de Foucault, puis dépasser* » *le méridien et s'en écarter jusqu'à une certaine limite, rester un* » *instant stationnaire et rétrograder. L'auteur de ces expériences* » *affirme que le plan, décrit par le pendule, oscille autour d'un* » *plan peu éloigné du méridien et dont la position varie avec* » *l'époque de l'année.* »

M. Villarceau développe ensuite ses calculs et en présente le résultat final. Il dit en terminant.

« *Ce résultat étant absolument inconciliable avec les expériences* » *de M. de Fonroque, il faut conclure que des causes autres que* » *la pesanteur et le mouvement de rotation de la terre, inter-* » *viennent dans le phénomène observé.*

. . . .

» . . . . *Peut-être le magnétisme terrestre intervient-il?* . . . . »

Les travaux des illustres auteurs que j'ai nommés en commençant, ne me sont pas favorables. Disons-le franchement, ils condamnent le principe de Foucault sur lequel je me base et dont je ne fais que poursuivre les conséquences. Mais rien n'est brutal

comme un fait. L'expérience de M. de Fonroque a donné à l'avance assez de probabilité à mes déductions pour que je persiste dans l'idée de les faire connaître, persuadé que la question n'est pas épuisée et qu'elles peuvent concourir à l'éclairer. Le temps dira si c'est une illusion.

Juin 1880.

NOTE

SUR

LES TRAMWAYS DE BORDEAUX

PAR M. L. ORDINAIRE DE LACOLONGE
Ancien Élève de l'École Polytechnique.

En regardant poser les rails et marcher les premières voitures des tramways de Bordeaux, on a tout naturellement eu l'idée de rechercher le rayon minimum des courbes où ces véhicules peuvent circuler. Ils ont, sous certains rapports, de l'analogie avec les wagons de chemin de fer, mais en diffèrent surtout par leur vitesse de translation.

D'après un document officiel [1], la rapidité sur les voies ferrées peut, dans des cas rares, atteindre 120 kilomètres à l'heure, et les trains de marchandises pesants ne se meuvent parfois qu'à raison de 24. La vitesse du mouvement par seconde est donc de $33^{m}33$ dans le premier cas, de $6^{m}66$ dans le deuxième. Les voitures des tramways marchent à celle du trot du cheval attelé, qui est de $2^{m}20$.

Pour ces véhicules, la force centrifuge a donc bien moins d'importance que pour les wagons, ce qui permet de raccorder les voies en ligne droite par des arcs de cercle de faible rayon.

Cette condition est tellement capitale dans les villes que le constructeur a dû s'en occuper spécialement. Pour ce motif, et pour d'autres encore, il emploie des roues de petit rayon et tient

---

[1] Rapport de la Commission d'enquête sur les moyens de prévenir les accidents de chemin de fer. 8 Juillet 1880.

ses essieux à une distance aussi faible que le lui permettent la stabilité et la solidité du véhicule.

Outre cette différence entre les deux sortes de voiture, il en existe encore une autre entre les voies sur lesquelles se fait la translation. Sur tous les chemins de fer actuels, les rails sont à double champignon. Ils diffèrent par quelques détails, suivant les Compagnies, mais reçoivent tous sur le champignon supérieur (*fig.* 1) le contact du bandage, et latéralement, mais d'un côté seulement, le contact du boudin quand il a lieu.

Les rails de tramways sont tout différents. Ils reposent sur des longuerines en bois. Ils présentent (*fig.* 2) en dessus deux plats d'inégale largeur, séparés par une rainure assez étroite. Le bandage court sur le plat le plus large, le boudin se meut dans la rainure; le second plat n'est que le sommet d'une petite cloison qui limite la rainure, elle est légèrement plus large que le boudin n'est épais, ce qui permet à la roue, dans certains cas, de se placer un peu en biais sur le rail. Ce biais est, dans les tournants, la limite de l'obliquité que la roue peut prendre sans être soulevée et sortir de sa position régulière. C'est donc lui qui, quand on néglige l'action de la force centrifuge, limite le tournant au-dessus duquel il importe de maintenir les parties courbes de la voie.

Les roues des tramways sont, comme celles des wagons, calées à demeure sur l'essieu, et les portées tournent dans des boîtes à huile.

Soient (*fig.* 3) ρ' le rayon de la roue, mesuré du centre à son contact avec le rail;

ρ le rayon de la roue, mesuré du centre à l'extrême saillie de son boudin;

$s = \rho - \rho'$ est donc la saillie du boudin sur le bandage, saillie moindre que la profondeur de la rainure;

e l'épaisseur du boudin;

f la largeur de la rainure dans laquelle il s'engage;

$2l$ la longueur de la corde suivant laquelle le plan horizontal du rail coupe la circonférence extérieure du boudin.

On a

(1) $$l^2 = \rho^2 - \rho'^2 = (\rho + \rho')s.$$

Soient (*fig.* 4) r le rayon de la circonférence intérieure de la rainure dans laquelle le boudin se meut dans le sens de la flèche ;

R le rayon de la circonférence extérieure de cette rainure.

Une rainure pareille existe concentriquement à gauche formant la seconde partie de la voie.

D'après la signification donnée précédemment à f on a

$$R = r + f.$$

2D la distance, ou écartement des deux essieux mesuré d'axe en axe.

Représentons par un rectangle (celui couvert de hachures) long de $2l$, large de e, la section du boudin d'une roue engagée d'une hauteur s dans la rainure. Ce rectangle touche par un de ses angles la face gauche de cette rainure, par un autre la face droite. Ceci répond à la position limite de la roue. Car si, pour une raison quelconque, le petit rectangle, posé en biais dans la rainure, n'y trouvait plus une place suffisante, la roue tendrait à s'élever et à dérailler.

Dans la seconde rainure, à gauche de la figure, et parallèlement au premier rectangle, on en a placé un deuxième représentant la section du boudin de la roue calée sur le même essieu que la première. Observons que ce second rectangle ne doit toucher que la face extérieure de la rainure.

Par le centre menons un rayon OC parallèle à l'essieu. Cette ligne coupera par son milieu, à égale distance des deux essieux, la longueur de la voiture qui est symétrique. Le second et ses

deux roues seraient en dessous de la ligne OC et placés semblablement.

Menons du centre O, le rayon r aboutissant à l'angle inférieur droit du petit rectangle ; et le rayon R aboutissant à l'angle supérieur gauche de ce rectangle, faisons

$$AO = p.$$

On aura

$$OB = p + e, \qquad OB - AO = e.$$

Dans les triangles rectangles ainsi déterminés, on a :

$$r^2 = (D - l)^2 + p^2,$$
$$(r + f)^2 = (D + l)^2 + (p + e)^2.$$

En éliminant P entre ces deux équations, élevant celle obtenue au carré, pour faire disparaître un radical, on a

$$[2rf + (f^2 - e^2 - 4Dl)]^2 = 4e^2[r^2 - (D - l)^2],$$

qui, ordonnée par rapport à r, devient

$$(f^2 - e^2)r^2 + f(f^2 - e^2 - 4Dl)r + \tfrac{1}{4}(f^2 - e^2 - 4Dl)^2 + e^2(D - l)^2 = 0,$$

équation qui n'est que du second degré, et qui donne pour la valeur de r :

$$(2)\, r = -\frac{f}{2}\left(1 - \frac{4Dl}{f^2 - e^2}\right) \pm \frac{e}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{4Dl}{f^2 - e^2}\right)^2 - \frac{4}{f^2 - e^2}(D - l)^2}.$$

On en déduira la valeur de r pour un cas donné. La largeur de la voie étant connue, on aura facilement le rayon moyen de la voie circulaire au-dessus duquel il faudra se tenir avec un matériel déterminé.

A Bordeaux, la section de la rainure n'est pas absolument rectangulaire. Les angles du fond sont arrondis ainsi que ceux d'en haut. Les côtés des joues sont légèrement évasés, et les boudins arrondis à la périphérie. A l'état normal il s'en faut de 0^m007 qu'ils ne touchent le fond de la rainure. Cela permet aux roues de rouler sur les corps peu résistants qui peuvent se

trouver dans cette rainure, et de se soulever un peu s'ils sont plus volumineux et plus durs.

La largeur de la rainure, à la hauteur où le boudin vient à son contact, est de 0^m027, et le boudin a lui-même vis-à-vis ce point 0^m012 de large, ce qui laisse à ses mouvements latéraux un jeu de 0^m015. Avec ces explications, et en relevant sur le matériel les dimensions qui entrent dans la formule, on peut poser

$$\rho = 0^m39, \qquad \rho' = 0^m375, \qquad s = 0^m015,$$
$$e = 0^m012, \qquad f = 0^m027, \qquad 2D = 1^m70.$$

Pour faciliter le mouvement dans les coudes, les fusées d'essieu ont dans les boîtes à huile un jeu de 0^m0075. Avec ces dimensions et cette disposition, les ingénieurs de la Compagnie estiment que son matériel peut parcourir, sans danger, des courbes de 15 mètres de rayon.

Introduisant les valeurs de ρ, ρ' et s dans l'équation (1) on a

$$l = 0^m10715.$$

Avec cette valeur et celles de e, f et D, l'équation (2) donne

$$r = 8^m418 \pm 3^m723,$$

qui doit être pris avec le signe $+$, celle ainsi obtenue étant la plus grande des deux. On a donc

$$r = 12^m141.$$

Avec l'écartement des rails, qui est, comme dans les grands chemins de fer, de 1^m44 de rainure en rainure et de dehors en dehors, le rayon moyen de la plus petite courbure de voie est

$$12^m141 + 0^m72 = 12^m86.$$

Tel est le rayon de courbure au-dessus duquel le calcul indique qu'il faut se tenir quand on néglige le jeu des fusées. On a vu que les ingénieurs, ayant égard à cette dernière circonstance, n'atteignent pas cette limite, qu'ils fixent à 15 mètres. Notre formule coïncide donc avec leurs appréciations dans la latitude d'exactitude que comporte ce genre de recherches.

En désignant par P le poids du véhicule avec sa charge, la force centrifuge, qui le sollicite dans le sens du prolongement du rayon, est

$$M\omega^2 r = \frac{P}{g}\omega^2 r,$$

M étant la masse du véhicule, laquelle est égale à son poids divisé par l'intensité g de la pesanteur, qui est

$$g = 9^m808.$$

r est connu. On a vu que

$$\omega r = 2^m20;$$

on aura donc pour la force centrifuge

$$M\omega^2 r = 0,0406P.$$

Le bandage qui roule sur le rail a avec lui une certaine adhérence, et pour déterminer la roue à prendre un mouvement dans le sens perpendiculaire à la translation, la force centrifuge devra vaincre cette résistance, ou mieux le frottement qui en résulte.

A notre connaissance, aucune expérience n'a été faite pour déterminer le coefficient à employer en pareil cas.

Prenons le plus faible de tous ceux donnés dans les aide-mémoires. Il est de 0^m04 pour les surfaces métalliques onctueuses, bien dressées et roulant l'une sur l'autre, conditions qui ne sont pas ici remplies. On peut donc le croire trop faible. Par conséquent la résistance opposée par le frottement à l'action de la force centrifuge est très probablement plus forte que

$$0,04P,$$

chiffre à très peu près égal à cette force elle-même.

Nos tramways sont donc établis dans de bonnes conditions de sécurité, et il n'y a pas lieu de s'occuper de la résistance des boudins.

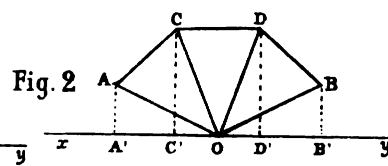
Dans les courbes des grandes lignes ferrées, les rails sont

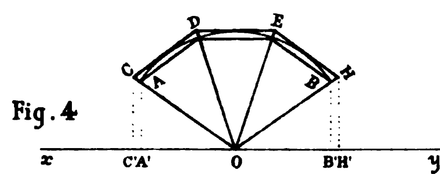
disposés pour que la voie ait une certaine inclinaison vers le centre de l'arc de courbe. C'est dans le but de mieux faire résister le wagon à l'action de la force centrifuge. D'après ce qui précède, ce soin serait superflu pour nos tramways. Cependant, il nous a semblé, autant qu'on peut en juger à la simple vue, que les ingénieurs avaient, mais à un moindre degré, pris cette précaution dans les petits tournants. Ce serait une garantie de plus contre les déraillements.

Août 1880.

---

e la Sphère





REFLEXIONS

SUR

LA MESURE DU VOLUME DE LA SPHÈRE

PAR M. L. SALTEL

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Ce n'est pas aimer la vérité que de ne l'aimer que flatteuse et agréable ; il faut l'aimer âpre et dure, affligeante et sévère ; il faut en aimer les épines et les blessures. (MONTAIGNE.)

Les mathématiques sont l'honneur de l'esprit humain. (LEIBNITZ.)

Dans les traités classiques [1], on détermine la mesure du volume de la sphère au moyen de la connaissance de l'*aire* d'une surface courbe, engendrée par une ligne brisée régulière tournant autour d'un axe situé dans son plan et passant par son centre.

Cette méthode laisse à désirer au point de vue logique.

Afin de nous en rendre parfaitement compte, prenons les choses d'un peu haut.

Mesurer une grandeur, c'est chercher combien de fois et parties aliquotes de fois cette grandeur en contient une autre de même espèce, prise arbitrairement, et appelée unité.

Pour qu'une grandeur soit mesurable il faut donc :

1° Qu'on puisse concevoir une portion de cette grandeur comme identique à l'unité choisie ou à l'une de ses parties aliquotes ;

2° Que la *somme* de deux portions reconnues comme la précédente identiques à l'unité, soit une nouvelle grandeur bien définie de même espèce que la proposée.

Ajoutons que, l'unité étant arbitraire, il faut nécessairement que les portions en question puissent être prises aussi petites

---

[1] Legendre, Catalan, Rouché, Amiot, etc.

qu'on voudra, et il est clair que si cette partie aliquote de l'unité a été prise assez petite, la grandeur mesurée pourra être conçue comme la somme d'un certain nombre d'unités, ou comme la somme d'un certain nombre d'unités augmentée d'un reste aussi petit qu'on voudra. Lorsque ce dernier cas se présente, *quelque petite que soit l'unité choisie*, la mesure de la quantité est représentée par un nombre limite *incommensurable* existant nécessairement si les deux conditions énoncées sont vérifiées.

D'après cela, on peut *toujours* se proposer de mesurer :

1° Une ligne droite avec une ligne droite; 2° un arc de cercle avec un arc de même rayon; 3° une surface plane avec un carré (1); *4° un volume quelconque avec un cube; 5° une surface sphérique avec une surface de même rayon.*

Mais cela n'a pas de *sens* de vouloir mesurer :

1° Une circonférence avec une ligne droite; 2° une circonférence avec un arc de rayon différent; 3° une surface courbe avec un carré; 4° une surface sphérique avec une surface de rayon différent.

Pourtant les géomètres ayant remarqué ces deux théorèmes :

THÉORÈME I. — *Le périmètre d'une ligne polygonale inscrite dans un arc de courbe quelconque* A *et limitée aux extrémités de cet arc, tend vers une limite déterminée* L *lorsque tous ses côtés tendent vers zéro; cette limite est d'ailleurs indépendante de la loi suivant laquelle décroissent les côtés de la ligne brisée;*

THÉORÈME II. — *Si l'on considère une portion* P *de surface courbe quelconque, limitée par un contour* C, *il y a une limite déterminée* S *pour l'aire d'une surface polyédrale à faces triangulaires, inscrite dans cette surface et limitée par une ligne polygonale inscrite dans le contour* C. *Cette limite* S *est indé-*

---

(1) Lorsque la surface à mesurer est incommensurable avec le carré, pour l'obtenir avec une approximation donnée, aussi grande que l'on veut, ou fait usage de ce théorème :

La différence des aires de deux polygones inscrits et circonscrits à une courbe peut devenir aussi petite que l'on veut, le nombre des côtés de ces polygones étant suffisamment grand.

pendante de la loi suivant laquelle décroissent les faces de la surface polyédrale.

On est *convenu* d'attribuer aux mots *longueur* d'une ligne courbe, et *aire* d'une surface courbe, mots jusque-là dénués de *sens,* les propriétés suivantes :

1° La *longueur* de A sera la limite L;

2° L'*aire* de P sera la limite S.

On le voit, tandis que les *définitions* de la mesure d'une *aire plane*, du *volume* d'un corps quelconque ne présentent aucune peine pour être comprises, les définitions de la *longueur* d'une ligne courbe et de l'*aire* d'une surface également courbe offrent une assez grande difficulté à être saisies et une *très grande* difficulté à être légitimées, attendu que les démonstrations rigoureuses des théorèmes I et II exigent, pour être présentées dans toute leur généralité, le secours du calcul infinitésimal. Dans le cas d'un arc de cercle, on peut cependant, ajoutons-le, en prenant une définition moins générale, substituant des lignes régulières à des lignes brisées quelconques, donner une démonstration *élémentaire* du théorème I. C'est encore dans l'impossibilité de pouvoir présenter une démonstration élémentaire du théorème II que l'on donne dans les cours de géométrie trois définitions différentes pour l'aire du cône, du cylindre et de la sphère. Ainsi, par *définition :*

1° On appelle mesure de la surface latérale d'un cône de révolution, la limite vers laquelle tend la surface latérale d'une pyramide régulière inscrite, lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment;

2° On appelle mesure de la surface latérale d'un cylindre, la limite vers laquelle tend la surface latérale d'un prisme régulier inscrit, lorsque le nombre de ses faces augmente indéfiniment;

3° On appelle mesure de la surface de la sphère, la limite vers laquelle tend la surface engendrée par une ligne brisée, régulière, inscrite dans un demi grand cercle, tournant autour du diamètre, lorsque le nombre des côtés augmente indéfiniment.

D'après ces considérations préliminaires, il est manifeste que s'il était possible, dans la recherche de la mesure du *volume* d'un corps, en particulier de la sphère, de se priver *entièrement* de la notion si *délicate* à un double point de vue, de l'*aire* d'une surface courbe, on aurait une solution *logiquement* préférable à la solution habituelle.

C'est cette pensée qui nous a suggéré la démonstration suivante :

Lemme. — *Le volume engendré par un triangle isocèle* AOB *tournant autour d'un axe* XY *situé dans son plan et passant par son sommet* O, *a une mesure double du volume du cône ayant pour rayon de base la hauteur du triangle isocèle, et pour hauteur la projection de la base du même triangle sur l'axe de rotation.*

Soient A′, B′ (*fig.* 1) les projections des points A, B sur l'axe, et I le milieu de AB.

La question est de prouver que

$$(1) \qquad \text{vol AOB} = \frac{2}{3}\pi\overline{OI}^2 \times A'B'.$$

Désignons par D le point où le côté AB prolongé vient rencontrer l'axe. On a évidemment :

$$(2) \qquad \text{vol AOB} = \text{vol AOD} - \text{vol BOD}.$$

Calculons séparément les volumes AOD et BOD.

Pour cela, observons que

$$(3) \qquad \text{vol AOD} = \text{vol AA'D} - \text{vol AOA'};$$

mais on a

$$(4) \qquad \text{vol AA'D} = \frac{\pi}{3}\overline{AA'}^2 \times A'D,$$

$$(5) \qquad \text{vol AOA'} = \frac{\pi}{3}\overline{AA'}^2 \times A'O,$$

donc en substituant dans (3), il vient

$$(6) \qquad \text{vol AOD} = \frac{\pi}{3}\overline{AA'}^2(A'D - A'O) = \frac{\pi}{3}\overline{AA'}^2 \times OD.$$

On trouverait de même

(7) $$\text{vol BOD} = \frac{\pi}{3} \overline{BB'}^2 \times OD,$$

en observant que

(8) $$\text{vol BOD} = \text{vol OBB}' + \text{vol DBB}'.$$

Dès lors, l'égalité (2) donne

(9) $$\text{vol AOB} = \frac{\pi}{3} \overline{AA'}^2 \times OD - \frac{\pi}{3} \overline{BB'}^2 \times OD = \frac{\pi}{3} \times OD(\overline{AA'}^2 - \overline{BB'}^2),$$

ou bien

(10) $$\text{vol AOB} = \frac{\pi}{3} \times OD \times (AA' + BB')(AA' - BB').$$

Menons la parallèle BE à l'axe de rotation et la perpendiculaire II' sur ce même axe. On a évidemment :

(11) $$AA' - BB' = AE,$$

(12) $$AA' + BB' = 2II';$$

l'égalité (10) peut donc s'écrire

(13) $$\text{vol AOB} = \frac{2\pi}{3} \times OD \times II' \times AE.$$

Mais les triangles rectangles AEB, OID, ayant les angles aigus ABE, ODI égaux, sont semblables. On a donc

(14) $$\frac{AE}{OI} = \frac{AB}{OD}$$

ou

(15) $$AE \times OD = OI \times AB;$$

d'après cela, l'égalité (13) devient

(16) $$\text{vol AOB} = \frac{2\pi}{3} \times II' \times OI \times AB.$$

Transformons encore cette nouvelle expression. A cet effet considérons les deux triangles semblables OII', AEB qui donnent

(17) $$\frac{OI}{AB} = \frac{II'}{EB}$$

ou

(18) $$\mathrm{OI} \times \mathrm{EB} = \mathrm{II}' \times \mathrm{AB};$$

substituant dans (16), il vient

(19) $$\mathrm{vol\,AOB} = \frac{2\pi}{3} \times \mathrm{EB} \times \overline{\mathrm{OI}}^2;$$

mais

(20) $$\mathrm{EB} = \mathrm{A'B'},$$

donc enfin

$$\mathrm{vol\,AOB} = \frac{2\pi}{3} \times \mathrm{A'B'} \times \overline{\mathrm{OI}}^2,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nota. — On se rend compte sans peine que le théorème subsiste si l'un des côtés du triangle isocèle se confond avec l'axe de rotation, ou bien si la base du même triangle est parallèle au même axe.

Corollaire. — *Le volume engendré par un secteur polygonal régulier* AOB (*fig.* 2) *de n côtés, tournant autour d'un axe* XY *situé dans son plan et passant par son centre* O, *a une mesure double de celle du volume d'un cône ayant pour rayon de base l'apothème du secteur, et pour hauteur la projection du périmètre de la base du secteur sur l'axe de rotation.*

Joignons le centre à tous les sommets de la base du secteur, projetons ces sommets sur l'axe, et appelons R_n l'apothème de cette base. On a, d'après le théorème précédent,

$$\mathrm{vol\,AOC} = \frac{2\pi}{3} \times R_n^2 \times \mathrm{A'C'},$$

$$\mathrm{vol\,COD} = \frac{2\pi}{3} \times R_n^2 \times \mathrm{C'D'},$$

$$\mathrm{vol\,DOB} = \frac{2\pi}{3} \times R_n^2 \times \mathrm{D'B'};$$

en ajoutant ces égalités membre à membre, il vient :

$$\mathrm{vol\,OABCD} = \frac{2\pi}{3} \times R_n^2 \times \mathrm{A'B'},$$

ce qu'il fallait démontrer.

DÉFINITION. — On appelle *secteur sphérique* le corps engendré par un *secteur circulaire* AOB (*fig.* 3) tournant autour d'un axe XY situé dans son plan et passant par son centre.

THÉORÈME. — *Le volume engendré par un secteur circulaire* AOB *tournant autour d'un axe* XY *situé dans son plan et passant par son centre* O, *a une mesure double de celle du volume d'un cône ayant pour rayon de base le rayon du secteur, et pour hauteur la projection de la base du même secteur sur l'axe de rotation.*

Soient A', B' (*fig.* 4) les projections des points A, B sur l'axe XY, et R le rayon du secteur. La question est de prouver que

$$\text{vol AOB} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times A'B'.$$

Inscrivons et circonscrivons à l'arc AB une ligne brisée régulière de n côtés. Joignons les sommets au centre O, et désignons par

$$R_n, \quad R, \quad R'_n$$

les apothèmes du secteur polygonal inscrit, du secteur sphérique, et du secteur polygonal circonscrit.

On a évidemment, quel que soit n,

$$\text{vol.sect.poly.AOB} < \text{vol.sect.sph.AOB} < \text{vol.sect.poly.COH}.$$

La mesure du volume du secteur sphérique étant comprise, quel que soit n, entre les deux expressions

$$\frac{2\pi}{3} R_n^2 \times A'B', \qquad \frac{2\pi}{3} R_n'^2 \times C'H',$$

si l'on pouvait prouver que ces deux expressions tendent, pour n infini, vers la même limite, cette limite commune serait évidemment la mesure demandée.

Or, pour n infini, on a

$$R_n = R'_n = R \qquad \text{et} \qquad C'H' = A'B',$$

donc les deux expressions tendent bien vers la limite commune

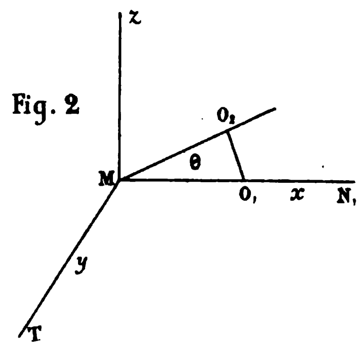
$$\frac{2}{3}\pi R^2 \times A'B',$$

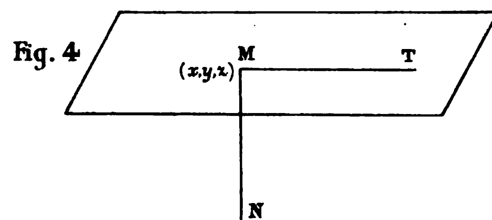
qui représente par là même le volume du secteur sphérique. Ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — Si l'on suppose $A'B' = 2R$, le secteur sphérique se confond avec la sphère et il vient

$$\text{vol. sphère} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times 2R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

cercle osculateur





ÉTUDE

DE LA

VARIATION DU CERCLE OSCULATEUR

en un point M

D'UNE SECTION PLANE D'UNE SURFACE

PAR M. L. SALTEL

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Redoutant, avec raison, que douze années de travaux et de méditations persévérantes ne devinssent pour moi un sujet de ridicule aux yeux de mes camarades et du public géomètre...

....

Cependant, malgré la cruelle maladie que le chagrin d'un déni de justice aussi déloyal m'avait occasionnée, je ne perdis pas entièrement courage. (PONCELET.)

I. — Détermination de la longueur du rayon du cercle osculateur.

Le centre du cercle osculateur en un point M d'une courbe plane Δ est, on le sait, à l'intersection de la normale en ce point et de la normale infiniment voisine.

Il résulte de là qu'en tout point M de la section d'une surface S par un plan P, ce centre peut être déterminé par l'intersection : 1° du plan P; 2° du plan normal en M à Δ; 3° du plan normal infiniment voisin.

C'est en me fondant sur cette simple transformation, prise dans le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 657-658, que je vais présenter la théorie de la variation du cercle osculateur en un point M de la section plane d'une surface [1].

Supposons la courbe Δ définie par les équations

$$F(x,y,z) = 0, \quad (1)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2)$$

---

[1] Le principal avantage de cette méthode sera de pouvoir exposer, si on le désire, aux élèves de mathématiques spéciales, un des chapitres les plus importants de la théorie des surfaces, chapitre relégué jusqu'ici à la fin des cours de calcul différentiel.

et désignons par t une variable indépendante arbitraire dont dépendent les coordonnées de ses divers points.

En dérivant, par rapport à t, ces équations, on obtient

$$(3)\qquad \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dF}{dz}\frac{dz}{dt}=0.$$

$$(4)\qquad A\frac{dx}{dt}+B\frac{dy}{dt}+C\frac{dz}{dt}=0,$$

d'où

$$(5)\qquad \frac{\frac{dx}{dt}}{B\frac{dF}{dz}-C\frac{dF}{dy}}=\frac{\frac{dy}{dt}}{C\frac{dF}{dx}-A\frac{dF}{dz}}=\frac{\frac{dz}{dt}}{A\frac{dF}{dy}-B\frac{dF}{dx}}.$$

Si maintenant on pose

$$(6)\quad N_1=B\frac{dF}{dz}-C\frac{dF}{dy},\quad N_2=C\frac{dF}{dx}-A\frac{dF}{dz},\quad N_3=A\frac{dF}{dy}-B\frac{dF}{dx},$$

le plan normal en $M(x, y, z)$ aura pour équation

$$(7)\qquad (X-x)N_1+(Y-y)N_2+(N-z)N_3=0,$$

et la ligne d'intersection de ce plan avec le plan normal infiniment voisin sera, comme on sait, définie par cette relation et par

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned}&(X-x)\frac{dN_1}{dt}+(Y-y)\frac{dN_2}{dt}+(Z-z)\frac{dN_3}{dt}\\ &\qquad=\frac{dx}{dt}N_1+\frac{dy}{dt}N_2+\frac{dz}{dt}N_3,\end{aligned}\right.$$

ou

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned}&(X-x)\left(\frac{dN_1}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dN_1}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dN_1}{dt}\frac{dz}{dt}\right)\\ &\quad+(Y-y)\left(\frac{dN_2}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dN_2}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dN_2}{dz}\frac{dz}{dt}\right)\\ &\quad+(Z-z)\left(\frac{dN_3}{dx}\frac{dx}{dt}+\frac{dN_3}{dy}\frac{dy}{dt}+\frac{dN_3}{dz}\frac{dz}{dt}\right)\\ &\quad=\frac{dx}{dt}N_1+\frac{dy}{dt}N_2+\frac{dz}{dt}N_3,\end{aligned}\right.$$

ou encore, d'après (5,6)

$$(10)\quad \begin{cases} (X-x)\left(\frac{dN_1}{dx}N_1+\frac{dN_1}{dy}N_2+\frac{dN_1}{dz}N_3\right) \\ \quad +(Y-y)\left(\frac{dN_2}{dx}N_1+\frac{dN_2}{dy}N_2+\frac{dN_2}{dz}N_3\right) \\ \quad +(Z-z)\left(\frac{dN_3}{dx}N_1+\frac{dN_3}{dy}N_2+\frac{dN_3}{dz}N_3\right) \\ \quad =N_1^2+N_2^2+N_3^2. \end{cases}$$

En désignant par α, β, γ les coordonnées du centre du cercle osculateur et exprimant que ce point est dans le plan (2), on a

$$(11)\qquad A\alpha+B\beta+C\gamma+D=0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(12)\qquad A(\alpha-x)+B(\beta-y)+C(\gamma-z)=0,$$

puisque les coordonnées x, y, z vérifient (2).

Dès lors, les coordonnées α, β, γ peuvent être déterminées par cette dernière équation et par les relations

$$(13)\qquad (\alpha-x)N_1+(\beta-y)N_2+(\gamma-z)N_3=0,$$

$$(14)\quad \begin{cases} (\alpha-x)\left(\frac{dN_1}{dx}N_1+\frac{dN_1}{dy}N_2+\frac{dN_1}{dz}N_3\right) \\ \quad +(\beta-y)\left(\frac{dN_2}{dx}N_1+\frac{dN_2}{dy}N_2+\frac{dN_2}{dz}N_3\right) \\ \quad +(\gamma-z)\left(\frac{dN_3}{dx}N_1+\frac{dN_3}{dy}N_2+\frac{dN_3}{dz}N_3\right) \\ \quad =N_1^2+N_2^2+N_3^2, \end{cases}$$

obtenues en remplaçant dans (7,10) X, Y, Z par α, β, γ.

La question est donc de résoudre ces trois équations par rapport à $\alpha-x$, $\beta-y$, $\gamma-z$, et de tirer de là la valeur de R.

Pour cela, observons d'abord qu'il résulte de (12) et (13)

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{\alpha-x}{BN_3-CN_2}=\frac{\beta-y}{CN_1-AN_3}=\frac{\gamma-z}{AN_2-BN_1} \\ \quad =\frac{R}{\sqrt{(BN_3-CN_2)^2+(CN_1-AN_3)^2+(AN_2-BN_1)^2}}, \end{cases}$$

d'où, en substituant dans (14)

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} R \left\{ \begin{aligned} &(BN_3 - CN_2)\left(\frac{dN_1}{dx}N_1 + \frac{dN_1}{dy}N_2 + \frac{dN_1}{dz}N_3\right) \\ &+ (CN_1 - AN_3)\left(\frac{dN_2}{dx}N_1 + \frac{dN_2}{dy}N_2 + \frac{dN_2}{dz}N_3\right) \\ &+ (AN_2 - BN_1)\left(\frac{dN_3}{dx}N_1 + \frac{dN_3}{dy}N_2 + \frac{dN_3}{dz}N_3\right) \end{aligned} \right\} = \\ = (N_1^2+N_2^2+N_3^2)\sqrt{(BN_3-CN_2)^2+(CN_1-AN_3)^2+(AN_2-BN_1)^2}; \end{aligned} \right.$$

mais à cause de

$$(17)\qquad BN_3 - CN_2 = A\left(B\frac{dF}{dy} + C\frac{dF}{dz}\right) - \frac{dF}{dx}(B^2 + C^2),$$

$$(18)\qquad CN_1 - AN_3 = B\left(C\frac{dF}{dz} + A\frac{dF}{dx}\right) - \frac{dF}{dy}(C^2 + A^2),$$

$$(19)\qquad AN_2 - BN_1 = C\left(A\frac{dF}{dx} + B\frac{dF}{dy}\right) - \frac{dF}{dz}(A^2 + B^2),$$

on trouve, en développant les carrés, que le radical de (16) est égal à

$$(20)\qquad \sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)};$$

d'autre part, le premier membre de (16) pouvant s'écrire

$$R \left\{ \begin{aligned} &N_1\left(\frac{dN_1}{dx}(BN_3-CN_2) + \frac{dN_2}{dx}(CN_1-AN_3) + \frac{dN_3}{dx}(AN_2-BN_1)\right) \\ &+ N_2\left(\frac{dN_1}{dy}(BN_3-CN_2) + \frac{dN_2}{dy}(CN_1-AN_3) + \frac{dN_3}{dy}(AN_2-BN_1)\right) \\ &+ N_3\left(\frac{dN_1}{dz}(BN_3-CN_2) + \frac{dN_2}{dz}(CN_1-AN_3) + \frac{dN_3}{dz}(AN_2-BN_1)\right) \end{aligned} \right\},$$

on trouve, en calculant d'après (6), les dérivées partielles $\frac{dN_1}{dx}$, $\frac{dN_2}{dx}$, etc.,

$$R \left\{ \begin{aligned} &N_1(A^2 + B^2 + C^2)\left(N_1\frac{d^2F}{dx^2} + N_2\frac{d^2F}{dx\,dy} + N_3\frac{d^2F}{dx\,dz}\right) \\ &N_2(A^2 + B^2 + C^2)\left(N_1\frac{d^2F}{dy\,dx} + N_2\frac{d^2F}{dy^2} + N_3\frac{d^2F}{dy\,dz}\right) \\ &N_3(A^2 + B^2 + C^2)\left(N_1\frac{d^2F}{dz\,dx} + N_2\frac{d^2F}{dz\,dy} + N_3\frac{d^2F}{dz^2}\right) \end{aligned} \right\},$$

ce qui conduit, après suppression du facteur $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$, à

$$(21)\left\{\begin{aligned} R = \frac{(N_1^2+N_2^2+N_3^2)^{\frac{3}{2}}}{\left\{\begin{aligned}&\sqrt{A^2+B^2+C^2}\Big(N_1^2\frac{d^2F}{dx^2}+N_2^2\frac{d^2F}{dy^2}+N_3^2\frac{d^2F}{dz^2}\\&\quad+2N_1N_2\frac{d^2F}{dx\,dy}+2N_2N_3\frac{d^2F}{dy\,dz}+2N_3N_1\frac{d^2F}{dz\,dx}\Big)\end{aligned}\right.},\end{aligned}\right.$$

où l'on doit remplacer N_1, N_2, N_3 par (6) [1].

II. — Démonstration des théorèmes de Meusnier, d'Euler et de Dupin.

Théorème de Meusnier. — *Si un plan* P *tourne autour de la tangente* MT (*fig.* 1) *en un point* M *d'une surface, le lieu des centres des cercles, qui sont osculateurs au point* M *aux sections planes correspondantes, est un cercle dont le plan est perpendiculaire sur la tangente et ayant pour diamètre le rayon du cercle osculateur de la section normale; en d'autres termes, si* MN_1 *et* MN_2 *sont les normales de deux sections et si* O_1 *désigne le centre du cercle osculateur de la section normale, on obtient celui de la section* TN_2 *en projetant* O_1 *sur* MN_2.

Prenons pour origine le point M, pour axe des y la tangente MT (*fig.* 2) et pour plan des yz le plan tangent. Dans ces conditions, l'axe des x se trouve être la normale à la surface et fait avec la trace du plan P sur le plan des zx un angle θ égal à l'angle du plan P avec le plan normal passant par la tangente.

Ces hypothèses exigent que l'on suppose

$$x=y=z=0;\ D=0,\ B=0;\ \frac{dF}{dy}=0,\ \frac{dF}{dz}=0\ \text{[2]};$$
$$N_1=0,\ N_2=C\frac{dF}{dx},\ N_3=0,$$

---

[1] Pour obtenir les coordonnées du centre du cercle osculateur, il suffit d'observer que, d'après (20 et 21), le dernier rapport de (15) peut s'écrire

$$\frac{N_1^2+N_2^2+N_3^2}{(A^2+B^2+C^2)\left(N_1^2\frac{d^2F}{dx^2}+N_2^2\frac{d^2F}{dy^2}+N_3^2\frac{d^2F}{dz^2}+2N_1N_2\frac{d^2F}{dx\,dy}+2N_2N_3\frac{d^2F}{dy\,dz}+2N_3N_1\frac{d^2F}{dz\,dx}\right)}$$

[2] On obtient ces deux dernières conditions en observant que l'équation du plan tangent à l'origine

$$X\frac{dF}{dx}+Y\frac{dF}{dy}+Z\frac{dF}{dz}=0$$

doit se réduire à

$$X=0.$$

la formule (21) donne, après réductions,

$$R = \frac{C\dfrac{dF}{dx}}{\sqrt{A^2+C^2}\,\dfrac{d^2F}{dyz}};$$

et comme

$$\cos\theta = \frac{C}{\sqrt{A^2+C^2}},$$

on a

$$R = K\cos\theta,$$

K étant une constante; ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME D'EULER. — *Si l'on suppose (fig. 3) qu'un plan* P *tourne autour de la normale* MN *en un point* M *d'une surface et que l'on porte, à partir de* M, *sur l'intersection* MI *du plan de chaque section avec le plan tangent en* M *une longueur* ML *égale à la racine carrée du rayon du cercle osculateur de cette section, le lieu des extrémités de ces rayons vecteurs est une conique ayant le point* M *pour centre.*

Supposons encore (*fig.* 3) que l'axe des x représente toujours la normale à la surface au point M, mais que les axes My, Mz soient deux droites rectangulaires quelconques situées dans le plan tangent.

Ici on aura

$$x=y=z=0;\ D=0,\ A=0;\ \frac{dF}{dy}=0,\ \frac{dF}{dz}=0;$$

$$N_1=0,\ N_2=C\frac{dF}{dx},\ N_3=-B\frac{dF}{dx},$$

ce qui donne, après réductions,

$$R = \frac{(B^2+C^2)\dfrac{dF}{dx}}{C^2\dfrac{d^2F}{dy^2}+B^2\dfrac{d^2F}{dz^2}-2BC\dfrac{d^2F}{dy\,dz}}.$$

Désignant par β et γ les angles que fait la trace MI du plan P avec le plan yz, on a

$$\cos\beta = \frac{B}{\sqrt{B^2+C^2}}, \qquad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{B^2+C^2}},$$

donc

$$R = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{d^2F}{dy^2}\cos^2\gamma + \frac{d^2F}{dz^2}\cos^2\beta - 2\frac{d^2F}{dy\,dz}\cos\beta\cos\gamma}$$

ou

$$R = \frac{1}{P\cos^2\beta + Q\cos^2\gamma - 2R\cos\beta\cos\gamma},$$

P, Q, R désignant des quantités constantes lorsque le plan de la section tourne autour de la normale Mx.

Or, si l'on considère la conique auxiliaire Σ représentée par

$$PY^2 + QZ^2 - 2RYZ = 1,$$

on obtient, en la coupant par MI, c'est-à-dire par la droite ayant pour équation

$$\frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma} = \rho,$$

la formule

$$\rho^2 = \frac{1}{P\cos^2\beta + Q\cos^2\gamma - 2R\cos\beta\cos\gamma};$$

donc

$$R = \rho^2, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = \sqrt{R},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

Remarque. — Il résulte de là que l'on peut appliquer à la théorie de la variation des rayons des diverses sections normales tous les résultats connus pour les rayons centraux d'une conique. On doit surtout observer l'existence nécessaire de deux sections normales perpendiculaires entre elles telles que pour l'une d'elles le rayon de courbure est minimum et pour l'autre maximum; ces sections, qui correspondent aux deux axes de la conique Σ, sont appelées *sections principales*. Ajoutons que l'équation de Σ montre que la

condition nécessaire et suffisante pour que les axes des y et des z coïncident avec les *directions principales* est que l'on ait

$$R = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)_{x=y=z=0} = 0.$$

Définition. — On appelle ligne de courbure d'une surface une ligne le long de laquelle la tangente en chacun de ses points coïncide avec l'une des deux tangentes principales en ce point.

THÉORÈME DE DUPIN. — *Si l'on a trois systèmes de surfaces*

$$F_1(x, y, z) = \rho_1,$$
$$F_2(x, y, z) = \rho_2,$$
$$F_3(x, y, z) = \rho_3,$$

tels qu'en donnant aux trois paramètres arbitraires ρ_1, ρ_2, ρ_3 *des valeurs quelconques, ces surfaces se coupent toujours à angle droit en leurs points communs* (c'est-à-dire qu'en ces points communs les trois plans tangents forment un trièdre trirectangle), *on peut affirmer que chacune d'elles est rencontrée par les deux autres suivant des lignes de courbure.*

Ce théorème se démontre tout de suite en transportant l'origine en un point commun aux trois surfaces, prenant pour plans coordonnés les trois plans tangents et observant : 1° que les équations de ces surfaces sont encore nécessairement de la forme

$$\varphi_1(x, y, z) = \rho_1,$$
$$\varphi_2(x, y, z) = \rho_2,$$
$$\varphi_3(x, y, z) = \rho_3,$$

et se coupent toujours orthogonalement en leurs points communs quelles que soient les valeurs attribuées à ρ_1, ρ_2, ρ_3; 2° en se rappelant que la condition nécessaire et suffisante pour que les axes des y et des z coïncident avec les *directions principales* est que l'on ait

$$\left(\frac{d^2F}{dy\,dz}\right)_{x=y=z=0} = 0. \qquad [1]$$

[1] Pour plus de développements, voir le *Traité de Calcul différentiel* de M. Bertrand, p. 709.

III. — Calcul des éléments de la courbure d'une surface en un quelconque de ses points.

Soit toujours M (*fig.* 4) un point de la surface, MN la normale et MT une tangente quelconque faisant avec les axes des angles α, β, γ.

Proposons-nous d'abord de déterminer les coefficients de

$$\text{(22)} \qquad AX + BY + CZ + D = 0$$

pour que cette équation représente le plan passant par MT et par la normale MN. Il suffit d'exprimer que ce plan contient le point (x, y, z) et est parallèle à la tangente MT et à la normale MN. On obtient les conditions

$$\begin{gathered} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma = 0, \\ A\frac{dF}{dx} + B\frac{dF}{dy} + C\frac{dF}{dz} = 0, \end{gathered}$$

ce qui donne pour l'équation du plan

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\begin{aligned} X\left(\frac{dF}{dz}\cos\beta - \frac{dF}{dy}\cos\gamma\right) + Y\left(\frac{dF}{dx}\cos\gamma - \frac{dF}{dz}\cos\alpha\right) \\ + Z\left(\frac{dF}{dy}\cos\alpha - \frac{dF}{dx}\cos\beta\right) \\ + \begin{vmatrix} x & y & z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{dF}{dx} & \frac{dF}{dy} & \frac{dF}{dz} \end{vmatrix} = 0; \end{aligned}$$

donc

$$A=\frac{dF}{dz}\cos\beta-\frac{dF}{dy}\cos\gamma,\qquad B=\frac{dF}{dx}\cos\gamma-\frac{dF}{dz}\cos\alpha,$$
$$C=\frac{dF}{dy}\cos\alpha-\frac{dF}{dx}\cos\beta;$$

ces valeurs, substituées dans (6), donnent

$$N_1=\frac{dF}{dx}\left(\frac{dF}{dz}\cos\gamma+\frac{dF}{dy}\cos\beta\right)-\cos\alpha\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2\right],$$
$$N_2=\frac{dF}{dy}\left(\frac{dF}{dx}\cos\alpha+\frac{dF}{dz}\cos\gamma\right)-\cos\beta\left[\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right],$$
$$N_3=\frac{dF}{dz}\left(\frac{dF}{dy}\cos\beta+\frac{dF}{dx}\cos\alpha\right)-\cos\gamma\left[\left(\frac{dF}{dz}\right)^2+\left(\frac{dF}{dx}\right)^2\right],$$

ce qui permet de vérifier, sans peine, comme pour (20), que

$$N_1^2+N_2^2+N_3^2=\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right](A^2+B^2+C^2),$$

d'où

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2}=\frac{(N_1^2+N_2^2+N_3^2)^{\frac{1}{2}}}{\left[\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}};$$

substituant cette dernière valeur dans (21), on a

$$(23)\quad R=\frac{(N_1^2+N_2^2+N_3^2)\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2+\left(\frac{dF}{dy}\right)^2+\left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}{\left\{\begin{array}{l}N_1^2\frac{d^2F}{dx^2}+N_2^2\frac{d^2F}{dy^2}+N_3^2\frac{d^2F}{dz^2}+2N_1N_2\frac{d^2F}{dx\,dy}+2N_2N_3\frac{d^2F}{dy\,dz}\\ \quad+2N_3N_1\frac{d^2F}{dz\,dx}\end{array}\right.},$$

relation homogène en N_1 N_2 N_3.

La tangente MT ayant pour équations

$$(X-x)A+(Y-y)B+(Z-z)C=0,$$
$$(X-x)\frac{dF}{dx}+(Y-y)\frac{dF}{dy}+(Z-z)\frac{dF}{dz}=0,$$

on en déduit

$$\frac{\cos\alpha}{N_1} = \frac{\cos\beta}{N_2} = \frac{\cos\gamma}{N_3};$$

la formule (23) peut donc s'écrire en définitive :

$$(24)\quad R = \frac{\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}}{\left\{\begin{array}{l}\cos^2\alpha\frac{d^2F}{dx^2} + \cos^2\beta\frac{d^2F}{dy^2} + \cos^2\gamma\frac{d^2F}{dz^2} + 2\cos\alpha\cos\beta\frac{d^2F}{dx\,dy} \\ \quad + 2\cos\beta\cos\gamma\frac{d^2F}{dy\,dz} + 2\cos\gamma\cos\alpha\frac{d^2F}{dz\,dx}\end{array}\right.}$$

ou

$$(25)\quad R = \frac{1}{\left\{\begin{array}{l}a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma + 2d\cos\alpha\cos\beta + 2e\cos\beta\cos\gamma \\ \quad + 2f\cos\gamma\cos\alpha\end{array}\right.}\ (^1),$$

les angles α, β, γ étant assujettis aux seules conditions :

$$(26)\qquad \frac{dF}{dx}\cos\alpha + \frac{dF}{dy}\cos\beta + \frac{dF}{dz}\cos\gamma = 0,$$

$$(27)\qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

exprimant que la droite MT est située dans le plan tangent.

Pour interpréter ces relations, considérons la conique définie par les deux équations

$$\begin{cases} (28)\quad aX^2 + bY^2 + cZ^2 + 2dXY + 2eYZ + 2fZX = 0, \\ (29)\quad X\frac{dF}{dx} + Y\frac{dF}{dy} + Z\frac{dF}{dz} = 0, \end{cases}$$

et coupons-la par la droite

$$\frac{X}{\cos\alpha} = \frac{Y}{\cos\beta} = \frac{Z}{\cos\gamma} = \rho.$$

(1) En désignant les rapports de $\frac{d^2F}{dx^2}$, $\frac{d^2F}{dy^2}$, etc., à $\sqrt{\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dz}\right)^2}$ par a, b, c, d, e,

on obtient

$$\rho^2 = \frac{1}{\left\{\begin{array}{l} a\cos^2\alpha + b\cos^2\beta + c\cos^2\gamma + 2d\cos\alpha\cos\beta + 2e\cos\beta\cos\gamma \\ \quad + 2f\cos\gamma\cos\alpha, \end{array}\right.}$$

$$\cos\alpha\frac{dF}{dx} + \cos\beta\frac{dF}{dy} + \cos\gamma\frac{dF}{dz} = 0;$$

donc

$$\rho^2 = R;$$

de là ce théorème :

Le problème de la recherche des rayons de courbure principaux et des directions principales en un point (x, y, z) *de la surface* (1) *est exactement le même que celui qui consiste à chercher la longueur et les directions des axes de la section centrale de la surface du second ordre, représentée par* (28), *par le plan* (29).

Nota. — Ce problème étant traité dans les cours de mathématiques spéciales, je crois inutile de reproduire des résultats connus. Je terminerai en faisant observer que si l'on suppose la surface (1) mise sous la forme

$$z = \varphi(x, y),$$

la formule (24) se réduit à la formule des Traités classiques :

$$R = \frac{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}{r\cos^2\alpha + 2s\cos\alpha\cos\beta + t\cos^2\beta}.$$

Combefouillouse, près d'Espalion, le 25 octobre 1880.

DE LA SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

DES

PROBLÈMES DU SECOND DEGRÉ

AVANT EUCLIDE

PAR M. PAUL TANNERY

---

1. Si nous nous proposons de parler de la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide, il est clair cependant que ce n'est que dans l'œuvre de ce dernier que nous pouvons trouver l'exposition de cette solution. Nous diviserons donc notre étude en trois parties : la première contiendra cette exposition ; la seconde établira que la solution remonte sinon à Pythagore, du moins à ses disciples immédiats ; la troisième abordera les rapports entre la solution géométrique et la solution arithmétique, qui, dans notre opinion du moins, doit remonter à la même époque.

I

DÉTAIL DE LA SOLUTION

2. Quand nous parlons d'un problème du second degré, nous sommes conduits immédiatement, par nos habitudes d'éducation, à nous représenter l'équation générale :

$$x^2 + px + q = 0.$$

Si maintenant nous pensons à sa solution par les Grecs, comme nous savons qu'ils ne possédaient pas le concept des quantités négatives, nous faisons varier les signes autant de fois qu'il est

nécessaire pour éviter l'emploi de ce concept. Nous obtenons ainsi les trois cas :

(1) $$x^2 + px = q,$$

(2) $$x^2 = px + q,$$

(3) $$px = x^2 + q.$$

Mais nous sommes loin de nous replacer ainsi dans la position originaire des Grecs vis-à-vis de ces problèmes; car ils ne partaient point d'une équation générale, mais bien des cas particuliers, et une relation analogue à (1) (2) (3) étant donnée, ils devaient, surtout géométriquement, s'énoncer le problème, non pas sous la forme qui traduirait exactement nos équations, mais sous une tout autre, correspondant à la suivante :

Trouver deux quantités (soit x et $p + x$, soit x et $x - p$) telles que leur différence soit p et leur produit q.

Ou bien :

Trouver deux quantités (soit $p - x$ et x) telles que leur somme soit p et leur produit q.

Ce n'est qu'à un degré postérieur du développement intellectuel qu'apparaît la distinction des trois cas, lorsque le concept de l'équation s'élabore; les problèmes et leur solution sont antérieurs à ce concept, et il n'y a que deux cas, suivant qu'on donne la somme ou la différence des deux inconnues dont le produit est également donné.

En géométrie, lorsque ces problèmes se posent, les inconnues sont d'ailleurs des longueurs, et leur produit est donné sous forme d'une surface. La construction exige la solution de problèmes préliminaires, qui se sont au reste présentés les premiers.

Avant d'exposer comment ces problèmes sont traités dans Euclide, nous devons faire une remarque. Les six premiers livres des *Éléments*, consacrés à la géométrie plane, se divisent en deux groupes bien distincts. Dans les livres I à IV, la notion de rapport se trouve rigoureusement bannie; dans les livres V et VI, les théories sont complétées par l'introduction de cette notion et de celle de la similitude. Sans discuter pour le moment les motifs

de cette distinction, nous nous y conformerons en examinant tout ce qui peut être fait pour la question qui nous occupe sans la notion de rapport, et en second lieu, ce pour quoi elle est nécessaire.

3. Le premier problème de construction à résoudre est le suivant :

Construire un rectangle dont on connaît la surface q et un côté p.

Ce problème, qui dans les *Éléments* (I, 44) devance immédiatement le théorème de Pythagore sur le carré de l'hypoténuse, s'appelait chez les anciens la *parabole* (παραβολὴ παρὰ, comparaison à, application sur) d'une aire q par une droite p. Euclide l'étend du cas d'un rectangle à celui d'un parallélogramme d'angle donné *(parabole sous un angle donné)*, et suppose que l'aire soit donnée sous forme d'un triangle; mais alors il doit construire (I, 42) un parallélogramme de l'angle donné ayant pour côtés la hauteur et la moitié de la base du triangle. Nous pouvons donc admettre que l'aire soit donnée sous forme de rectangle; si elle l'est comme polygone, il faudra la décomposer en triangles et construire successivement sur le côté p les rectangles équivalents aux aires partielles.

En faisant dès lors abstraction, comme nous le ferons pour tout ce qui suit, de la complication venant de l'extension au cas d'angles non droits, le procédé d'Euclide est le suivant :

Soit AB (*fig.* 1) le côté donné p; construisez sur son prolongement le rectangle ACDE égal au rectangle donné; prolongez les côtés DE jusqu'à la rencontre en F avec la perpendiculaire en B à AB, DC jusqu'à sa rencontre en G avec la droite AF. CG sera la longueur du côté cherché, et si l'on achève les rectangles GDFH, ABHI, ce dernier sera le rectangle demandé.

En effet, les triangles FDG, FHG sont égaux; qu'on en retranche de part et d'autre, en premier lieu, les égaux ACG, AIG, en second lieu les égaux AEF, ABF, il reste les rectangles AH, AD égaux.

Ainsi AH construit sur $AB = p$ est bien égal à $AD = q$.

4. Le second livre des *Éléments* est consacré, comme l'on sait, à la constitution d'un algorithme géométrique, c'est-à-dire à l'exposition des relations qui existent entre les surfaces représentant les produits de droites ayant entre elles des relations simples. Les figures des propositions 5 et 6 nous présentent immédiatement la solution des problèmes du second degré.

Soit une droite AB (*fig.* 2), dont le milieu est C, soit sur BC ou son prolongement, un point D quelconque. Je construis sur BC un carré BCEF et dans l'angle E un autre carré HELI, dont le côté soit égal à CD. Il est clair que la diagonale BE passe par le point I, les angles à la base des triangles isoscèles rectangles étant égaux à la moitié d'un droit.

J'achève le rectangle ACLK, BDIM. Comme pour la figure 1, les rectangles CI, IF sont égaux. Le rectangle AI, égal à la somme des deux rectangles AL = CM et CI = IF, sera donc égal à la différence des deux carrés BE, IE construits sur la moitié de AB et sur CD.

Or, la somme ou la différence des côtés AD, DI du rectangle AI est égale à la droite AB; si donc celle-ci étant donnée, soit p, il s'agit de construire ce rectangle de façon que sa surface soit égale à une donnée q, il suffit de savoir trouver le côté CD du carré dont la surface est $\left(\frac{p}{2}\right)^2 \mp q$.

Les anciens appelaient cette construction du rectangle AI faire la *parabole* de la surface q par la droite $p = AB$, en *ellipse* (défaut, *fig.* 2) ou en *hyperbole* (excès, *fig.* 3) d'un carré. Ainsi dans les deux cas, le rectangle des deux côtés cherchés est connu; dans le premier on donne leur somme, dans le second leur différence.

5. Les problèmes du second degré sont ainsi ramenés à la construction d'un carré dont la surface est donnée, et on peut, d'après le problème de la *parabole* simple, supposer qu'elle le soit sous forme d'un rectangle.

Ce problème de la quadrature est résolu comme suit à la fin du livre II des *Éléments* (prop. 14).

Soit ADIK (*fig.* 4) le rectangle donné; je prolonge AD de DB = BI; sur AB comme diamètre, je décris un demi-cercle et je prolonge DI jusqu'à la rencontre en E. DE est le côté du carré cherché.

En effet, d'après la proposition 5 (*fig.* 2), nous avons vu que $AI = \overline{BC}^2 - \overline{CD}^2$. Or, BC = CE et, d'après le théorème de Pythagore, $\overline{CE}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{DE}^2$.

Le livre II renferme en outre la solution d'un problème particulier du second degré (prop. 11). C'est la *section d'or*, division d'une droite en moyenne et extrême raison; mais puisque la notion de rapport n'est pas introduite, le problème posé est de diviser la droite AB de façon que le rectangle qu'elle forme avec l'un des segments soit égal au carré de l'autre segment.

C'est en fait, dans le langage ancien, la *parabole* du carré de la droite par celle-ci, en *hyperbole* d'un carré. Le problème est résolu directement en construisant, d'après le théorème de Pythagore, $\sqrt{\overline{AB}^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$ et prenant CD (*fig.* 3) égal à cette hypoténuse, BD sera égal à l'un des segments de la droite.

En effet, d'après la proposition 6, nous avons vu que $AD \times BD = \overline{CD}^2 - \overline{CB}^2 = \overline{AB}^2$ d'après la construction. D'où, retranchant de part et d'autre $AB \times BD$, $\overline{BD}^2 = AB\,(AB - BD)$.

6. Euclide ne parle de la parabole avec ellipse et hyperbole qu'au livre VI, 28, 29, après avoir introduit la notion de rapport et dès lors donné d'autres solutions du problème de la parabole simple (quatrième proportionnelle, VI, 17), de la quadrature (moyenne proportionnelle, VI, 18), puis enseigné dès lors (VI, 25) à construire un polygone semblable à un polygone donné et de surface donnée.

Le problème général est compliqué en ce que la surface en ellipse ou en hyperbole, c'est-à-dire le parallélogramme BDIM, (*fig.* 2, 3) au lieu d'être en carré, doit être semblable à un parallélogramme donné.

Soit $\frac{p}{l}$ le rapport $\frac{BD}{DI}$, qui est ainsi donné. La construction ne

diffère de celle que nous avons indiquée plus haut qu'en ce que l'on construit CBFE non carré, mais semblable au parallélogramme donné $\left(\text{si BC} = \frac{p}{2}, \text{BF} = \frac{l}{2}\right)$, et le parallélogramme EHIL suivant le même rapport de côtés avec la surface CF $\mp q$, q étant la surface donnée du rectangle AI. On résout ainsi en fait l'équation

$$q = px \mp \frac{p}{l} x^2.$$

On reconnaît l'équation au sommet des coniques, q représentant le carré de l'ordonnée, p le paramètre, l l'axe transverse, le signe — étant pris pour l'ellipse, le signe + pour l'hyperbole. L'abscisse x représente ici pour nous un des deux segments déterminés par le point I sur l'axe transverse qu'on peut supposer mené de D au delà de H; l'une des racines correspondant au rectangle IF prolongé forme d'ailleurs, même au sens grec, une seconde solution pour la parabole avec ellipse, mais non pour la parabole avec hyperbole (racine négative).

Pour la parabole en ellipse d'un carré, le défaut de la solution d'Euclide ne subsiste point, puisque les deux rectangles correspondants sont égaux. Mais, même pour le cas général, il ne faut point exagérer l'importance de ce défaut qui consiste à n'admettre la parabole que si le grand côté du rectangle est appliqué sur la droite p, et dès lors à n'admettre pour l'autre côté x que la plus petite des deux racines. Cette restriction a pu être une conséquence de l'habitude prise pour la parabole avec ellipse d'un carré, et en tout cas Euclide n'ignorait certainement pas qu'à une même ordonnée de la section du cône acutangle (ellipse) correspondaient deux abscisses satisfaisant à la même condition.

7. Dans le livre VI, nous rencontrons encore (prop. 30) le problème de la division en moyenne et en extrême raison, cette fois résolu par la parabole avec hyperbole d'un carré, en application de la proposition 29.

Enfin, dans les *Données*, nous voyons répéter (57, 58, 59) les

problèmes de la parabole simple avec ellipse et hyperbole, puis, comme application (79, 80), déterminer les deux côtés d'un parallélogramme d'angle et de surface donnés, la différence de la somme de ces côtés étant donnée.

Après quoi vient (81) (¹) le problème de trouver deux droites x, y, telles que

$$xy = A, \qquad x^2 = my^2 + B.$$

La solution de ce problème fait voir que si les Grecs n'ont jamais sans doute ignoré qu'à une relation entre lignes correspond une relation entre nombres, puisque chaque ligne a son nombre, ils ne s'étaient point élevés au concept de l'inconnue réellement abstraite, pouvant arbitrairement représenter une ligne, une surface, un volume. Autrement, la solution eût procédé très simplement; si xy est donné, x^2y^2 est donné, et de même mx^2y^2. Mais la différence $x^2 - my^2$ des facteurs de ce produit est également donnée, donc x^2 et my^2 sont donnés, donc, etc.

Euclide recourt à un artifice assez compliqué qu'on peut représenter ainsi : Soit une inconnue auxiliaire z telle que $B = xz$, $\frac{xy}{xz} = \frac{y}{z} = \frac{A}{B}$ est donné; donc $\frac{y^2}{z^2}$. D'autre part, $\frac{x(x-z)}{y^2} = m$ est également donné; donc $\frac{x(x-z)}{z^2}$, donc $\frac{4x(x-z)+z^2}{z^2} = \left(\frac{2x-z}{z}\right)^2$, donc $\frac{2x-z}{z}$, donc $\frac{2x}{z}$, donc $\frac{x}{z} = \frac{xz}{z^2} = \frac{B}{z^2}$, donc z, donc x et y.

Cet exemple nous montre comment pour les équations bicarrées et autres semblables, les Grecs parvenaient à tourner, par une marche pénible mais sûre, les difficultés tenant à leur point de vue trop concret.

8. Mais pour épuiser tout ce que l'on peut rencontrer dans Euclide à ce sujet, nous ne devons pas négliger une autre preuve importante des travaux des Grecs dans ce dernier ordre d'idées. Je veux parler de tout le livre X d'Euclide et de la théorie des irrationnelles qui s'y trouve renfermée; à cause de son inutilité

(¹) Je ne parlerai pas du problème suivant, où l'on suppose simplement $m = 1$, et que ne reconnaît pas Pappus.

actuelle, on ne l'a pas étudiée et on en a méconnu le véritable caractère. Ce n'est rien moins que le détail complet de la solution géométrique de l'équation bicarrée et le commencement de celle de l'équation tricarrée, avec l'invention d'une nomenclature destinée à suppléer au défaut de notations.

Dans tout problème où n'entre qu'une seule longueur arbitraire, cette longueur étant prise pour rationnelle, ainsi que toutes celles qui lui sont commensurables, tout rectangle formé par deux côtés rationnels est également dit rationnel, ainsi que la moyenne proportionnelle de ces deux côtés ou le côté du carré équivalent au rectangle, ἡ ῥητὸν δυναμένη, cette racine fût-elle incommensurable. L'irrationnel en lignes ne commence donc pour Euclide qu'avec le côté d'un carré irrationnel, c'est-à-dire incommensurable; la surface irrationnelle la plus simple est ainsi le *moyen* proportionnel entre deux rectangles rationnels, τὸ μέσον (χωρίον); sa racine (côté du carré équivalent) est l'irrationnelle dite *moyenne*, μέση; c'est ainsi numériquement une racine quatrième irréductible.

Ces termes, indispensables pour la nomenclature qui suit, étant expliqués, nous pouvons remarquer que toute racine positive de l'équation du second degré

$$x^2 \mp 2px \mp q = 0$$

a nécessairement une des formes suivantes :

$$x_1 = p + \sqrt{p^2 - q}, \qquad x'_1 = p - \sqrt{p^2 - q},$$
$$x_2 = \sqrt{p^2 + q} + p, \qquad x'_2 = \sqrt{p^2 + q} - p,$$

irrationnelles dès que les radicaux ne sont pas carrés parfaits.

Euclide appelle *binomes* (ἐκ δύο ὀνομάτων) les formes x_1 et x_2, et *apotomes* (ἀποτομή) les formes x'_1 et x'_2. Il admet encore comme *binomes* et *apotomes*, les formes

$$x_3 = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \qquad x'_3 = \sqrt{a} - \sqrt{b},$$

respectivement racines des formes x_1 et x'_1, dans le cas où q est

un carré parfait et où par suite on peut poser

$$p = a + b, \qquad q = (a - b)^2 = c^2,$$

et

$$a = \frac{p+c}{2}, \qquad b = \frac{p-c}{2}.$$

Les *binomes* x_1, x_2, x_3, sont d'ailleurs, dans le cas général, c'est-à-dire si leurs racines ne sont point réductibles à des formes plus simples, classées respectivement comme quatrième, cinquième et sixième; il en est de même pour les *apotomes;* dans le cas particulier d'une réduction possible, les unes et les autres sont au contraire respectivement classées comme première, seconde et troisième.

Nous venons de voir dès lors définir de fait les *binomes* et *apotomes premières*, racines d'une équation telle que

$$x^2 - 2px + c^2 = 0$$

et déterminer comme *binomes* et *apotomes troisièmes* ou *sixièmes* les racines de l'équation bicarrée de même forme. Dans le cas général, les racines des formes x_1 et x'_1 sont respectivement dites irrationnelle *majeure* (μείζων) et *mineure* (ἐλάσσων).

De même, dans le cas général, les racines des formes x_2, x'_2 sont dites, la première, *racine de rationnel et de moyen*, ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη; la seconde, *racine d'un moyen moins un rationnel*, μετὰ ῥητοῦ μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

La réduction peut avoir lieu à la forme d'une somme ou d'une différence de deux racines quatrièmes, *moyennes*, — *première bimoyenne*, ἐκ δύο μέσων πρώτη, *première apotome de moyenne*, μέσης ἀποτομὴ πρώτη, — sous la condition que $\sqrt{q}$ soit commensurable avec $\sqrt{p^2+q}$.

Soit $m = \sqrt{\frac{p^2+q}{q}}$ ou $q = \frac{p^2}{m^2-1}$, la racine de la *seconde binome*

$$x_2 = \sqrt{q}\left(m + \sqrt{m^2-1}\right) = p\left(1 + \frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\right)$$

peut en effet se mettre sous la forme

$$\sqrt{\frac{p}{2}\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}}+\sqrt{\frac{p}{2}\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}}.$$

Enfin, dans le cas général, les racines des formes x_3, x'_3 (équation tricarrée) sont dites : la première, *racine de deux moyens*, δύο μέσα δυναμένη; la seconde, *racine d'un moyen moins un moyen*, μετὰ μέσου μέσον τὸ ὅλον ποιοῦσα.

La réduction peut encore avoir lieu sous la forme d'une somme ou d'une différence de deux racines quatrièmes. — *Seconde bimoyenne*, ἐκ δύο μέσων πρώτη. *Seconde apotome de moyenne*, μέσης ἀποτομὴ δευτέρα, sous la condition que $\sqrt{\frac{p+c}{2c}}=\sqrt{\frac{a}{a-b}}=m$, soit commensurable.

Alors, en effet, la racine de la *troisième binome :*

$$x_3=\sqrt{a}\left(1+\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right)=\sqrt{b}\left(1+\frac{m}{\sqrt{m^2-1}}\right),$$

peut se mettre sous la forme :

$$\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m+1}{m-1}}\,b}+\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m-1}{m+1}}\,b},$$

c'est une racine de l'équation tricarrée :

$$x^8-2(2m^2-1)cx^4+c^2=0,$$

en posant

$$\frac{c}{m^2-1}=b.$$

Cette pénible nomenclature est appuyée sur tous les théorèmes et problèmes nécessaires pour permettre la construction et le calcul de ces irrationnelles. On y rencontre donc de nombreuses solutions de problèmes du second degré.

Cette théorie permettait de renvoyer en général au Xe livre la construction des problèmes plans, toutes les fois qu'ils dépendaient d'équations tant soit peu compliquées. Ainsi Pappus (IV, prop. 2) nous donne le porisme suivant :

Soit un demi-cercle construit sur le diamètre rationnel AB qu'on prolonge de BC égal au rayon; on mène la tangente CD, on prend le milieu E de l'arc BD et on la joint au point C; je dis que CE est l'irrationnelle appelée mineure.

Cela signifie que CE est la plus petite racine d'une équation de la forme $x^4 - px^2 + q = 0$, où q n'est pas carré. Comparez de même la proposition 3 du livre IV de Pappus.

II

RECHERCHES HISTORIQUES

9. L'exposition ci-dessus montre suffisamment, croyons-nous, que, sous une forme qui d'ailleurs n'est plus en concordance avec nos habitudes d'esprit, la solution géométrique des problèmes du second degré ou pouvant s'y rattacher (problèmes plans), faisait, dès le temps d'Euclide, l'objet d'une théorie complète, base suffisante pour les travaux de l'analyse ancienne où, comme l'on sait, ces problèmes, rigoureusement distingués de ceux de degré supérieur, furent pour ainsi dire épuisés.

Mais nous avons vu en même temps qu'au moins la solution des problèmes types — trouver deux droites dont on donne le rectangle et soit la somme, soit la différence — apparaît comme immédiatement liée à la découverte du théorème de Pythagore, comme étant sa conséquence directe. L'état dans lequel se trouve la question au temps d'Euclide nous autorisant d'ailleurs évidemment à faire remonter à une époque très antérieure la solution de ces problèmes, nous devons avant tout examiner un point réservé jusqu'ici, je veux dire la distinction entre les deux groupes des livres des *Éléments*, celui où n'intervient pas la notion de rapport et celui où elle est introduite.

La tradition rapporte à Eudoxe de Cnide la composition originaire de l'ouvrage qui a servi de base au livre V. Faut-il donc supposer que l'école pythagoricienne ignorait la théorie des proportions et celle de la similitude? Faut-il donc établir un abîme entre la découverte de la parabole en ellipse ou en hyper-

bole d'un carré et la parabole en ellipse ou en hyperbole d'une figure semblable à une figure donnée?

Sans rappeler ici l'ébauche de la théorie de la similitude qu'accusent, plus de dix siècles avant Pythagore, certains problèmes résolus dans le papyrus égyptien de Rhind, ce qu'on sait des travaux de l'école sur la proportion *géométrique* suffirait à soulever de sérieuses objections contre cette thèse. On ne peut d'ailleurs historiquement retarder ainsi l'invention d'une théorie dont le principe est supposé par les arts du dessin. Il faut donc admettre un autre motif pour l'ordre euclidien, et peut-être n'est-il pas difficile à découvrir.

Comme le montrent suffisamment, ce semble, leurs travaux sur la figuration des nombres et leur célèbre définition du point — l'unité ayant une position — les Pythagoriciens sont partis de l'idée, naturelle à tout homme non instruit, que toute longueur est nécessairement commensurable à l'unité. La découverte de l'incommensurabilité de certaines longueurs entre elles, et avant tout de la diagonale du carré à son côté, qu'elle soit due au Maître ou aux disciples, dut, dès lors, être un véritable scandale logique, une redoutable pierre d'achoppement.

C'est moins la vérité qu'il est difficile de découvrir que l'erreur qu'il est long de déraciner; l'incommensurabilité était en tout cas en contradiction formelle avec les principes de la théorie des rapports établis alors pour les nombres seulement, et toute démonstration fondée sur la similitude ou employant la notion de rapport était donc soumise à une sérieuse objection.

S'il y eut dans l'école pythagoricienne des mystères réservés aux seuls initiés, l'incommensurabilité dut donc en être un; elle devait sans doute être découverte depuis plus d'un siècle quand Platon en représente la révélation comme toute nouvelle de son temps. Les géomètres durent donc s'efforcer d'éviter cette grave question et par suite bannir la notion de rapport de toute démonstration où elle n'était pas absolument nécessaire.

Enfin Eudoxe parvint, en reprenant cette notion, à la modifier de façon à étendre aussi rigoureusement la théorie aux quantités

incommensurables qu'aux quantités commensurables. Plus tard, Euclide, en rédigeant les *Éléments*, conserva l'ordre historique relatif à la forme des démonstrations. Les quatre premiers livres représentent ainsi, comme fond et comme forme, la matière élaborée avant Eudoxe; les deux suivants supposent le travail de ce dernier, mais comme forme seulement, car il n'est pas douteux que la totalité des théorèmes qu'ils renferment n'aient dû être connus bien auparavant, sinon rigoureusement démontrés en dehors de l'hypothèse de la commensurabilité.

La conclusion à tirer de ces remarques est que nous ne pouvons en aucune façon connaître la méthode d'invention ni du théorème de Pythagore, ni de la parabole avec ellipse ou hyperbole, ni en général des propositions du livre II. La forme géométrique spéciale sous laquelle ces théories nous sont parvenues, peut très bien leur avoir été adaptée après coup, entre Pythagore et Eudoxe, et la proposition du carré de l'hypoténuse peut parfaitement avoir été démontrée pour la première fois en partant de la notion de similitude. S'il peut d'ailleurs en être autrement, il n'en est pas moins certain que le rejet au livre VI de l'exposition de la parabole avec ellipse ou hyperbole d'un rectangle semblable à un rectangle donné, ne doit en aucune façon faire supposer que l'invention de ces constructions soit postérieure à Eudoxe.

10. Après ces remarques préliminaires, nous pouvons aborder l'examen des preuves qui permettent en réalité d'attribuer à l'école pythagoricienne la solution des problèmes dont il s'agit.

Nous n'aurions que l'opposition des termes techniques — ellipse, hyperbole — que la seule lecture des *Éthiques* d'Aristote nous conduirait à en soupçonner l'origine. Au sens géométrique, ces termes sont d'ailleurs très connus du temps de Platon, qui blâme même l'usage de celui de *parabole*, comme ayant une signification trop concrète et qui, en un endroit du *Ménon*, propose une opération de la sorte en *ellipse* d'un carré. Mais nous possédons un témoignage aussi précis que possible dans le commentaire de Proclus relatif à la proposition 44 du livre I d'Euclide (éd. Friedlein, p. 419).

« Ce sont, nous dit-on d'après Eudème, d'anciennes découvertes » dues à la muse des Pythagoriciens que la *parabole* des aires, » l'*hyperbole* et l'*ellipse*. C'est de là que plus tard on prit ces » noms pour les transporter aux coniques [1], qu'on appela l'une » parabole, l'autre hyperbole, la troisième ellipse, tandis que » pour ces hommes anciens et divins, c'était dans la construction » plane des aires sur une droite déterminée qu'apparaissait la » signification de ces termes. Si vous prenez la droite tout entière » et que vous y terminiez l'aire donnée, on dit que vous faites la » *parabole* de cette aire; si vous lui donnez une longueur qui » dépasse la droite, c'est l'*hyperbole;* si une longueur inférieure, » c'est l'ellipse, une partie de la droite restant alors en dehors » de l'aire construite. C'est au livre VI qu'Euclide parle de » l'*hyperbole* et de l'*ellipse*, mais ici il avait besoin de la *parabole* » par une droite donnée d'une aire équivalente à un triangle donné, » pour nous fournir, après la *composition* (σύστασις, prop. 42) [2] » d'un parallélogramme équivalent au triangle donné, sa *parabole* » par une droite déterminée. Ainsi qu'on donne un triangle ayant » une aire de 12 pieds, et une droite dont la longueur soit » de 4 pieds, nous faisons la parabole de l'aire du triangle » sur la droite, si, prenant la longueur totale de 4 pieds, » nous trouvons de combien de pieds doit être la largeur pour » que le parallélogramme soit équivalent au triangle. Ainsi ayant » trouvé, dans ce cas, la largeur de 3 pieds, nous multiplions » la longueur par la largeur, en supposant que l'angle donné soit » droit, et nous avons l'aire.

» Voilà ce qu'est la *parabole* d'après l'antique tradition venue » des Pythagoriciens. »

Si nous ne possédons pas malheureusement le commentaire que Proclus avait dû composer sur le livre VI, l'attribution aux

---

(1) Ici ce n'est plus Eudème, le disciple d'Aristote, qui parle, l'attribution de ces noms aux coniques n'étant pas antérieure à Apollonius; c'est probablement à Geminus que Proclus emprunte toute cette citation; c'est à cet auteur qu'il doit en général sa connaissance d'Eudème.

(2) C'est la construction du parallélogramme sur la hauteur et la moitié de la base du triangle.

Pythagoriciens des propositions 28 et 29 n'en est pas moins faite ici sans restriction. Il nous est aussi formellement indiqué que les inventeurs de ces constructions en avaient fait ressortir la signification arithmétique, et nous ne pouvons pas nous étonner après cela de voir Diophante employer constamment l'expression παραβάλλειν παρὰ (faire la *parabole* par) dans le sens « diviser par » (un nombre donné).

11. Eudème se garde d'ailleurs de faire remonter jusqu'au Maître la gloire de ces découvertes; mais il ne faut pas y voir une négation. C'est l'habitude constante des écrivains jusqu'à cette époque, d'Aristote en particulier, de ne jamais faire d'attribution de doctrine à Pythagore, de parler en général de ses disciples. Plus tard la légende sera plus hardie.

Mais elle est en tout cas aussi fondée à assigner au chef de l'école la solution des problèmes du second degré que le théorème du carré de l'hypoténuse. Si en effet on compare les témoignages de Plutarque, d'Athénée, de Diogène Laërce, il est clair que la tradition s'appuie exclusivement sur deux vers anciens:

> Pythagore, inventant la célèbre figure,
> Offrit une hécatombe, et rendit grâce aux dieux,

rapportés dans un traité de *logistique* par un certain Apollodore (1), qui laissa en suspens la question de savoir à quelle découverte géométrique ils faisaient allusion, « soit à l'hypoténuse comme » valant en puissance les côtés de l'angle droit, soit au problème » de la *parabole* des aires. (*Plutarch. non posse suav. vivi secun-* » *dum Epicur. 11.*) Il y a un théorème ou plutôt un problème » des plus importants en géométrie qui est, étant données deux » figures, de faire la *parabole* d'une troisième égale à l'une, » semblable à l'autre. On dit qu'après l'avoir trouvé, Pythagore

(1) Ἀπολλόδωρος ὁ λογιστικός. C'est sans doute au même auteur que remonte également la seconde tradition précise sur une autre découverte de Pythagore : la constitution des triangles rectangles en nombres, sujet appartenant essentiellement à la logistique.

» fit un sacrifice. Car il est certainement beaucoup plus brillant,
» beaucoup plus inspiré par la Muse, que le théorème qu'il
» démontra sur l'hypoténuse comme valant en puissance les côtés
» de l'angle droit. » (Plutarch. Sympos. VIII, 4.)

Dans ce dernier passage, Plutarque, qui n'est nullement géomètre, commet une inexactitude de langage en parlant d'un problème qui n'est nullement une *parabole* mais bien une *composition*. Mais, comme nous l'avons vu, ce problème (*Éléments,* VI, 25) est l'élément essentiel de la parabole complète avec ellipse ou hyperbole d'un parallélogramme donné d'espèce. Ainsi c'est bien cette parabole complète que la légende fait remonter à Pythagore.

Au reste ce problème VI, 25 se ramène à l'invention d'une moyenne proportionnelle ou à une quadrature, dès que l'on sait que deux figures semblables sont entre elles comme les carrés des côtés homologues.

Soit S l'aire donnée, A celle de la figure semblable à la figure cherchée, x le côté de cette dernière homologue au côté a de la figure A :

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{S}{A}.$$

Par deux paraboles simples on peut avoir :

$$c = \frac{A}{a}, \qquad b = \frac{S}{c},$$

d'où :

$$x^2 = ab.$$

Bretschneider (*Die Geometrie und die Geometer von Euklides*, Leipzig, 1870) a remarqué (p. 132) que la proposition sur le rapport des aires de deux figures semblables était connue vers le milieu du v[e] siècle, par Hippocrate de Chios, et même appliquée aux segments de cercle, ce qui semble bien dénoter un concept élaboré depuis longtemps; il ne voit donc aucune difficulté à attribuer à Pythagore la connaissance de cette proposition. Il n'y

en a pas plus dès lors à admettre la légende dans toute son extension.

12. Si l'on répugne à cette conclusion, si l'on veut voir au contraire dans les *paraboles* du VI[e] livre d'Euclide, comme le dernier et plus sublime effort de la muse pythagoricienne dans le domaine de la géométrie plane, il n'est cependant guère contestable que le Maître a dû aborder lui-même les problèmes du second degré.

L'emploi comme symbole, parmi ses disciples, du pentagone régulier étoilé doit en effet remonter jusqu'à Pythagore, et suppose qu'il connaissait la construction géométrique de cette figure. Or, elle exige la *section d'or,* qui a dû, en effet, être sans doute le premier problème de cet ordre qui se soit posé et, par suite, qui ait été résolu.

La répétition de ce problème dans Euclide sous deux formes et à deux endroits différents, ainsi que nous l'avons vu, peut être invoquée comme trace du développement historique probable; solutions particulières de problèmes du second degré jusqu'à l'invention des problèmes types : trouver deux droites dont on connaisse le produit et soit la somme soit la différence. — (Parabole avec ellipse ou hyperbole d'un carré) : généralisation du problème de la parabole au cas de l'hyperbole ou de l'ellipse d'un parallélogramme d'espèce donnée; déduction des problèmes particuliers du problème général.

Mais nous avons vu quel a dû être le véritable motif de la répétition dont il s'agit, et il nous est ainsi expliqué pourquoi Euclide n'a pas de même répété les autres problèmes. D'autre part, la question est de savoir combien de temps le développement esquissé ci-dessus a pu exiger : la vie de Pythagore, ou bien plusieurs générations?

En tout cas, il nous semble qu'on ne peut supposer plus de deux générations, c'est-à-dire qu'on doit admettre que la solution complète était obtenue, sinon du temps de Pythagore lui-même, au moins de celui de ses disciples immédiats. Nous maintenons

à cet égard les conclusions de notre essai sur *Hippocrate de Chios et la quadrature des lunules* (1), en admettant que ce géomètre, qui a pu connaître ces disciples immédiats, a réellement construit les trois lunules carrables découvertes par lui. Or, si les deux premières ne réclament que de simples quadratures

$$x^2 = 2a^2 \qquad \text{ou} \qquad x^2 = 3a^2,$$

la troisième exige la solution de l'équation

$$3x^2 + 3ax = 2a^2,$$

parabole avec hyperbole d'un rectangle dont les côtés sont dans le rapport de 1 à 3.

III

SUR LA SOLUTION ARITHMÉTIQUE

13. Nous avons vu que les Pythagoriciens n'avaient pas manqué de mettre en lumière la signification arithmétique de leurs constructions géométriques, et nous ne pouvons nous en étonner, d'après l'importance bien connue qu'ils attachaient aux spéculations sur les nombres. Comment croire dès lors que la solution arithmétique des problèmes du second degré n'ait pas immédiatement suivi la solution géométrique, à moins que même elle ne l'ait précédée?

Cependant, pour avoir quelques données précises sur la façon dont les Grecs obtenaient la solution arithmétique, la perte de leurs ouvrages de logistique nous oblige à descendre de huit siècles, jusqu'à Diophante. Dans l'intervalle, nous ne constatons guère que des calculs numériques dans les écrits héroniens (2) et, en raison de la théorie des médiétés, l'indice que la solution était connue avant Eudoxe (3).

(1) *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, tome II (2e Série), p. 179.

(2) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1880, p. 341.

(3) Voir notre essai : *L'Arithmétique des Grecs dans Pappus* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. III (2e Série), p. 351).

Dans la préface de son ouvrage, l'auteur des *Arithmétiques*, après avoir indiqué que les équations du second degré doivent avant tout être ramenées à trois termes pris positivement, deux dans un membre, un dans l'autre, promet de donner la façon de les résoudre; mais, dans le cours de son ouvrage, il la suppose connue, sans que l'on puisse pourtant la retrouver ailleurs que dans les problèmes types 30 et 33 du Ier livre. — Trouver deux nombres dont la somme et le produit soient donnés. — Trouver deux nombres dont la différence et le produit soient donnés.

On suppose donc qu'il y a une lacune dans l'ouvrage, lacune d'ailleurs d'autant plus considérable qu'on ne possède que six livres sur treize annoncés, que la division par livres n'est pas constante dans les manuscrits, qu'elle a été évidemment corrompue par les copistes et qu'enfin il semble difficile de croire que Diophante ait pu aller plus loin que les problèmes traités dans son sixième livre. D'autre part, on ne possède pas non plus des *Porismes* auxquels il renvoie trois fois, et on se demande s'ils faisaient partie de l'ensemble des treize livres.

14. Il ne nous paraît pas douteux que la solution des équations du second degré n'ait été donnée par Diophante dans des *Porismes*, dont la forme se prêtait essentiellement à l'énoncé de règles générales. Mais nous ne sommes pour cela nullement portés à croire que ces porismes fussent réunis dans un livre ou des livres spéciaux. Il n'est guère admissible en effet ni que Diophante ait interrompu le cours de ses problèmes pour le reprendre après intercalation d'un recueil plus ou moins considérable de propositions présentées sous une autre forme, ni d'un autre côté qu'il emploie simplement l'expression « nous avons dans les porismes que », pour renvoyer à un ouvrage différent de ses *Arithmétiques*. Il serait aussi facile de croire qu'il indique ainsi les *Porismes* classiques, ceux d'Euclide, si les propositions qu'il cite avaient pu s'y trouver.

Ces propositions se rapportent au contraire nettement à des problèmes que nous retrouvons dans l'ouvrage de Diophante; il

est dès lors beaucoup plus croyable que les *Porismes* étaient répandus comme corollaires dans tout l'ouvrage à la suite des problèmes. Plus tard, ils auront été systématiquement omis par le copiste du premier manuscrit, d'où sont provenus ceux que nous possédons, et ce copiste aura été amené par là même à remanier la division par livres. Cette hypothèse permet de croire que nous avons, à très peu près, la totalité des problèmes traités par Diophante, sauf peut-être à la fin une lacune relativement peu considérable.

15. Pour la justifier dans le cas qui nous occupe, revenons à nos problèmes types, 30, 33. Ils se distinguent par l'expression singulière qui commence l'exposé de la solution : ἐστὶ δὲ τοῦτο πλασματικὸν.

Bachet de Méziriac, dont je reprends en fait l'opinion, adoptée par Montucla et Cossali, donne à cette expression obscure le sens « *ceci est formatif* » et y voit un appel à l'attention du lecteur sur la suite des opérations de calcul qui conduisent à la solution.

Nesselmann, au contraire (*Die Algebra der Griechen*, p. 326), traduit « *ceci est formable* » et entend que Diophante indique seulement la possibilité d'une solution en nombres, d'après le διορισμὸς indiqué dans l'énoncé du problème.

Mais il faudrait alors expliquer pourquoi cette expression ne se retrouve pas toutes les fois que Diophante donne un διορισμὸς.

Et avant tout, philologiquement le sens est inadmissible. Il faudrait ἐστὶ δὲ τοῦτο πλαστὸν (1).

Si nous admettons au contraire le sens donné par Bachet, rien de plus simple que de supposer à la suite des problèmes 30 et 33 des corollaires analogues aux suivants.

Au problème 30, on a trouvé deux nombres dont la somme est 20 et le produit 96.

Porisme I. « Si l'on a une équation telle que $20x = x^2 + 96$,

(1) Le terme πλάσσειν semble au reste avoir été technique en logistique, comme πορίζειν en géométrie, auquel il correspond de fait ; πλάσσεται ἡ ἁρμονικὴ μεσότης « La médiété harmonique se forme ». (*Pappus*, III, 70, 3.)

» il faut, pour la résoudre, trouver deux nombres, x et $20 - x$, » dont la somme soit 20 et le produit 96. Si x est le plus grand » de ces nombres, il faut, pour l'obtenir, ajouter à la moitié du » coefficient de l'inconnue la racine carrée de l'excès sur le terme » constant du carré de cette moitié du coëfficient de l'inconnu. » Mais si x est le plus petit des deux nombres, il faut retrancher » cette racine carrée au lieu de l'ajouter. »

Au problème 33, on a trouvé deux nombres dont la différence est 4 et le produit 96.

Porisme II. « Si l'on a une équation telle que $x^2 = 4x + 96$, » il faut pour la résoudre, trouver deux nombres x et $x - 4$, tels » que leur différence soit 4 et leur produit 96, et x sera le plus » grand de ces deux nombres. Pour l'obtenir, il faut ajouter à la » moitié du coefficient de l'inconnue la racine carrée de la somme » du carré de cette moitié et du terme constant. »

Porisme III. « Si l'on a une équation telle que $96 = 4x + x^2$, » il faut, pour la résoudre, trouver deux nombres, x et $x + 4$, » tels que leur différence soit 4 et leur produit 96, et x sera le » plus petit de ces deux nombres. Pour l'obtenir, il faut retrancher » la moitié du coefficient de l'inconnue de la racine carrée de la » somme du carré de cette moitié et du terme constant. »

16. Le mode d'exposition que nous sommes ainsi amenés à supposer chez Diophante se présente donc comme ayant un caractère traditionnel ancien, qui reproduit les habitudes de la solution géométrique et qui peut avoir été transmis, sans grand changement, par les traités de logistique perdus depuis l'époque des Pythagoriciens.

Quant à la solution des équations de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, donnée par des règles correspondant à la formule :

$$x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a},$$

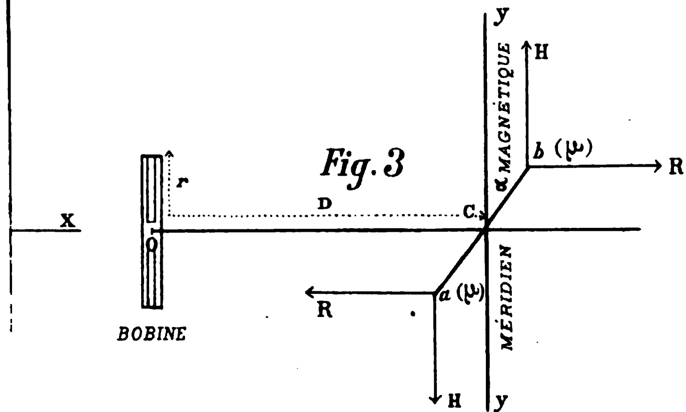
il est à croire qu'elle ne représente point directement la parabole

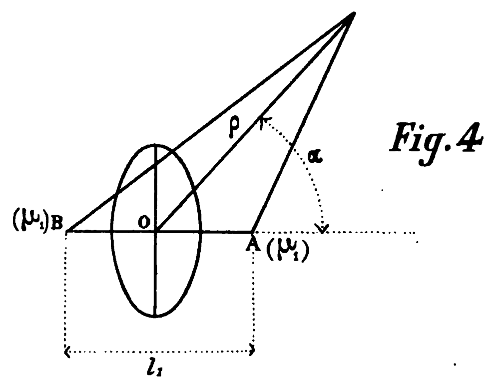
avec ellipse ou hyperbole du livre VI d'Euclide, quoiqu'il serait facile de l'en tirer. Mais on peut supposer chez Diophante d'autres porismes tels que celui-ci :

*Porisme I^bis^*. « Si l'on a une équation telle que $20x = 4x^2 + 24$, » multipliez tous les termes par le coefficient du terme carré. On voit » qu'il faut pour la résoudre trouver deux nombres, $4x$ et $20 - 4x$, » tels que la somme soit 20 et le produit 96. Si donc $4x$ est le » plus grand de ces deux nombres, pour obtenir x, il faudra dans » l'équation donnée : prendre la moitié du coefficient de l'incon- » nue, l'élever au carré, en retrancher le produit du terme » constant par le coefficient du terme carré, prendre la racine » carrée, ajouter la moitié du coefficient de l'inconnue, diviser » par celui du terme carré. Si, au contraire, $4x$ est le plus petit » des deux nombres, on retranchera la racine carrée, au lieu de » l'ajouter, de la moitié du coefficient de l'inconnue. »

En terminant ici cette étude, j'insisterai sur la différence essentielle qui distingue le point de vue grec du nôtre dans la façon de considérer les problèmes du second degré.

Le premier est concret et le plus naturel, le second abstrait et artificiel. En fait, il s'agit de trouver deux inconnues; nous y voyons deux valeurs d'une même variable, valeurs annulant toutes deux une fonction de cette variable, que nous imaginons d'ailleurs pouvoir parcourir librement, en dehors de ces cas particuliers de l'annulation de la fonction, toute la série des grandeurs réelles ou non. Les Grecs semblent avoir toujours distingué les deux inconnues et n'avoir jamais vu dans l'équation qu'une relation réelle existant entre des quantités concrètes ou supposées telles. L'inconnue ne peut donc y avoir qu'une seule valeur; mais si les hypothèses n'ont pas été suffisamment précises, il peut se faire que l'on hésite sur la spécification et, par conséquent, la valeur de cette inconnue, car la même équation peut convenir à deux différentes.


y
H
MAGNÉTIQUE
b (μ)
R
Fig. 3
r
D
C.
X
O
R
a (μ)
BOBINE
MÉRIDIEN
H
y


ρ
α
Fig. 4
(μ1) B
O
A (μ1)
B
l1

NOTE

SUR

LES SYSTÈMES COORDONNÉS

D'UNITÉS ÉLECTRIQUES

SPÉCIALEMENT SUR CELUI DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE
ET SES APPLICATIONS

PAR M. E. KOWALSKI

INGÉNIEUR DES ARTS ET MANUFACTURES, LICENCIÉ ÈS SCIENCES PHYSIQUES.

INTRODUCTION

La loi de Ohm donne la relation connue, $I = K\frac{E}{R}$, entre l'intensité I d'un courant, la force électro-motrice E qui lui a donné naissance et la résistance totale R du circuit qu'il parcourt.

La valeur numérique de la constante K est indéterminée et dépend du choix complètement arbitraire des unités d'intensité, de force électromotrice et de résistance. Une première simplification consiste à remarquer que l'on peut supposer $K = 1$, à condition que l'on ait $R = 1$ lorsque I et E seront égaux à l'unité. On pourra donc écrire $I = \frac{E}{R}$, mais il reste toujours 2 unités arbitraires.

Il est utile et rationnel de choisir ces 2 unités, de manière à constituer un ensemble logique et relié aux unités magnétiques, toutes ces unités devant être exprimées au moyen des 3 unités fondamentales et arbitraires de longueur, de force et de temps.

Des mesures effectuées à l'aide d'un semblable système d'unités sont dites absolues; elles sont immédiatement comparables entre elles.

J'ai essayé dans la présente Note de présenter succinctement et d'une manière élémentaire les notions principales relatives à ces systèmes d'unités, notions que les traités classiques de Physique publiés jusqu'ici en France passent à peu près complètement sous silence, et qui sont cependant excessivement utiles pour résoudre les problèmes relatifs aux applications de l'électricité [1].

Je ne parlerai pas du reste de la mesure des quantités magnétiques, question traitée dans bon nombre d'ouvrages classiques, ceux de MM. Desains et Jamin, par exemple.

§ I. — Mesure en unités absolues des courants continus ou instantanés.

Occupons-nous d'abord des courants continus.

Le point de départ est la formule connue de Laplace exprimant l'action d'un élément de courant sur un pôle magnétique :

$$F = K.\frac{\mu i.ds.\sin\omega}{l^2}.$$

La force F est, comme on le sait, appliquée à l'élément et perpendiculaire au plan passant par celui-ci et le pôle.

De cette formule, on peut déduire en y supposant $K = 1$ une définition pour l'unité absolue d'intensité des courants. Mais comme l'action d'*un élément* de courant n'est pas matériellement réalisable, il vaut mieux transformer cette définition, comme le fait Weber, en examinant l'action exercée par un courant circulaire sur un pôle d'aimant.

---

[1] J'ai consulté avec fruit pour le présent travail les ouvrages ci-après :

Von Lang, *Einleitung in die theoretische Physik.*

Du Moncel, *Traité des Applications de l'Électricité.*

Verdet, *Théorie mécanique de la Chaleur.*

Bouty, *Supplément au Tome I du Cours de Physique de M. Jamin.*

Journal de Physique théorique et appliquée, spécialement les articles de MM. Cornu, Terquem et Potier.

Annales de Physique et de Chimie, 4e série, tome XIX (un article de M. Bertin, *sur la Mesure absolue des Courants*).

Le journal : *la Lumière électrique.*

Nous supposerons, pour simplifier les calculs, le pôle B situé sur la perpendiculaire OX au plan du circuit O.

Considérons (*fig.* 1) en M un élément MN $= ds$ de ce circuit; l'angle BMN $= \omega$ est droit et la force F est perpendiculaire à BM dans le plan BOM, de telle sorte qu'en rabattant ce plan sur celui du tableau (*fig.* 2) on voit tout de suite que cette force peut se décomposer en deux, l'une suivant le rayon OM, l'autre f parallèle à OB. En considérant alors l'élément symétrique du circuit en M', on voit que les composantes suivant les rayons se détruisent 2 à 2, et l'on est ramené à composer les forces égales et parallèles f qui ont une résultante R unique et passant par le pôle B. On a :

$$f = F \sin\beta;$$

or, ω valant 90°,

$$F = \frac{\mu i . ds}{\overline{BM}^2};$$

d'où

$$R = \sum_0^{2\pi} \frac{\mu i ds \sin\beta}{BM^2} = \mu i \frac{\sin\beta}{\overline{BM}^2} \sum_0^{2\pi} ds$$

ou

$$(1) \qquad R = \mu i \frac{2\pi r^2}{(D^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si l'on considère maintenant un aimant ab à cheval sur le circuit en son centre et qu'on cherche son action sur le pôle B, on arrive, en négligeant l_1^2 devant D^2, à la relation

$$R' = 2\mu_1 l_1 \frac{\mu}{D^3}.$$

Si dans le cas du circuit précédent r^2 est également négligeable devant D^2, on trouve

$$R = 2\pi r^2 i \frac{\mu}{D^3}.$$

Dès lors on aura $R = R'$, pourvu que l'on ait

$$\pi r^2 i = \mu_1 l_1.$$

Cette relation est la *condition d'équivalence* d'un circuit et d'un aimant à cheval sur celui-ci par rapport à un pôle. Elle n'est démontrée ici, il est vrai, que lorsque le pôle B est dans le prolongement de l'axe de l'aimant; mais elle peut être facilement généralisée. Le calcul fait par M. Terquem (*Journal de Physique*, tome I) revient à calculer les composantes de l'action exercée suivant les trois axes Ox, Oy, Oz.

Considérons maintenant l'*aimant unité*, tel que l'on ait $\mu_1 = 1$, $l_1 = 1$; le circuit équivalent devra satisfaire à la relation $\pi r^2 i = 1$ et l'on aura par suite $i = 1$, si $\pi r^2 = 1$.

Donc *l'unité absolue d'intensité est l'intensité du courant qui, parcourant un circuit circulaire d'aire égale à l'unité, exerce sur une molécule magnétique éloignée une action égale à celle de l'aimant unité à cheval sur le circuit au centre de ce dernier.*

L'unité de courant ainsi déterminée, $\frac{\mu i . ds \sin\omega}{l^2}$ représentera en valeur absolue l'action d'un élément de courant sur un pôle.

Considérons maintenant une boussole des tangentes à cadre circulaire, — et par ce nom nous désignerons, non seulement l'appareil qui le porte spécialement, mais tout autre tel que la tangente de la déviation soit proportionnelle à l'intensité du courant, le Galvanomètre de Weber, par exemple (*fig.* 3).

On peut alors calculer très approximativement la grandeur des forces agissant sur chacun des pôles de l'aiguille ab comme s'ils étaient l'un et l'autre constamment situés en c. Ce qui variera avec l'angle α, ce sera le moment du couple déviateur, moment équilibré par celui du couple terrestre.

D'après ce qui précède, l'action exercée par une spire du fil enroulé sur le cadre sur un des pôles est

$$\frac{2\pi r^2 \mu i}{(D^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}};$$

si donc le cadre porte n spires, on aura

$$R = \frac{2\pi r^2 n}{(D^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \mu i. \tag{1}$$

La quantité

$$\frac{2\pi r^2 n}{(D^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

peut se calculer une fois pour toutes; c'est la constante C_b de la boussole.

Le moment du couple déviateur est alors

$$(2) \qquad C_b \mu . il \cos\alpha;$$

celui du couple terrestre est

$$H\mu l \sin\alpha,$$

H représentant la valeur absolue de la composante horizontale de la force terrestre. — En égalant ces 2 moments, on obtient en valeur absolue

$$(3) \qquad i = \frac{H}{C_b} \operatorname{tang}\alpha.$$

Cas des courants instantanés.

On appelle *courant instantané* un courant qui ne dure que pendant un temps très court δ. Si i est l'intensité *moyenne* de ce courant, $i\delta$ représentera la quantité totale d'électricité qui circule pendant la durée de son existence. Il nous suffira, pour la suite de ce travail, de savoir évaluer cette quantité $i\delta$ que l'on appelle souvent improprement *intensité du courant instantané.*

Il convient d'employer dans ce but une boussole construite de telle façon que son aiguille oscille lentement, en sorte qu'elle n'ait pas le temps de s'éloigner sensiblement du méridien magnétique pendant le temps très court δ, et qu'elle ne s'en écarte qu'en vertu de la vitesse angulaire initiale ω_0 qu'elle a reçue lorsqu'elle se trouvait encore dans ce plan. L'aiguille oscille ensuite à la façon d'un pendule, sous la seule action du couple terrestre.

Soit A l'angle d'écart maximum de l'aiguille, a l'angle d'écart à l'époque t, T la durée d'une oscillation simple.

On a, en vertu des lois du mouvement pendulaire,

$$a = A \sin \frac{\pi t}{T},$$

d'où

$$\frac{da}{dt} = \omega = \frac{\pi A}{T} \cos \frac{\pi t}{T},$$

pour $t = 0$, $\omega = \omega_0$; par suite,

$$\omega_0 = \frac{\pi A}{T}.$$

On peut obtenir une seconde expression de ω_0 en fonction de la quantité cherchée $i\delta$, en remarquant que l'on peut considérer $\frac{\omega_0}{\delta}$ comme la valeur de l'accélération angulaire que l'aiguille située encore dans le méridien a prise sous l'action du couple déviateur. Si nous désignons par M le moment magnétique ml de l'aiguille, et si nous remarquons que, pour la situation indiquée $\alpha = 0$, la formule connue de Mécanique $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma MF}{I}$ nous donnera, en désignant par I le moment d'inertie du système oscillant,

$$\omega_0 = \frac{C_b M}{I} i\delta;$$

en égalant les 2 expressions de ω_0 il viendra

$$i\delta = \frac{\pi A}{C_b T} \cdot \frac{I}{M}.$$

Sous cette forme, la formule suppose les arcs évalués en fonction du rayon pris pour unité; comme en fait l'observation les fournit en degrés, il conviendra de multiplier le second membre par le facteur $\frac{\pi}{180}$, et l'on aura

$$i\delta = \frac{\pi^2}{180} \cdot \frac{AI}{C_b MT}.$$

On peut transformer cette formule et la rendre d'un usage plus commode en introduisant la composante horizontale H du magné-

tisme terrestre qui peut, dans certains cas, être fournie par un observatoire. La formule du pendule composé donne, en effet,

$$T = \pi \sqrt{\frac{I}{HM}},$$

d'où

$$\frac{I}{M} = \frac{T^2 . H}{\pi^2};$$

en substituant, il vient

$$i\delta = \frac{1}{180} \cdot \frac{AT}{C_b} \cdot H.$$

Remarque. — Cette formule n'est qu'approximative; elle a besoin de subir des corrections tenant notamment à ce que l'aiguille aimantée se meut devant des pièces en cuivre rouge, d'où production de courants induits qui agissent comme forces retardatrices. Le mouvement de l'aiguille diffère donc sensiblement du mouvement pendulaire. Mais je dois me borner ici à indiquer la nécessité de cette correction.

§ II. — Extension de la notion de potentiel aux courants électriques.

La considération de l'équivalence d'un circuit circulaire et d'un aimant à cheval sur ce circuit conduit à un théorème important, dû à Ampère, et dont voici l'énoncé :

« L'action d'un courant fermé sur un pôle magnétique est identique à l'action qu'exerceraient deux surfaces infiniment voisines l'une de l'autre, limitées toutes deux par le courant et chargées de fluides magnétiques contraires. »

On arrive facilement à cet énoncé en décomposant le circuit total en circuits élémentaires, et substituant à chacun de ceux-ci l'aimant équivalent.

L'importance de ce théorème est pour nous de permettre d'étendre facilement aux courants la notion de potentiel, puisque les actions exercées sont ainsi ramenées à des forces émanées de

points matériels, et s'exerçant en raison inverse des carrés des distances.

Les traités de Physique récents publiés en France renferment un exposé plus ou moins étendu de la théorie du potentiel, et les *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux* contiennent à ce sujet deux communications de notre savant collègue, M. Abria; je supposerai donc connues les propriétés élémentaires de cette fonction.

Potentiel d'un circuit en un point donné.

Considérons en un point donné P l'unité de magnétisme, et supposons un circuit C parcouru par un courant d'intensité 1. Imaginons la double surface magnétique $\sum$ équivalente à C. On sait que le potentiel V de cette surface au point P représente le travail nécessaire pour amener de l'infini en ce point une molécule chargée de l'unité de magnétisme. Ce même travail représentera aussi ce que nous appellerons le potentiel du circuit.

Il résulte alors, des notions que je suppose ici connues, que le travail nécessaire pour amener de P en P′ une masse magnétique μ, relativement à un circuit C parcouru par un courant d'intensité i, a pour valeur $\mu . i . \Delta V$, ΔV étant la variation du potentiel quand on passe du premier point au second.

Considérons (*fig.* 4), un élément circulaire infiniment petit $d\omega$ du circuit C, et l'aimant élémentaire équivalent AB dont le moment magnétique est $\mu_1 l_1$. La condition d'équivalence est ici $d\omega = \mu_1 l_1$, puisqu'on suppose $i = 1$.

Le potentiel dV de ce circuit élémentaire sera le même que celui de l'aimant, c'est-à-dire

$$dV = \sum \frac{\mu}{r} = \mu_1 \left(\frac{1}{AP} - \frac{1}{BP} \right),$$

expression que l'on transforme facilement en

$$\mu_1 \frac{\overline{BP}^2 - \overline{AP}^2}{(BP + AP) AP . BP}.$$

Or, si ρ désigne la distance OP, on a, à un infiniment petit près, $AP = BP = \rho$; d'autre part, $\overline{BP}^2 - \overline{AP}^2 = 2\overline{AB} \times$ projection OP, c'est-à-dire $2l_1\rho\cos\alpha$; d'où, après substitution et réductions,

$$dV = \frac{d\omega . \cos\alpha}{\rho^2},$$

et par suite,

$$V = \sum \frac{d\omega . \cos\alpha}{\rho^2}, \tag{1}$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les circuits élémentaires composants du circuit C considéré.

Cette expression analytique du potentiel peut recevoir une interprétation géométrique très simple. Remarquons en effet que $d\omega \cos\alpha$ est la projection du circuit élémentaire sur un plan mené par le point O perpendiculairement à la droite OP, projection que l'on peut confondre avec la projection conique de l'élément $d\omega$ sur la sphère de rayon ρ, P étant à la fois le centre de cette sphère et le sommet du cône. Dès lors $\frac{d\omega \cos\alpha}{\rho^2}$ représente l'élément superficiel découpé par le cône en question sur la sphère de rayon 1 ayant son centre en P; V, somme de tous ces éléments superficiels, représente donc la portion de surface découpée sur cette sphère par le cône ayant le circuit comme directrice et le point P pour sommet; d'où le remarquable énoncé :

« Le potentiel d'un circuit en un point donné est représenté par l'angle solide sous lequel on voit le circuit du point considéré. »

Par suite, si un circuit C parcouru par un courant d'intensité i subit un déplacement par rapport à un pôle de masse magnétique μ, le travail des forces électromagnétiques s'obtiendra en multipliant μi par la différence des angles solides sous lesquels le circuit est vu du point P dans ses positions finale et initiale.

Si le circuit C est plan et se déplace par rapport à un pôle très éloigné, les distances ρ de ce pôle aux centres O des divers circuits élémentaires peuvent être regardées comme constantes; les droites telles que OP auront sensiblement une direction commune, celle

des forces magnétiques émanées du pôle; les aimants élémentaires sont d'autre part parallèles entre eux; l'angle α est donc constant; $\frac{1}{\rho^2}\cos\alpha$ peut sortir du signe $\sum$ et il vient

$$V = \frac{1}{\rho^2}\cos\alpha \sum d\omega = \frac{S\cos\alpha}{\rho^2},$$

S étant l'aire du circuit.

Considérons maintenant un circuit plan soumis à l'action de la terre; cette action est, on le sait, équivalente à celle de deux pôles, l'un austral, l'autre boréal infiniment éloignés; si nous supposons en chacun d'eux l'unité de magnétisme, nous aurons, pour le potentiel relatif à l'ensemble de ces deux pôles, $\frac{2}{\rho^2}\cos\alpha$. Il est commode d'introduire la masse magnétique μ de chacun de ces pôles, et nous appellerons *potentiel d'un circuit plan* PAR RAPPORT A LA TERRE l'expression :

$$2\frac{\mu}{\rho^2}\cos\alpha.$$

Or, $\frac{\mu}{\rho^2}$ est la valeur absolue de la force magnétique terrestre F; si donc nous continuons à désigner par V ce potentiel, il viendra

$$V = 2FS\cos\alpha. \tag{2}$$

α est ici l'angle que fait le plan du circuit avec un plan perpendiculaire à l'aiguille d'inclinaison.

Le travail des forces électromagnétiques répondant à un déplacement déterminé du circuit (supposé parcouru par un conraut d'intensité 1), sera

$$\Delta V = 2FS.\Delta(\cos\alpha). \tag{3}$$

Si l'on examine le cas particulier d'un circuit plan situé d'abord dans le méridien magnétique, puis tournant de 90° autour d'un axe vertical, on voit facilement, en se rappelant que l'angle de deux plans est égal à celui de leurs normales, qu'en désignant par I

l'angle d'inclinaison, on a, dans la position finale du circuit $\alpha = I$ et dans la position primitive, $\alpha = 90°$; par suite

$$\Delta V = 2SF \cos I = 2SH.$$

Pour une rotation de 180° imprimée au circuit, on aurait $\Delta V = 4SH$, relation qui nous servira ultérieurement.

§ III. — Quelques remarques sur l'induction, de l'unité de force électromotrice et de la détermination des résistances en unités absolues.

Considérons l'induction produite par le déplacement relatif d'un circuit fermé et d'un pôle magnétique. Remarquant, d'après la loi de Lenz, qu'il ne suffisait pas d'un déplacement quelconque pour qu'un courant induit prît naissance, mais qu'il fallait que ce mouvement pût résulter de l'action même du pôle sur le circuit supposé parcouru par un courant, Neumann fut conduit à considérer la force électromotrice engendrée comme proportionnelle à la variation, dans l'unité de temps, du potentiel du circuit, relativement au pôle magnétique.

Cette conception de Neumann concorde avec les résultats fournis par l'expérience; nous poserons donc avec lui

$$E = K\frac{\mu \Delta V}{\tau},$$

E étant la force électromotrice induite, K une constante et τ la durée du déplacement répondant à la variation ΔV du potentiel. Cette formule conduit à des conséquences importantes.

1° La force électromotrice induite par un même déplacement est en raison inverse de la durée de celui-ci, résultat qui rend compte des grandes vitesses qu'il convient de donner aux générateurs électriques d'induction;

2° Si R est la résistance totale du circuit, et si la force électromotrice induite E est seule en jeu dans ce circuit, elle donnera naissance à un courant d'intensité $i = \frac{E}{R}$; la quantité d'électricité

mise en mouvement dans le temps τ sera par suite

$$i\tau = \frac{E\tau}{R} = K\frac{\mu.\Delta V}{R}.$$

Si le déplacement est très rapide, τ est très petit, et le courant induit est ce que nous avons appelé un courant instantané, et la formule précédente nous permet de calculer la quantité totale d'électricité qui a circulé.

Dans le cas d'un circuit plan soumis à l'action terrestre, nous aurons de même, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$E = \frac{K}{\tau} 2FS\Delta(\cos\alpha), \qquad i\tau = \frac{K}{R} 2FS.\Delta(\cos\alpha);$$

enfin, dans celui du cercle situé dans le méridien magnétique et tournant de 180° autour de son diamètre vertical,

$$E = \frac{K}{\tau} 4SH \quad \text{et} \quad i\tau = \frac{K}{R} 4SH.$$

Du choix de l'unité absolue de force électromotrice.

On a vu précédemment que E était proportionnel à ΔV, c'est-à-dire à un travail mécanique; *on peut donc prendre pour unité absolue de force électromotrice l'unité de travail*. Ceci revient évidemment à supposer $K = 1$ dans la formule de Neumann et celles qui s'en déduisent, ce que nous supposerons désormais, et l'on pourra dire que *la force électromotrice d'un électrogénérateur quelconque représente l'énergie qu'est susceptible de développer dans l'unité de temps cet appareil, lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité absolue égale à l'unité*. Cette quantité d'énergie devra bien entendu être fournie à l'appareil par la dépense d'une quantité égale d'énergie, soit sous forme d'une action chimique, soit sous forme de travail mécanique fourni par un moteur.

L'unité de force électromotrice est donc parfaitement déterminée; il est cependant bon de savoir comment elle pourrait être définie à l'aide d'un phénomène électrique.

Nous remarquerons pour cela que la relation

$$E = \frac{2F}{\tau} \Delta(S\cos\alpha)$$

nous donnera $E = 1$, si l'on y suppose

$$\tau = 1 \qquad \text{et} \qquad \Delta(S\cos\alpha) = \frac{1}{2F}.$$

Si l'on observe maintenant que SCosα est la projection de l'aire du circuit sur un plan perpendiculaire à l'aiguille d'inclinaison, on arrive au théorème remarquable suivant : « L'*unité* » absolue de force électromotrice est la force électromotrice » engendrée par un circuit plan, soumis à l'action terrestre, et se » déplaçant de telle sorte que l'aire de sa projection sur un plan » perpendiculaire à l'aiguille d'inclinaison, varie dans l'unité de » temps d'une quantite égale à $\frac{1}{2F}$ (F étant la valeur numérique » absolue de la force magnétique terrestre) ».

Détermination des résistances en unités absolues.

Les unités absolues d'intensité et de force électromotrice une fois définies, la relation $I = \frac{E}{R}$ détermine l'unité absolue de résistance. *Celle-ci est la résistance d'un circuit dans lequel la force électromotrice-unité développe le courant d'intensité absolue* 1.

Les divers traités de Physique indiquent plusieurs procédés pour obtenir la résistance d'un circuit par rapport à un conducteur type. Pour obtenir les résistances en unités absolues, il suffit donc d'évaluer ainsi la résistance de ce dernier. On peut y parvenir par une méthode dont voici le principe : Concevons une bobine circulaire plate d'un diamètre assez grand et pouvant tourner autour de son diamètre vertical, le fil faisant n' tours sur le cadre de rayon ρ'. Un semblable appareil porte le nom de magnétomètre d'induction. La force électromotrice induite dans la bobine par une rotation de 180°, l'amenant du méridien magnétique dans

le même plan sera $\frac{4\pi\rho'^2 H}{\tau}$ pour une spire, soit pour la bobine entière $\frac{4n'\pi\rho'^2 H}{\tau}$. La quantité $4n'\pi\rho'^2$ est la constante C_m du magnétomètre; elle peut se calculer à l'avance.

Ceci posé, supposons les extrémités du fil induit reliées à celles du fil d'une boussole des tangentes dont la constante est C_b; soit R la résistance de l'ensemble du circuit ainsi formé. L'intensité totale du courant instantané engendré par la rotation *rapide* du magnétomètre (rotation de 180°) sera

$$i\tau = \frac{C_m H}{R}.$$

Or $i\tau$ s'obtient en fonction de l'angle d'impulsion A de l'aiguille de la boussole et de la durée T d'oscillation de celle-ci; on a trouvé plus haut

$$i\tau = \frac{1}{180}\,\frac{ATH}{C_b};$$

en égalant ces 2 valeurs de $i\tau$, il viendra

$$R = \frac{180}{A}\cdot\frac{C_m C_b}{T}.$$

Cette première mesure effectuée, on interpose dans le circuit le conducteur ou fil étalon dont on cherche la résistance r, et on recommence l'opération; C_m et C_b conservent leurs valeurs; la résistance totale est $R + r$; on observe pour l'angle d'impulsion de l'aiguille et la durée de son oscillation les valeurs nouvelles A′ et T′, d'où

$$R + r = \frac{180}{A'}\cdot\frac{C_m C_b}{T'},$$

et, par soustraction :

$$r = 180\, C_m C_b\left(\frac{1}{A'T'} - \frac{1}{AT}\right).$$

Ce calcul élémentaire devrait en fait subir des corrections nombreuses, dont l'indication sortirait du cadre de cette note.

§ IV. — Des divers systèmes d'unités absolues et du système usuel de l'Association Britannique.

Les considérations exposées dans les paragraphes précédents permettent l'établissement d'un système coordonné d'unités absolues. La possibilité de choisir arbitrairement les trois unités fondamentales de temps, de longueur et de force permet même la création de divers systèmes aussi logiques les uns que les autres. On a jusqu'ici proposé et employé trois systèmes. Dans tous l'unité de temps est la seconde, et dans tous aussi l'unité de force est définie par le rapport constant de l'unité de poids à la valeur de l'accélération g évaluée au moyen de l'unité de longueur répondant au système adopté.

Le tableau ci-joint présente l'ensemble comparatif de ces trois systèmes, dont le dernier est le plus employé :

SYSTÈMES ABSOLUS	NOTATION	UNITÉS FONDAMENTALES
Système de Gauss et Weber	Gs. Wb.	Temps......... 1 seconde. Longueur...... 1 millimètre. Force.......... $\frac{1}{9800}$ milligramme.
Ancien système de l'Association Britannique	M G S	Temps......... 1 seconde. Longueur...... 1 mètre. Force........... $\frac{1}{9,8}$ gramme.
Nouv. système de l'Association Britannique	C G S	Temps......... 1 seconde. Longueur...... 1 centimètre. Force........... $\frac{1}{980}$ gramme.

Système usuel de l'Association Britannique.

Les valeurs de I, E, R exprimées au moyen des unités absolues répondant à l'un des trois systèmes précédents auraient en général, pour les calculs d'application, l'inconvénient d'être représentées par des nombres trop grands; aussi l'Association Britannique

a-t-elle créé un système usuel très employé maintenant dans les applications électriques et parfaitement relié aux unités précédentes. Ces unités usuelles ont reçu des noms particuliers : Volt, Ohm, Weber; ce sont des étalons fixes et parfaitement définis, et l'on a cherché à réaliser matériellement le Volt (unité de force électromotrice) et le Ohm (unité de résistance). Nous désignerons ce système par la notation abrégée système VOW. Le tableau ci-joint en donne les éléments principaux.

Système VOW.

UNITÉS USUELLES	NOM	VALEURS en unités absolues		OBSERVATIONS
		MGS	CGS	
d'intensité	Weber	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	Cette unité représente l'intensité du courant capable de décomposer, en 1ˢ, 0,092 milligramme d'eau ($\frac{1}{10}$ de milligramme en nombres ronds).
de force électromotrice	Volt	10^5	10^8	C'est très sensiblement la force électromotrice d'un élément Daniell, dont le liquide excitateur est formé de 12 parties d'eau pour 1 d'acide sulfurique, et dont le liquide dépolarisateur est une solution saturée de nitrate de cuivre. — La force électro-motrice du Daniell ordinaire est environ 1 Volt 07.
de résistance	Ohm	10^7	10^9	C'est la résistance du circuit dans lequel une force électromotrice de 1 Volt développe un courant d'une intensité égale à 1 Weber. C'est la résistance d'une colonne de mercure de 1 millim. carré de section et 1 mètre 0486 de longueur. Le Ohm vaut donc les 1,0486 de l'unité Siemens; il équivaut également à la résistance d'un fil télégraphique de 4 millimètres de diamètre et 105 mètres de longueur.

§ V. — Notions sur la mesure électrostatique des forces électromotrices.

Les divers systèmes d'unités précédemment indiqués sont dits *électromagnétiques;* ils sont spéciaux aux mesures relatives aux courants. Mais, bien avant Volta, les études électrostatiques avaient conduit Coulomb à définir une unité particulière de quantité déduite des lois qu'il avait établies. De cette unité dérive un système particulier d'unités absolues. Ce système, dit *électrostatique,*

s'applique d'une manière toute particulière à une classe nombreuse de phénomènes; mais il est absolument indispensable d'en dire ici quelques mots, car actuellement on évalue souvent les forces électromotrices d'un générateur électrique (une pile par exemple) par des procédés purement électrostatiques, qui offrent pour une pile l'avantage de supprimer les effets dits *de polarisation*. Il importe donc de savoir passer, de la force électromotrice ainsi évaluée en unités électrostatiques, à la force électromotrice absolue électromagnétique, que l'on sait évaluer en Volts.

Le passage d'un système à l'autre repose sur la connaissance du rapport $K = \frac{U_{mg}}{U_{st}}$ des deux unités de quantité électromagnétique et électrostatique. Par des procédés pour lesquels nous renvoyons au *Journal de Physique*, t. I, ou à la *Physique* de M. Daguin, t. III, Kohlrausch et Weber ont trouvé pour K les valeurs suivantes :

Système $G_s W_b$...... $K = 311000$ millions
— MGS...... $K = 311$ millions
— CGS...... $K = 31100$ millions.

La force électromotrice, électrostatique n'est autre chose que la différence absolue des potentiels électrostatiques, $V_1 - V_0$, aux deux pôles du générateur. Il résulte, d'autre part, des propriétés élémentaires du potentiel, que, si le générateur électrique est tel que cette différence reste constante, le travail des forces électriques dans l'unité de temps aura pour valeur absolue $i(V_1 - V_0)$, i étant la quantité d'électricité qui traversera dans ce même temps une section du conducteur interpolaire lorsqu'on fermera le circuit. Il résulte, d'ailleurs, du choix fait pour l'unité absolue de force électromotrice dans le système électromagnétique, que EI est l'expression de ce même travail dans ce système. On a donc

$$i(V_1 - V_0) = EI,$$

d'où

$$E = (V_1 - V_0)\frac{i}{I} = K(V_1 - V_0).$$

K étant connu, on voit que la mesure électrostatique de $V_1 - V_0$ pourra donner E.

$V_1 - V_0$ peut s'évaluer en valeur absolue (électrostatique) au moyen de l'électromètre absolu de Thomson, appareil fort complexe, et très délicat, pour les détails duquel nous renvoyons à la *Physique* de Jamin (t. I, 3e édition). Il consiste en principe en deux plateaux parallèles pouvant communiquer respectivement avec les deux pôles du générateur électrique; leur surface S est connue, et l'appareil est disposé de façon que l'on puisse mesurer leur distance D et la force attractive F qui s'exerce entre eux. Le calcul fournit la relation

$$V_1 - V_0 = D\sqrt{\frac{8\pi F}{S}},$$

qui donnera la quantité cherchée $V_1 - V_0$.

Ici s'arrête la partie théorique de cette Note; l'importance pratique des notions qui y sont renfermées ressortira des applications que nous allons en faire.

§ VI. — Du calcul en unités usuelles des effets des courants électriques.

1° *Effets calorifiques et mécaniques.*

Chacun sait qu'un courant électrique parcourant un circuit donne, sur son parcours, naissance à la production d'un travail sous les différentes formes que celui-ci peut affecter (travail mécanique proprement dit, chaleur, actions chimiques). Les expériences de Joule et de M. Favre ont complètement mis en évidence ce fait, qui découle du reste du principe général de la conservation de l'énergie.

Il résulte, de notre définition de la force électromotrice par le travail, que l'énergie totale développée dans l'unité de temps par un courant d'intensité absolue I a pour expression en travail mécanique

$$T = KEI. \tag{1}$$

ou, en chaleur,

(2) $$Q = KAEI,$$

E étant la force électromotrice du générateur électrique,
A l'équivalent calorifique du travail,
K un coefficient numérique.

L'expression donnée pour Q est complètement générale. Si la force électromotrice E est *seule* agissante dans le circuit, on a la relation connue

$$I = \frac{E}{R},$$

d'où

$$Q = KAI^2R,$$

relation qui n'est autre que l'expression ordinaire de la loi de Joule.

La mise en œuvre des formules (1) et (2) exige la connaissance des coefficients A et K. Si l'on exprime toujours, comme d'ordinaire, T en kilogrammètres et Q en calories, A a la valeur connue $\frac{1}{425}$. La valeur de K dépend de l'unité adoptée pour E, mais il convient de remarquer avant tout que *ce coefficient K serait nécessairement égal à 1, si l'on prenait pour unité de E l'unité de travail, ici, le kilogrammètre.*

Nous allons maintenant déduire de cette remarque les valeurs de K, E étant supposé évalué : 1° dans le système CGS; 2° dans le système VOW.

1° Les quantités électriques sont exprimées en unités absolues du système CGS.

L'unité absolue de travail dans ce système est $\frac{1}{980}$ gramme centimètre. Si l'on conservait cette unité, K vaudrait 1 et l'on aurait $T = EI$; mais si, laissant pour E cette unité, nous évaluons T en kilogrammètres, unité 90×10^6 fois plus grande, on voit que la valeur numérique de T deviendra ce même nombre de fois plus faible; il faudra donc diviser le second membre de l'égalité par ce nombre.

On aura donc :

$$K = \frac{1}{98 \times 10^6} = \frac{0,0102}{10^6}.$$

$KA = \frac{K}{425}$ a pour valeur $\frac{0,000024}{10^6}$.

2° Les quantités électriques sont exprimées en unités usuelles VOW.

Considérons la formule $T = KEI$. Si E et I sont évalués dans le système CGS, K aura la valeur que l'on vient de calculer. Si nous choisissons pour unité E le Volt, et pour unité I le Weber, le produit IE prendra une valeur numérique $10^8 \times 10^{-1} = 10^7$ fois plus petite, comme d'autre part T conserve la même valeur, puisqu'il est toujours exprimé en kilogrammètres, on voit qu'il faudra multiplier le second membre de l'égalité par 10^7.

On aura donc :

$$K = \frac{0,0102}{10^6} \times 10^7 = 0,102,$$

et par suite

$$KA = 0,00024.$$

De ce qui précède, il résulte que les quantités de travail ou de chaleur qu'un courant est susceptible de développer en 1" dans la *totalité* du circuit qu'il parcourt sont exprimées en kilogrammètres ou calories par les formules suivantes.

Les constantes du courant étant exprimées dans le système :

CGS		VOW	
Travail en kilogrammètres	Chaleur en calories	Travail en kilogrammètres	Chaleur en calories
$T = \frac{0,0102}{10^6} EI$	$Q = \frac{0,000024}{10^6} EI$	$T = 0,102 . EI$	$Q = 0,00024 . EI$

Ces quantités totales de travail ou de chaleur peuvent se répartir inégalement dans le circuit, sous une forme ou sous une autre. Cette répartition s'effectue, suivant l'une des lois de Joule, proportionnellement aux résistances propres des diverses parties du circuit. Si donc R est la résistance totale de celui-ci, ρ la résistance

d'une partie déterminée de celui-ci, les quantités de travail ou de chaleur disponibles dans cette partie seront

$$t = \mathrm{T}\frac{\rho}{\mathrm{R}}; \quad q = \mathrm{Q}\frac{\rho}{\mathrm{R}}.$$

Application à la transmission de la force motrice par l'électricité.

Les considérations exposées dans ce travail trouvent une intéressante application dans l'importante question de la transmission de la force motrice par l'électricité. Pour l'effectuer, on emploie deux machines dynamo-électriques conjuguées que nous supposons identiques, comme c'est du reste ordinairement. La première A transforme en électricité une quantité donnée de travail T, qui lui est fournie par un moteur quelconque : c'est le générateur électrique; la seconde machine B fonctionne par réversibilité et retransforme une partie de l'électricité en travail : c'est le moteur électrique.

On peut exposer comme il suit d'une manière élémentaire la théorie de cette transmission.

Soit V la vitesse de régime du générateur, $\frac{V}{n}$ celle du moteur, E la force électromotrice d'induction du générateur (c'est une fonction du magnétisme des électro-aimants, des dimensions et de la vitesse de la bobine induite), I l'intensité du courant traversant l'ensemble du circuit, R la résistance *totale* de celui-ci. Toutes les quantités électriques sont supposées évaluées en unités VOW.

L'énergie T (kilogrammètres), transmise par seconde au générateur, a aussi pour expression 0,102 IE. D'après les lois fondamentales de l'induction, le mouvement de la bobine de B dans le champ magnétique de cette machine développe une force électromotrice négative, $-\mathrm{E}_1$, de telle sorte que $\mathrm{I} = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{E}_1}{\mathrm{R}}$.

La quantité d'énergie transformée en chaleur dans l'ensemble du circuit est, d'après la loi de Joule :

$$\frac{(\mathrm{E} - \mathrm{E}_1)^2}{\mathrm{R}} \times 0,102;$$

en la retranchant de l'énergie dépensée, on a la quantité qui

reparaît sous forme de travail dans le moteur électrique. On obtient ainsi facilement la relation :

$$\frac{T}{0,102} = \frac{1}{R}\left[E_1(E - E_1) + (E - E_1)^2\right].$$

D'autre part, les deux machines A et B étant identiques et traversées par un même courant, il résulte de l'hypothèse de Neumann, vérifiée par l'expérience, que

$$\frac{E}{E_1} = \frac{V}{\frac{V}{n}},$$

d'où

$$E_1 = \frac{E}{n};$$

substituant, il vient

$$\frac{T}{0,102} = \frac{E^2}{R}\left[\frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right].$$

Dans la quantité entre crochets, le premier terme répond à la quantité d'énergie qui reparaît en B comme travail disponible ; le second répond à la quantité transformée en chaleur.

On en déduit que le rendement électrique de la transmission a pour expression générale $\rho = \frac{1}{n}$,

On voit aussi très facilement que la machine B fournit la quantité maximum de travail utilisable lorsque $\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$; d'où $n = 2$, c'est-à-dire lorsque le moteur électrique a une vitesse de régime égale à la moitié de celle du générateur. Le rendement électrique correspondant est égal à $\frac{1}{2}$.

2° *Effets chimiques.*

Pour les calculer, il suffit de se rappeler que le poids d'hydrogène dégagé en 1^s par l'unité absolue de courant, dans l'analyse de l'eau, est très sensiblement, en milligrammes,

$$\text{dans le système}\begin{cases}\text{CGS} \ldots\ldots\ldots & h = 0{,}1,\\ \text{VOW} \ldots\ldots\ldots & h = 0{,}01.\end{cases}$$

Il résulte alors des lois de Faraday que, si l'on soumet à l'électrolyse un composé de formule MR, M étant l'équivalent d'un métal et R celui d'un radical (métalloïde ou acide suroxygéné), le poids de métal déposé par 1ˢ sera, pour un courant d'intensité I, $p = MhI$.

§ VII. — Exemples numériques.

I. — L'expérience a montré que pour qu'une bougie Jablochkoff fonctionne régulièrement, il faut que l'intensité du courant soit d'environ 8 Webers, et la force électromotrice (à la base de la bougie) 40 à 45 Volts. — Le travail consommé par une de ces bougies est donc $0{,}102 \times 8 \times 45 = 36$ kilogrammètres. Si le rendement des mécanismes est de 0,50, on voit qu'on peut évaluer à 72 kilogrammètres le travail à dépenser pour l'alimentation d'une bougie, soit par excès 75 kilogrammètres.

Une machine motrice de *n* chevaux peut donc alimenter *n* foyers électriques de ce système.

II. — La force électromotrice d'un élément Bunsen (moyen modèle) est de 2 Volts; on assemble en série 50 de ces éléments; la résistance intérieure de chacun est 0,40 Ohm; le circuit extérieur est formé d'un fil de cuivre de $\frac{1}{2}$ millimètre de diamètre et 100 mètres de longueur; la résistance d'un semblable fil est de 85 Ohms par kilomètre. On demande :

1° L'intensité du courant produit;

2° La quantité totale d'énergie développée par la pile en 1ˢ;

3° La température à laquelle s'élèveront en 5 minutes 2 kilogrammes d'eau primitivement à 10° renfermés dans un calorimètre où le fil extérieur est complètement plongé.

La résistance externe est $85 \times 0{,}1 = 8{,}5$ Ohms.

La résistance interne, $50 \times 0{,}4 = 20$ Ohms.

La résistance totale, 28,5 Ohms.

La force électromotrice de la pile, $50 \times 2 = 100$ Volts.

L'intensité du courant est : $I = \frac{100}{28{,}5} = 3{,}5$ Webers.

L'énergie totale développée en 1',

$$T = 0{,}102 \times 100 \times 3{,}5 = 35{,}70 \text{ kilogrammètres.}$$

La proportion de celle-ci disponible dans le circuit extérieur est $\frac{8,5}{28,5} = 0{,}29$.

La quantité de calories dégagées en 1ˢ dans ce circuit est donc $0{,}29 \times \frac{35,70}{425}$, et, en $5^{min.}$, 300 fois plus, soit 7,31 calories. D'où l'on déduit facilement que la température finale de l'eau sera 13°,65.

III. — Un moteur à vapeur de 4 chevaux effectifs sur l'arbre fait mouvoir une machine Gramme. L'intensité du courant est de 15 Webers, la résistance du circuit extérieur 2 Ohms. Sachant que le rendement des mécanismes est 0,60, on demande :

1° La quantité d'énergie consommée par la machine Gramme;

2° La force électromotrice productrice du courant;

3° La résistance interne de la machine;

4° Le rendement électrique et l'énergie disponible dans le circuit externe.

L'énergie consommée en 1' est

$$0{,}60 \times 4 \times 75 = 180 \text{ kilogrammètres.}$$

On a donc : $0{,}102\,IE = 180$; d'où, I égalant 15,

$$E = \frac{180}{0{,}102 \times 15} = 117 \text{ Volts;}$$

r étant la résistance interne de la machine, on aura $15 = \frac{117}{2 + r}$, d'où l'on tire $r = 5{,}8$ Ohms. La résistance totale est donc 7,8 Ohms; le rendement électrique est $\frac{2}{7,8} = 0{,}25$, et l'énergie disponible par 1ˢ dans le circuit extérieur sera seulement :

$$180 \times 0{,}25 = 45 \text{ kilogrammètres.}$$

IV. — La résistance intérieure d'une machine Gramme à galvanoplastie est de 0,02 Ohm. Cette machine dépose 200 grammes

de cuivre par heure, en fournissant un courant dont la force électromotrice est de 8 Volts; sachant que le cuivre a pour équivalent 31,70, on demande :

1° L'intensité du courant;

2° La force de la machine à vapeur nécessaire pour actionner la machine Gramme (le rendement des mécanismes étant évalué à 0,50);

3° La résistance du circuit extérieur et la dépense d'énergie relative à l'électrolyse.

Le poids de cuivre déposé par 1ˢ est $\frac{200}{3600} = 0,0555$ gramme; par suite $I = \frac{0,0555}{31,70 \times 0,00001} = 175$ Webers.

Le travail consommé en 1ˢ par le générateur électrique sera

$$0,102 \times 175 \times 8 = 143 \text{ kilogrammètres};$$

en tenant compte du rendement mécanique, on voit que la machine à vapeur devra développer un travail de $\frac{143}{0,5 \times 75} = 3,8$ chevaux.

La résistance extérieure sera donnée par la relation

$$175 = \frac{8}{0,02 + r}$$

et est de 0,026 Ohm.

La résistance totale est donc de 0,046 Ohm et l'énergie consommée en 1ˢ par l'électrolyse $143 \times \frac{0,026}{0,046}$, soit 80 kilogrammètres environ.

V. — On veut pouvoir disposer, en un point B, d'une force motrice de 5 chevaux. Cette force doit être transmise d'un point A par l'électricité. La résistance totale du circuit étant évaluée à 25 Ohms, et sachant que l'on veut un rendement effectif total de 0,35, celui des mécanismes étant de 0,50, on demande :

1° La force d'une machine à vapeur destinée à actionner en A le générateur électrique;

2° Le rendement électrique de la transmission et le rapport des vitesses des machines A et B;

3° L'intensité du courant qui parcourt le circuit;

4° Les valeurs des forces électromotrices d'induction pour chacune des deux machines.

La force de la machine à vapeur devra être $\frac{5}{0,35} = 14$ chevaux. Le rendement électrique ρ sera donné par la relation $0,35 = 0,50\rho$, d'où $\rho = 0,70$.

On a donc $\frac{\text{vitesse A}}{\text{vitesse B}} = \frac{1}{0,70} = 1,43$, d'où $E_{(B)} = \frac{E_{(A)}}{1,43}$.

Le travail par 1s transformé en électricité par le générateur A est $\frac{5 \times 75}{0,70} = 525$ kilogrammètres.

On a par suite les deux relations

$$IE_{(A)} = \frac{525}{0,102} = 5206, \quad I = E_{(A)} \frac{\left(1 - \frac{1}{1,43}\right)}{25},$$

ou

$$\frac{I}{E_{(A)}} = 0,012.$$

Ces deux relations donnent

$$I = 7 \text{ Webers } 9 \qquad \text{et} \qquad E_{(A)} = 658 \text{ Volts},$$

d'où

$$E_{(B)} = 460 \text{ Volts}.$$

Variables

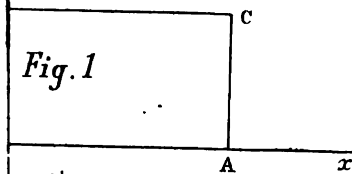


Fig. 1

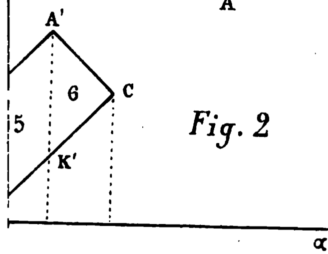


Fig. 2

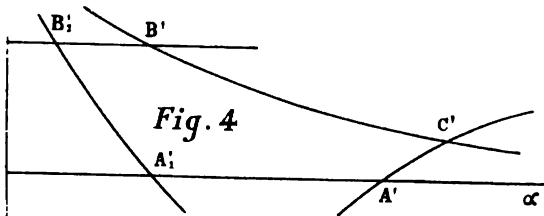


Fig. 4

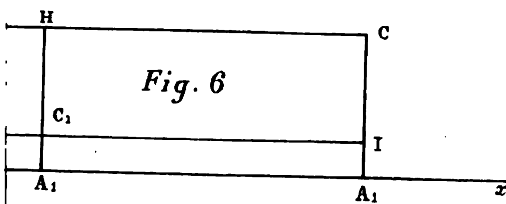


Fig. 6

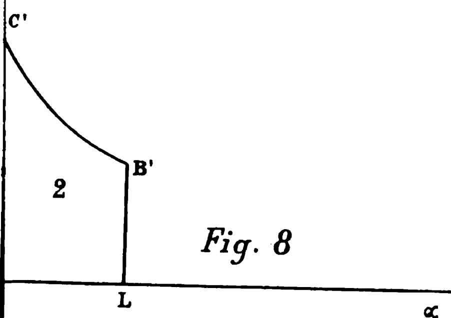


Fig. 8

THÉORÈMES GÉNÉRAUX

SUR LA

DÉCOMPOSITION DES ENVELOPPES

THÉORÈME SUR LES SURFACES DÉVELOPPABLES

PAR M. L. SALTEL

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

I. — Théorèmes généraux sur la décomposition des enveloppes [1].

PREMIER THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Le lieu géométrique dont l'équation s'obtient en éliminant les paramètres x, y, a_1, a_2 entre les relations*

$$(A)\,[2]\begin{cases} U(X,Y,x,y,a_1,a_2)=0, & (1)\\ U_1(x,y,a_1,a_2)=0, & (2)\\ U_2(x,y,a_1,a_2)=0, & (3)\\ U_3(x,y,a_1,a_2)=0, & (4)\\ \dfrac{D(U,U_1,U_2,U_3)}{D(x,y,a_1,a_2)}=0, & (5)\end{cases}$$

se décompose en deux lieux. L'équation de l'un de ces deux lieux s'obtient en éliminant x, y, a_1, a_2 entre les équations homogènes

$$(B)\begin{cases} V_m(X,Y,x,y,a_1,a_2)=0, & (6)\\ V_{m_1}(x,y,a_1,a_2)=0, & (7)\\ V_{m_2}(x,y,a_1,a_2)=0, & (8)\\ V_{m_3}(x,y,a_1,a_2)=0, & (9)\end{cases}$$

---

[1] Nous appelons la plus sérieuse attention sur ces théorèmes généraux, qui nous semblent devoir jouer un rôle capital dans les recherches futures sur la théorie des enveloppes. Nous appelons également l'attention sur les théorèmes (énoncés comme remarques dans le bas des pages) qui permettent de ramener immédiatement la détermination des singularités ordinaires des enveloppes à la détermination des mêmes singularités dans des *lieux auxiliaires* correspondants définis par un *plus petit nombre* d'équations.

[2] Ces équations définissent l'enveloppe des courbes représentées par l'équation (1), où l'on considère X, Y comme coordonnées courantes et x, y, a_1, a_2 comme des paramètres variables liés par les relations (2, 3, 4).

dans lesquelles V_m, V_{m_1}, V_{m_2}, V_{m_3} *représentent l'ensemble des termes du plus haut degré en* x, y, a_1, a_2 *des équations* (1, 2, 3, 4) ([1]).

Démonstration. — On peut considérer le système (A) comme déduit du système composé des équations (1, 2, 3, 4) et des équations

$$(C)\begin{cases} \alpha \dfrac{dU}{dx} + \beta \dfrac{dU}{dy} + \gamma \dfrac{dU}{da_1} + \dfrac{dU}{da_2} = 0, & (10) \\ \alpha \dfrac{dU_1}{dx} + \beta \dfrac{dU_1}{dy} + \gamma \dfrac{dU_1}{da_1} + \dfrac{dU_1}{da_2} = 0, & (11) \\ \alpha \dfrac{dU_2}{dx} + \beta \dfrac{dU_2}{dy} + \gamma \dfrac{dU_2}{da_1} + \dfrac{dU_2}{da_2} = 0, & (12) \\ \alpha \dfrac{dU_3}{dx} + \beta \dfrac{dU_3}{dy} + \gamma \dfrac{dU_3}{da_1} + \dfrac{dU_3}{da_2} = 0, & (13) \end{cases}$$

entre lesquelles on a éliminé les paramètres α, β, γ.

Or, en supposant

$$\frac{x}{a_2} = \alpha, \qquad \frac{y}{a_2} = \beta, \qquad \frac{a_1}{a_2} = \gamma,$$

et faisant a_2 infini, le système (1, 2, 3, 4, C) s'écrit pour ces valeurs *particulières des paramètres variables*

$$(D)\begin{cases} V_m(X, Y, \alpha, \beta, \gamma, 1) = 0, & (14) \\ V_{m_1}(\alpha, \beta, \gamma, 1) = 0, & (15) \\ V_{m_2}(\alpha, \beta, \gamma, 1) = 0, & (16) \\ V_{m_3}(\alpha, \beta, \gamma, 1) = 0, & (17) \\ \alpha \dfrac{dV_m}{d\alpha} + \beta \dfrac{dV_m}{d\beta} + \gamma \dfrac{dV_m}{d\gamma} + \dfrac{dV_m}{dt} = 0, & (18) \\ \alpha \dfrac{dV_{m_1}}{d\alpha} + \beta \dfrac{dV_{m_1}}{d\beta} + \gamma \dfrac{dV_{m_1}}{d\gamma} + \dfrac{dV_{m_1}}{dt} = 0, & (19) \\ \alpha \dfrac{dV_{m_2}}{d\alpha} + \beta \dfrac{dV_{m_2}}{d\beta} + \gamma \dfrac{dV_{m_2}}{d\gamma} + \dfrac{dV_{m_2}}{dt} = 0, & (20) \\ \alpha \dfrac{dV_{m_3}}{d\alpha} + \beta \dfrac{dV_{m_3}}{d\beta} + \gamma \dfrac{dV_{m_3}}{d\gamma} + \dfrac{dV_{m_3}}{dt} = 0, & (21) \end{cases}$$

([1]) C'est seulement pour mieux préciser que nous énonçons ce théorème général sur le cas de *quatre* paramètres variables x, y, a_1, a_2; il est bien entendu que la démonstration s'étend d'elle-même à un nombre arbitraire de paramètres; il est bien entendu aussi qu'elle s'étend d'elle-même à l'enveloppe d'une surface dont l'équation $U(X, Y, Z, x, y, \ldots, a_{k-2}) = 0$ renferme K paramètres arbitraires liés par K−1 relations.

où t représente une lettre auxiliaire, supposée égale à l'unité et servant à rendre les équations (14, 15, 16, 17) homogènes en α, β, γ, t. Dès lors, le théorème des fonctions homogènes montrant que les équations (14, 15, 16, 17) sont respectivement identiques aux équations (18, 19, 20, 21), le théorème en question est lui-même démontré [1].

Second théorème général. — *Si le système* (A) *du lieu précédent se réduit à la forme*

$$
(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{lr}
U(X,Y,x,y)=0, & (22)\\
U_1(x,y,a_1,a_2)=0, & (23)\\
U_2(x,y,a_1,a_2)=0, & (24)\\
U_3(x,y,a_1,a_2)=0, & (25)\\
\left|\begin{array}{cccc}
\frac{dU}{dx} & \frac{dU}{dy} & 0 & 0\\
\frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right| = 0 \text{ ou } \dfrac{\frac{dU}{dx}}{\left|\begin{array}{ccc}
\frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right|} = \dfrac{\frac{dU}{dy}}{\left|\begin{array}{ccc}
\frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right|} & (26)
\end{array}\right.
$$

l'équation du second lieu, dont se compose (E), *s'obtient dans ce cas en éliminant* x, y, a_1, a_2 *entre*

$$
(\mathrm{F})\left\{\begin{array}{lr}
U_1(x,y,a_1,a_2)=0, & (27)\\
U_2(x,y,a_1,a_2)=0, & (28)\\
U_3(x,y,a_1,a_2)=0, & (29)\\
\dfrac{\frac{dU}{dx}}{\left|\begin{array}{ccc}
\frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right|} = \dfrac{\frac{dU}{dy}}{\left|\begin{array}{ccc}
\frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right|} = \dfrac{\frac{dU}{dt}}{\left|\begin{array}{ccc}
\frac{dU_1}{dt} & \frac{dU_1}{da_1} & \frac{dU_1}{da_2}\\
\ldots, & \ldots, & \ldots\\
\ldots, & \ldots, & \ldots
\end{array}\right|} & (30)
\end{array}\right.
$$

---

[1] Cette démonstration est préférable à celle qui se trouve développée dans nos publications antérieures. (Voir le *compte-rendu* du 18 septembre 1876 et l'*addition* à notre Mémoire sur les *Applications de la loi de Décomposition*.

dans lesquelles t représente une lettre auxiliaire supposée égale à l'unité et servant à rendre les équations (22, 23, 24, 25) *homogènes en x, y, a_1, a_2, t.*

Démonstration. — Si l'on multiplie et divise respectivement les rapports (26) par x, y, et que l'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs, on voit, d'après notre extension du théorème des fonctions homogènes, que l'on reproduit le système (F). Donc le système (F), pour des valeurs finies de x, y, est une conséquence de (E). D'autre part, si l'on cherche les ordres des lieux (B), (E), (F), on trouve que le degré de (E) égale la somme des degrés de (B) et (F); donc le théorème est démontré [1].

Nota. — Nous sommes parvenus à déterminer toutes les singularités ordinaires du lieu (E). Ajoutons que dans le cas particulier où (22) se réduit à

$$Xx + Yy - 1 = 0, \qquad (31)$$

ces singularités se déduisent immédiatement des singularités du *lieu auxiliaire* défini par les équations (23, 24, 25), où l'on considère x, y comme coordonnées courantes et a_1, a_2 comme des paramètres variables [2].

TROISIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. — *Le lieu géométrique dont l'équation s'obtient en éliminant les paramètres x, y, a_1, a_2 entre les relations*

$$(G)\,[3]\left\{\begin{array}{lr} U(X,Y,Z,x,y,z) = 0, & (32) \\ U_1(x,y,z,a_1,a_2) = 0, & (33) \\ U_2(x,y,z,a_1,a_2) = 0, & (34) \\ U_3(x,y,z,a_1,a_2) = 0, & (35) \\ \dfrac{\frac{dU}{dx}}{\frac{D(U_1,U_2,U_3)}{D(x,a_1,a_2)}} = \dfrac{\frac{dU}{dy}}{\frac{D(U_1,U_2,U_3)}{D(y,a_1,a_2)}} = \dfrac{\frac{dU}{dz}}{\frac{D(U_1,U_2,U_3)}{D(z,a_1,a_2)}} & (36) \end{array}\right.$$

---

(1) On a un théorème général correspondant pour les surfaces, c'est-à-dire pour le cas où l'équation (22) est remplacée par une équation de la forme $U(X,Y,Z,x,y) = 0$.

(2) On le démontre facilement par l'analyse et l'on s'en rend compte tout de suite par la géométrie, en observant que le lieu (E) n'est autre que la courbe *polaire réciproque* du *lieu auxiliaire* par rapport au cercle représenté par $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

(3) Ces équations définissent l'enveloppe des surfaces représentées par l'équation (32), où l'on considère X, Y, Z comme coordonnées courantes et x, y, z, a_1, a_2 comme des paramètres variables liés par les relations (33, 34, 35). Ajoutons que le théorème général en question s'étend au cas où l'on substitue aux trois équations (33, 34, 35) K équations entre es K + 2 paramètres arbitraires x, y, z, $a_1, \ldots, a_{k-1}$.

se décompose en deux lieux. L'équation de l'un de ces deux lieux s'obtient en éliminant x, y, z, a_1, a_2 entre les équations homogènes

$$(\mathrm{H})\left\{\begin{aligned} &V_{m_1}(x,y,z,a_1,a_2) = 0, && (37)\\ &V_{m_2}(x,y,z,a_1,a_2) = 0, && (38)\\ &V_{m_3}(x,y,z,a_1,a_2) = 0, && (39)\\ &\frac{\frac{dV_m}{dx}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(x,a_1,a_2)}} = \frac{\frac{dV_m}{dy}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(y,a_1,a_2)}} = \frac{\frac{dV_m}{dz}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(z,a_1,a_2)}} && (40)\end{aligned}\right.$$

dans lesquelles $V_m, V_{m_1}, V_{m_2}, V_{m_3}$ représentent l'ensemble des termes du plus haut degré en x, y, z, a_1, a_2 des équations (32, 33, 34, 35).

Démonstration. — Posons, pour x infini,

$$\frac{y}{x} = y', \quad \frac{z}{x} = z', \quad \frac{a_1}{x} = a'_1, \quad \frac{a_2}{x} = a'_2. \qquad (41)$$

Le système (G) se réduit, pour cette valeur de x, à

$$(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned} &V_m(X,Y,Z,1,y',z') = 0, && (42)\\ &V_{m_1}(1,y',z',a'_1,a'_2) = 0, && (43)\\ &V_{m_2}(1,y',z',a'_1,a'_2) = 0, && (44)\\ &V_{m_3}(1,y',z',a'_1,a'_2) = 0, && (45)\\ &\frac{\frac{dV_m}{dt}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(t,a'_1,a'_2)}} = \frac{\frac{dV_m}{dy'}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(y',a'_1,a'_2)}} = \frac{\frac{dV_m}{dz'}}{\frac{D(V_{m_1},V_{m_2},V_{m_3})}{D(z',a'_1,a'_2)}}, && (46)\end{aligned}\right.$$

où t représente une lettre auxiliaire, supposée égale à l'unité et servant à rendre les équations (42, 43, 44, 45) homogènes en y', z', a'_1, a'_2, t.

Cela fait, la question revient évidemment à prouver que les équations (43, 44, 45, 46) entraînent, comme conséquence, l'équation (42). C'est ce que l'on voit, tout de suite, en ajoutant les numérateurs et les dénominateurs des rapports (46) multipliés respectivement par 1, y', z', et ayant égard à notre extension du théorème des fonctions homogènes (¹).

(¹) Nous avions déjà examiné les deux cas particuliers les plus simples de ce troisième théorème général dans le *Compte rendu* du 13 novembre 1876.

QUATRIÈME THÉORÈME GÉNÉRAL. — *L'équation du second lieu dont se compose le système* (G) *s'obtient en éliminant x, y, z, a_1, a_2 entre les équations*

$$
(\mathrm{J})\begin{cases}
\mathrm{U}_1(x,y,z,a_1,a_2)=0, & (47)\\
\mathrm{U}_2(x,y,z,a_1,a_2)=0, & (48)\\
\mathrm{U}_3(x,y,z,a_1,a_2)=0, & (49)\\
\dfrac{\dfrac{d\mathrm{U}}{dx}}{\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(x,a_1,a_2)}}=\dfrac{\dfrac{d\mathrm{U}}{dy}}{\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(y,a_1,a_2)}}=\dfrac{\dfrac{d\mathrm{U}}{dz}}{\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(z,a_1,a_2)}}=\dfrac{\dfrac{d\mathrm{U}}{dt}}{\dfrac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(t,a_1,a_2)}} & (50)
\end{cases}
$$

t étant une variable auxiliaire servant à rendre homogènes en x, y, z, a_1, a_2, t les équations (32, 33, 34, 35).

Démonstration. — Si l'on ajoute les numérateurs et les dénominateurs des rapports (36) multipliés respectivement par x, y, z *supposés finis*, on voit, d'après notre extension du théorème des fonctions homogènes, que l'on obtient le système (J); donc le système (J), pour des valeurs finies de x, y, z, est une conséquence du système (G). D'autre part, si l'on cherche les ordres des lieux (G, H, J) [1], on trouve que le degré de (G) égale la somme des degrés de (H) et (J); donc le théorème est démontré.

Nota. — Nous sommes parvenus à déterminer toutes les singu-

---

[1] Pour trouver, par la méthode de correspondance analytique, le degré du lieu (J), il suffit de chercher les degrés des lieux (M, N, P) définis comme il suit :

1° Le lieu (M) défini par les équations (47, 48, 49) jointes aux équations obtenues en égalant séparément le premier rapport de (50) au second et au troisième, puis le troisième au quatrième;

2° Le lieu (N) défini par les équations (47, 48, 49) jointes aux équations

$$\frac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(x,a_1,a_2)}=0,\quad \frac{d\mathrm{U}}{dx}=0$$

et l'équation obtenue en égalant le troisième rapport au quatrième;

3° Le lieu (P) défini par les équations (47, 48, 49) jointes aux équations

$$\frac{d\mathrm{U}}{dz}=0,\quad \frac{\mathrm{D}(\mathrm{U}_1,\mathrm{U}_2,\mathrm{U}_3)}{\mathrm{D}(z,a_1,a_2)}=0$$

et l'équation obtenue en égalant le premier rapport au second. Ces degrés trouvés, il faut retrancher du degré (M) les degrés des lieux (N) et (P).

larités ordinaires du lieu (G). Ajoutons que dans le cas particulier où (32) se réduit à

$$Xx + Yy + Zz - 1 = 0, \qquad (31)$$

ces singularités se déduisent immédiatement du *lieu auxiliaire* défini par les équations (33, 34, 35), où l'on considère x, y, z comme coordonnées courantes et a_1, a_2 comme des paramètres à éliminer (¹).

II. — Théorème sur les surfaces développables.

Théorème. — *Si l'on suppose les axes coordonnés arbitraires, les singularités ordinaires de la surface développable dont l'équation s'obtient en éliminant x, y, z, a_1 entre les équations*

$$(\text{A})\,(^2)\left\{\begin{array}{lr} Xx + Yy + Zz - 1 = 0, & (1)\\ U_1(x,y,z,a_1) = 0, & (2)\\ U_2(x,y,z,a_1) = 0, & (3)\\ U_3(x,y,z,a_1) = 0, & (4)\\ \begin{vmatrix} X & Y & Z & O \\ \frac{dU_1}{dx} & \frac{dU_1}{dy} & \frac{dU_1}{dz} & \frac{dU_1}{da_1} \\ \frac{dU_2}{dx} & \frac{dU_2}{dy} & \frac{dU_2}{dz} & \frac{dU_2}{da_1} \\ \frac{dU_3}{dx} & \frac{dU_3}{dy} & \frac{dU_3}{dz} & \frac{dU_3}{da_1} \end{vmatrix} = 0, & (5) \end{array}\right.$$

(¹) On le démontre facilement par l'analyse et l'on s'en rend compte tout de suite par la géométrie en observant que le lieu (G) n'est autre que la *surface polaire réciproque* du *lieu auxiliaire* par rapport à la sphère représentée par

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$

(²) Ces équations définissent l'enveloppe du plan représenté par (1), où l'on considère X, Y, Z comme coordonnées courantes et x, y, z, a_1 comme des paramètres variables liés par (2, 3, 4). On peut aussi considérer ces relations comme définissant la polaire réciproque, par rapport à la sphère représentée par $x^2+y^2+z^2-1=0$, de la *courbe gauche auxiliaire* définie par les équations (2, 3, 4), où l'on considère x, y, z comme coordonnées courantes et a_1 comme un paramètre variable.

s'obtiennent tout de suite en cherchant les singularités de la courbe plane enveloppe d'une ligne droite, courbe définie par les relations

$$(\mathrm{B})\left\{\begin{array}{l} \mathrm{X}x+\mathrm{Y}y-1=0,\\ \mathrm{U}_1(x,y,z,a_1)=0,\\ \mathrm{U}_2(x,y,z,a_1)=0,\\ \mathrm{U}_3(x,y,z,a_1)=0,\\ \begin{vmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{Y} & 0 & 0\\ \frac{d\mathrm{U}_1}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_1}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_1}{dz} & \frac{d\mathrm{U}_1}{da_1}\\ \frac{d\mathrm{U}_2}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_2}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_2}{dz} & \frac{d\mathrm{U}_2}{da_1}\\ \frac{d\mathrm{U}_3}{dx} & \frac{d\mathrm{U}_3}{dy} & \frac{d\mathrm{U}_3}{dz} & \frac{d\mathrm{U}_3}{da_1} \end{vmatrix}=0, \end{array}\right.$$

entre lesquelles on doit éliminer x, y, z, a_1.

Démonstration. — Il suffit en effet, pour connaître toutes les singularités de la développable, de déterminer les singularités d'une section plane. Or, l'équation de la section faite par le plan des X, Y est précisément définie par (B).

Nota I. — Nous avons déjà eu l'occasion de faire une observation importante au sujet de la détermination des singularités de (B). (Voir le *Nota* de la démonstration du *second théorème général* du paragraphe I.)

Nota II. — Le théorème s'étend de lui-même au cas où l'on substitue aux trois équations (2, 3, 4), K équations entre les K + 1 paramètres x, y, z, a_1, ..., a_{k-2}.

CONTRIBUTION

A LA

THÉORIE DU CHANGEMENT DES VARIABLES

DANS LE CALCUL DES INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES

PAR M. L. SALTEL

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

« Le grand devoir des Facultés à l'égard du Pays consiste
» à faire progresser la science, tandis que la préparation aux
» examens doit être considérée comme un accessoire. »
(*Circulaire ministérielle* du 1er octobre 1880.)

I. — Changement de variable dans les intégrales simples.

J'ai observé, dans mon enseignement à la Faculté des Sciences de Bordeaux, que la question du changement de la variable, dans le calcul d'une intégrale simple, présentait, aux yeux des élèves, une plus grande clarté, grâce à certaines considérations préliminaires et à la substitution des dérivées aux différentielles.

Voici la petite modification apportée à cette théorie :

Considérations préliminaires. — Si l'on a la fonction

$$U = F(x) \tag{1}$$

et que l'on pose

$$x = \varphi(t), \tag{2}$$

φ étant une fonction arbitraire de t, U sera aussi fonction de t, fonction que nous désignerons par

$$U = H(t), \tag{3}$$

et qui s'obtient en développant

$$U = F(\varphi). \tag{4}$$

Pour calculer, au moyen de (3), la valeur que prend U lors-

qu'on fait dans (1) $x = a$, il suffit, d'après (4), de donner à t la valeur t_a déterminée par la relation

$$a = \varphi(t_a). \tag{5}$$

Ainsi, les égalités

$$\begin{cases} U = F(x), & (1) \\ U = H(t), & (3) \end{cases}$$

ne signifient pas que pour des valeurs égales attribuées à x et t, les fonctions F et H prennent les mêmes valeurs; c'est seulement pour des valeurs correspondantes de x et de t liées par la condition

$$x = \varphi(t) \tag{2}$$

que cette égalité se manifeste. De plus, pour passer de la relation (3) à la relation (1), il suffit de résoudre (2) par rapport à t et de substituer le résultat obtenu dans (3).

Ces considérations préliminaires montrent donc qu'une fonction donnée U d'une certaine variable x, peut être considérée comme fonction d'une infinité de nouvelles variables t; elles prouvent, en outre, que s'il est plus facile de déterminer U par le choix de l'une de ces nouvelles variables que par le choix de la variable x, on obtiendra tout de suite la valeur de U, exprimée au moyen de x, par la simple résolution de l'équation

$$x = \varphi(t) \tag{6}$$

qui lie ces 2 variables.

Applications. — C'est ainsi, en particulier, que

$$U = \int f(x)\,dx = F(x) + C \tag{7}$$

peut être exprimée par

$$U = H(t), \tag{8}$$

t et x étant liées par la relation arbitraire

$$x = \varphi(t); \tag{9}$$

Si donc il est plus facile de déterminer (8) que (7), on aura par cette transformation simplifié ce problème.

Voici comment au moyen de (7) on obtient (8) :

On a

$$\frac{dU}{dx} = f(x), \tag{10}$$

d'où

$$\frac{dU}{dt} = f(x)\frac{dx}{dt} \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dt} = f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}; \tag{11}$$

donc

$$U = \int f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,dt, \tag{12}$$

la constante introduite par l'intégration étant déterminée de manière que la fonction U s'annule pour $t = t_a$ déterminée par

$$a = \varphi(t_a),$$

a étant la valeur connue que l'on doit attribuer à x pour que la fonction U devienne nulle.

Résumé. — En résumé, on voit que le changement de la variable x dans l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\,dx$$

se compose de deux parties : la première, qui est du ressort du calcul intégral et qui consiste à considérer l'intégrale indéfinie

$$\int f(\varphi)\frac{d\varphi}{dt}\,dt;$$

la seconde, qui est du domaine de l'*Algèbre* et qui permet de déterminer les limites de la nouvelle intégrale par la simple résolution de l'équation

$$x = \varphi(t).$$

II. — Changement des variables dans les intégrales doubles.

Au sujet de la détermination des nouvelles limites dans le problème du changement des variables dans les intégrales multiples, les Traités classiques se bornent à faire observer que c'est

là une question purement algébrique. Nous avons pourtant reconnu, par de nombreux exemples, la nécessité de faire intervenir dans la solution de ce problème des considérations géométriques empruntées à la théorie des transformations des figures. Voici ces considérations, qui combleront, croyons-nous, une lacune fort importante.

Si l'on a égard aux développements donnés dans la *première* démonstration (voir, par exemple, le Cours de M. Hoüel, p. 453) qui conduit à la règle du changement des variables dans le calcul des intégrales doubles, on démontrera sans peine ce théorème (1) :

Théorème. — Désignons par I *la valeur obtenue en intégrant l'expression*

$$\iint U(x,y)\,dx\,dy \tag{1}$$

dans l'intérieur du contour Σ. *Faisons correspondre au point* M *le point* K, *dont les coordonnées* (α, β) *sont déterminées par*

$$\begin{cases} x = H_1(\alpha,\beta), & (2)\\ y = H_2(\alpha,\beta), & (3)\end{cases}$$

et soit Σ′ *la courbe correspondante à la courbe* Σ.

Si l'on intègre l'expression

$$\iint U(H_1,H_2)\begin{vmatrix}\dfrac{dH_1}{d\alpha} & \dfrac{dH_1}{d\beta}\\[2mm] \dfrac{dH_2}{d\alpha} & \dfrac{dH_2}{d\beta}\end{vmatrix}\,d\alpha\,d\beta$$

dans l'intérieur du contour Σ′, *on obtient encore le même nombre* I.

---

(1) On peut encore énoncer ce théorème comme il suit (*fig.* P) :

Le volume limité : 1° par le plan des xy ; par la surface représentée par $z = U(x,y)$; 3° par le cylindre à génératrices parallèles à l'axe des z et ayant pour base la courbe Σ, est égal au volume limité : 1° par le plan des $\alpha\beta$; 2° par la surface représentée par $\gamma = U(H_1,H_2).\dfrac{D(H_1,H_2)}{D(\alpha,\beta)}$; 3° par le cylindre à génératrices parallèles à l'axe des γ et ayant pour base la courbe Σ′.

Nota. — Si l'expression $\dfrac{D(H_1,H_2)}{D(\alpha,\beta)}$ se réduit à une constante, on voit par ce théorème, en supposant, ce qui est toujours possible, que la fonction $U(x,y)$ soit égale à l'unité, qu'il y a un rapport constant entre les aires des deux courbes Σ et Σ′. Exemple : H_1 et H_2 sont des fonctions linéaires.

Or l'énoncé même de ce théorème montre immédiatement que pour obtenir les limites de la nouvelle intégrale, toute la difficulté est réduite à cette question de pure géométrie :

Trouver ce que devient une figure donnée quand on la soumet à un mode de transformation connu.

C'est en suivant cette voie que je vais chercher les nouvelles limites de l'intégrale

$$\int_0^a dx \int_0^b \mathrm{U}(x,y)\, dy$$

lorsqu'on fait usage de l'une des trois transformations suivantes :

$$1^\circ \begin{cases} x = \alpha + \beta, \\ y = \alpha - \beta; \end{cases} \quad 2^\circ \begin{cases} x = \alpha(1-\beta), \\ y = \alpha\beta; \end{cases} \quad 3^\circ \begin{cases} x = \beta\cos\alpha, \\ y = \beta\sin\alpha. \end{cases}$$

Nota. — La courbe Σ est réduite ici à un simple rectangle OABCD (*fig.* 1); nous figurerons à part pour plus de clarté la courbe Σ' en employant un nouveau système d'axe.

Première transformation.

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta, & \text{d'où} \quad \alpha = \dfrac{x+y}{2}, \\ y = \alpha - \beta, & \text{d'où} \quad \beta = \dfrac{x-y}{2}. \end{cases}$$

A la droite OA correspond la droite O′A′ ayant pour équation

$$\beta - \alpha = 0;$$

à la droite OB correspond la droite O′B′ ayant pour équation

$$\alpha + \beta = 0;$$

à la droite AC correspond la droite A′C′ ayant pour équation

$$\alpha + \beta - a = 0;$$

enfin à la droite BC correspond la droite B′C′ ayant pour équation

$$\beta - \alpha - b = 0;$$

donc au contour OABC correspond le contour O'A'B'C'; de plus, les coordonnées des sommets A', B', C' sont :

$$A' \begin{cases} \alpha = \frac{a}{2}, \\ \beta = \frac{b}{2}; \end{cases} \qquad B' \begin{cases} \alpha = \frac{b}{2}, \\ \beta = -\frac{b}{2}; \end{cases} \qquad C' \begin{cases} \alpha = \frac{a+b}{2}, \\ \beta = \frac{a-b}{2}, \end{cases}$$

Dès lors, en abaissant de ces sommets des perpendiculaires sur l'axe des α, on voit, à l'inspection de la figure, que pour intégrer dans ce nouveau contour il suffit d'intégrer successivement dans les régions 1, 2, 3, 4, 5, 6 [1], ce qui conduit tout de suite à la formule générale suivante :

$$\begin{aligned} \int_0^a dx \int_0^b \mathrm{U}(x,y)\,dy = {} & 2\int_0^{\frac{b}{2}} d\alpha \int_0^\alpha \mathrm{U}(\alpha+\beta, \alpha-\beta)\,d\beta \\ & + 2\int_0^{\frac{b}{2}} d\alpha \int_0^\alpha \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta + 2\int_{\frac{b}{2}}^{b} d\alpha \int_0^{b-\alpha} \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta \\ & + 2\int_{\frac{b}{2}}^{b} d\alpha \int_0^\alpha \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta + 2\int_b^{\frac{a}{2}} d\alpha \int_{\alpha-b}^{\alpha} \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta \\ & + 2\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a+b}{2}} d\alpha \int_{\alpha-b}^{a-\alpha} \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathrm{U}(\alpha+\beta, \alpha-\beta) = \mathrm{H}(\alpha,\beta).$$

Si l'on suppose, par exemple,

$$\mathrm{U}(x,y) = xy,$$

on trouve

$$\frac{a^2b^2}{4} = \frac{b^4}{48} + \frac{b^4}{48} + \frac{5b^4}{48} + \frac{15\,b^4}{48} + \frac{b^2(12a^2 - 16\,ab - 16\,b^2)}{48} + \frac{16\,ab^3 - 6\,b^4}{48}.$$

[1] On pourrait facilement imaginer d'autres modes de décomposition.

Seconde transformation (¹).

$$\begin{cases} x = \alpha(1-\beta), & (1) \quad \text{d'où} \quad \alpha = x + y, \\ y = \alpha\beta; & (2) \quad \text{d'où} \quad \beta = \dfrac{y}{x+y}. \end{cases}$$

L'inspection de ces formules montre que les coordonnées du point correspondant à l'origine se présentent ici sous forme indéterminée. Pour lever la difficulté, je substitue au rectangle Σ le pentagone A_1ACBB_1 (*fig.* 3), les points A_1B_1 étant deux points infiniment voisins de l'origine.

Dans cette hypothèse (*fig.* 4) :

A la droite A_1B_1 correspond l'hyperbole $A'_1B'_1$ ayant pour équation

$$\frac{\alpha(1-\beta)}{a_1} + \frac{\alpha\beta}{b_1} = 1,$$

a_1 et b_1 étant les distances infiniment petites des points A_1 et B_1 à l'origine; à la droite OA correspondent les droites représentées par

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0;$$

à la droite OB correspondent les droites représentées par

$$\alpha = 0, \qquad 1-\beta = 0, \qquad (B'B'_1);$$

à la droite BC correspond l'hyperbole B′C′ représentée par

$$b = \alpha\beta;$$

à la droite AC correspond l'hyperbole A′C′ roprésentée par

$$a = \alpha(1-\beta);$$

donc au contour A_1ACBB_1 correspond le contour $A'_1A'C'B'B'_1$.

Si maintenant on suppose que les distances OA_1, OB_1 tendent vers zéro, l'arc $A'_1B'_1$ a pour limite l'axe des β et la figure se trouve

(¹) C'est la transformation de Jacobi.

réduite (*fig.* 5) au contour $O'A'B'C'B'_1$, dans lequel les coordonnées des sommets sont

$$A'\begin{cases}\alpha = a,\\ \beta = 0;\end{cases}\quad B'\begin{cases}\alpha = b,\\ \beta = 1;\end{cases}\quad C'\begin{cases}\alpha = a+b,\\ \beta = \dfrac{b}{a+b};\end{cases}\quad B'_1\begin{cases}\alpha = 0,\\ \beta = 1.\end{cases}$$

Dès lors, en abaissant de ces sommets des perpendiculaires sur l'axe des α, on voit, à l'inspection de la figure, que pour intégrer dans ce nouveau contour il suffit d'intégrer successivement dans les régions 1, 2, 3, ce qui conduit tout de suite à la formule générale suivante :

$$\int_0^a dx \int_0^b \mathrm{U}(x,y)\,dy = \int_0^b d\alpha \int_0^1 \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta + \int_b^a d\alpha \int_0^{\frac{b}{\alpha}} \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta$$
$$+ \int_a^{a+b} d\alpha \int_{\frac{\alpha-a}{\alpha}}^{\frac{b}{\alpha}} \mathrm{H}(\alpha,\beta)\,d\beta,$$

où l'on a posé

$$\mathrm{H}(\alpha,\beta) = \mathrm{U}(\alpha-\alpha\beta,\alpha\beta)\times\alpha.$$

Troisième transformation (1).

$$\begin{cases} x = \beta\cos\alpha, & \text{d'où} \quad \alpha = \operatorname{arc\,tang}\dfrac{y}{x},\\ y = \beta\sin\alpha. & \text{d'où} \quad \beta = \sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

Ici encore, au lieu de considérer (*fig.* 6) tout de suite le rectangle OABCD, on doit chercher la figure correspondante au rectangle C_1HCI, dans lequel les côtés A_1C_1, B_1C_1 sont à distances a_1, b_1 infiniment petites de l'origine.

Dans cette hypothèse (*fig.* 7) :

A la droite CI correspond la courbe $C'I'$ représentée par

$$\beta = \frac{a}{\cos\alpha};$$

---

(1) C'est la transformation par coordonnées polaires.

à la droite HC_1 correspond la courbe $H'C'_1$ représentée par

$$\beta = \frac{a_1}{\cos\alpha};$$

à la droite CH correspond la courbe C′H′ représentée par

$$\beta = \frac{b}{\sin\alpha};$$

à la droite C_1I correspond la courbe C'_1I' représentée par

$$\beta = \frac{b_1}{\sin\alpha};$$

donc au contour C_1ICH corrrespond le contour $C'_1I'C'H'$.

Si maintenant on suppose que les distances OA_1, OB_1 tendent vers zéro, l'arc IC′ se réduit à l'axe des β et à l'axe des α, et l'arc C'_1H' à l'axe des α et à la parallèle à l'axe des β à une distance égale à $\frac{\pi}{2}$; donc on a le contour (*fig.* 8) O′LB′C′A′, dans lequel les coordonnées des sommets sont

$$A' \begin{cases} \alpha = 0, \\ \beta = a; \end{cases} \qquad C' \begin{cases} \alpha = \operatorname{arc\,tang} \frac{b}{a}, \\ \beta = \sqrt{a^2 + b^2}; \end{cases} \qquad B' \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2}, \\ \beta = b. \end{cases}$$

Dès lors, en abaissant de ces sommets des perpendiculaires sur l'axe des α, on voit, à l'inspection de la figure, que pour intégrer dans ce nouveau contour il suffit d'intégrer dans les régions 1, 2, ce qui conduit tout de suite à cette formule :

$$\int_0^a dx \int_0^b U(x,y)\,dy = \int_0^{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}} d\alpha \int_0^{\frac{a}{\cos\alpha}} H(\alpha,\beta)\,d\beta + \int_{\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{b}{\sin\alpha}} H(\alpha,\beta)\,d\beta,$$

où l'on a posé

$$H(\alpha,\beta) = U(\beta\cos\alpha, \beta\sin\alpha) \times \beta.$$

Nota. — Le procédé que nous venons d'exposer s'étend au calcul des intégrales définies triples. En ayant encore égard, en effet, aux développements donnés dans la *première* [1] démonstration

---

[1] Celle qui s'étend aux intégrales quadruples, quintuples, etc., ne nous semble pas exacte, bien que conduisant à un résultat exact.

(voir, par exemple, le Traité de M. Bertrand, p. 419), qui conduit à la règle connue du changement des variables dans le cas des intégrales triples, on démontrera sans peine ce théorème, qui constitue une solution immédiate de la question :

THÉORÈME. — *Désignons par* I *la valeur obtenue en intégrant l'expression*

$$\iiint U(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{1}$$

dans l'intérieur d'une surface fermée Σ. *Faisons correspondre au point* M *le point* K, *dont les coordonnées* α, β, γ *sont déterminées par*

$$\begin{cases} x = H_1(\alpha, \beta, \gamma), & (2)\\ y = H_2(\alpha, \beta, \gamma), & (3)\\ z = H_3(\alpha, \beta, \gamma), & (4)\end{cases}$$

et soit Σ' *la surface correspondante à la surface* Σ.

Si l'on intègre l'expression

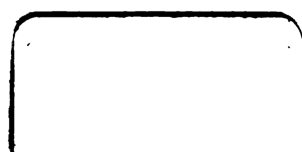
$$\iiint U(H_1, H_2, H_3) \frac{D(H_1, H_2, H_3)}{D(\alpha, \beta, \gamma)} d\alpha, d\beta, d\gamma \tag{5}$$

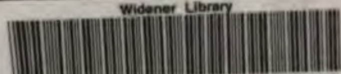
dans l'intérieur de la surface Σ', *on obtient encore le même nombre* I.

TABLE DES MATIÈRES.

Bordeaux. — Imp. G. GOUNOUILHOU, rue Guiraude, 11.






Widener Library
3 2044 090 859 372